

Линейное целочисленное программирование

Т. Тжаскалик

*Введение в исследование операций
с применением компьютера*

Округление решений (1)

Пример 2.1

Исходная задача

$$f(x_1, x_2) = 21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

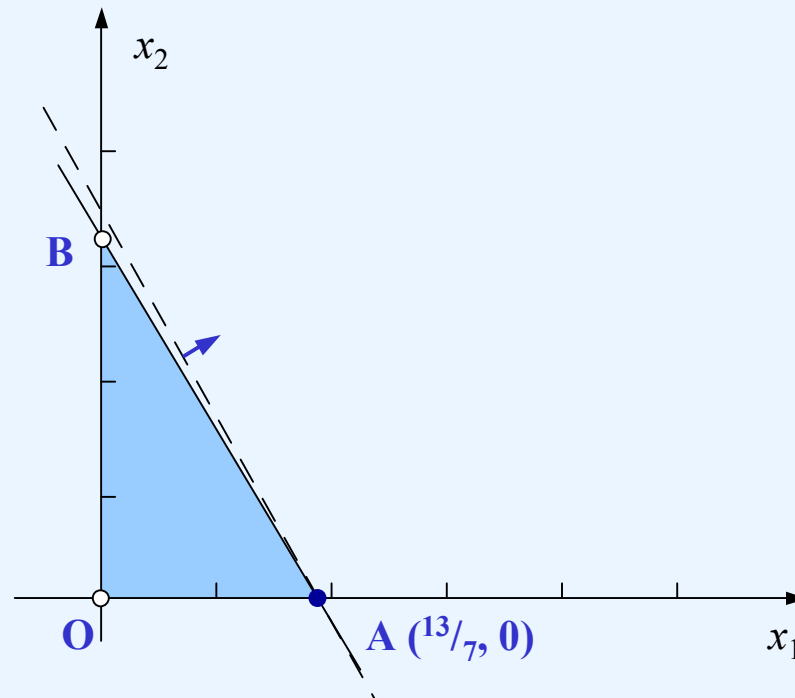
x_1, x_2 - целочисленные

Упрощенная задача

$$f(x_1, x_2) = 21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

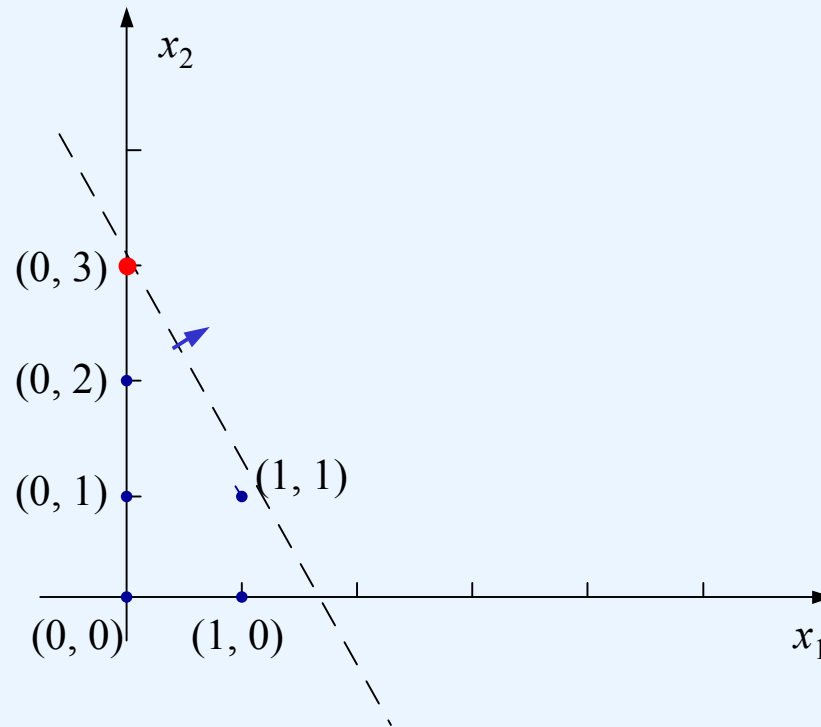
$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Округление решений (2)

Сравнение значений критериальной функции



$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & f(0, 1) &= 11, & f(0, 2) &= 22, \\ f(0, 3) &= 33, & f(1, 0) &= 21, & f(1, 1) &= 32, \end{aligned}$$

Чистая задача (1)

Пример 2.2

Исходная задача

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - целочисленные

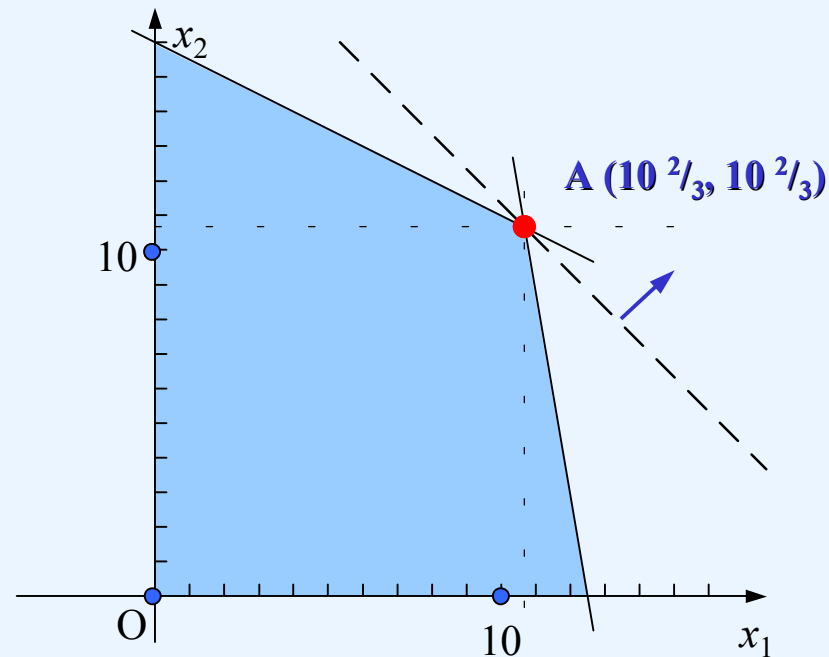
Упрощенная задача

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

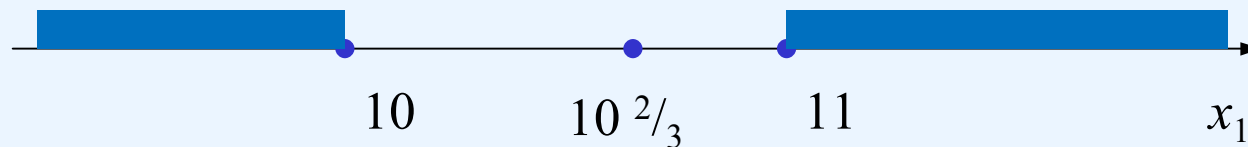


Чистая задача (2)

Декомпозиция относительно x_1

Задача 1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\leq 224 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Задача 2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\leq 224 \end{aligned}$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 – целочисленные

Задача 3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\leq 224 \end{aligned}$$

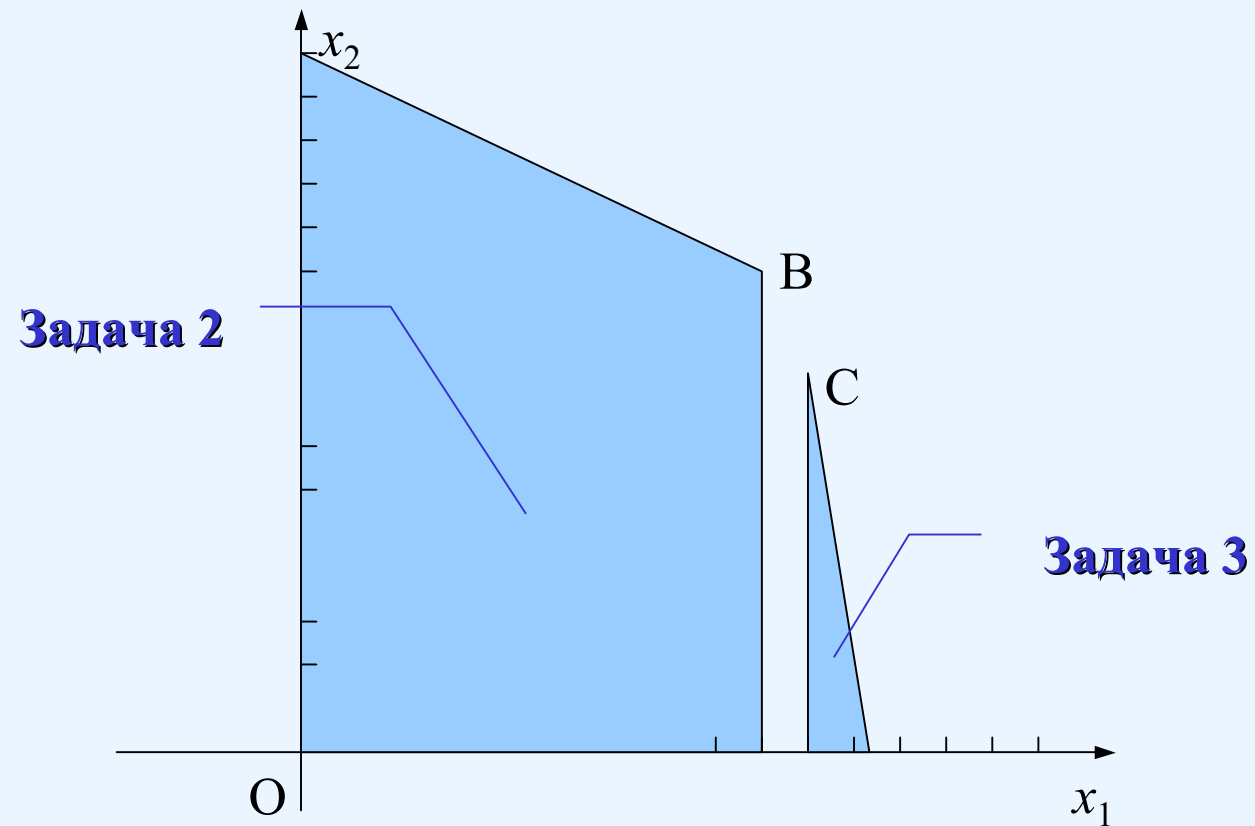
$$x_1 \geq 11$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 – целочисленные

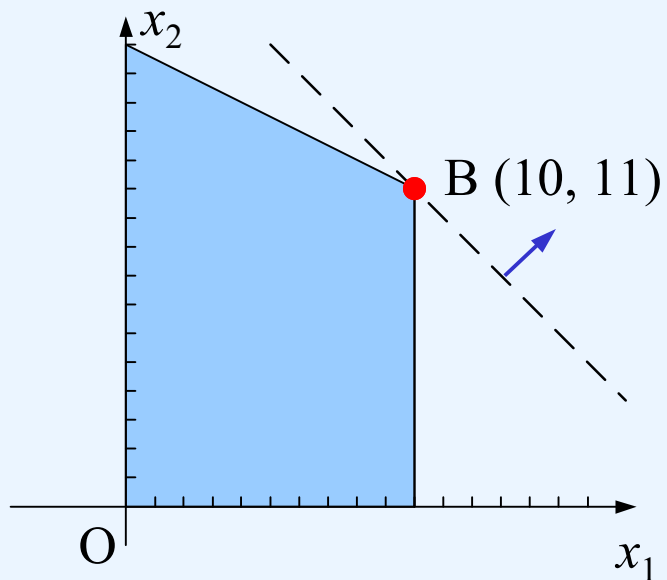
Чистая задача (3)

Множества допустимых решений задач 2 и 3

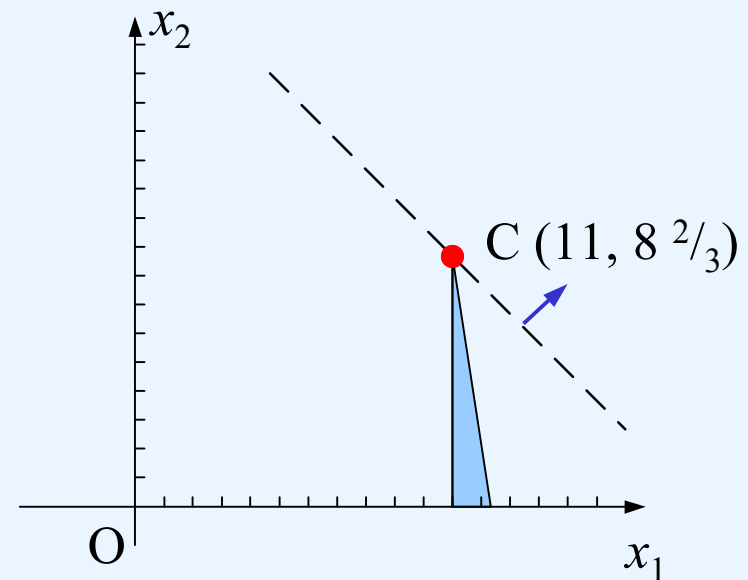


Чистая задача (4)

Решения задач 2 и 3



Задача 2



Задача 3

Чистая задача (5)

Декомпозиция относительно x_2

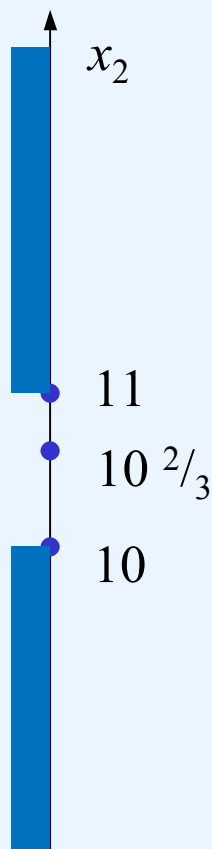
Задача 1'

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Задача 3'

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_2 \geq 11$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Задача 2'

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

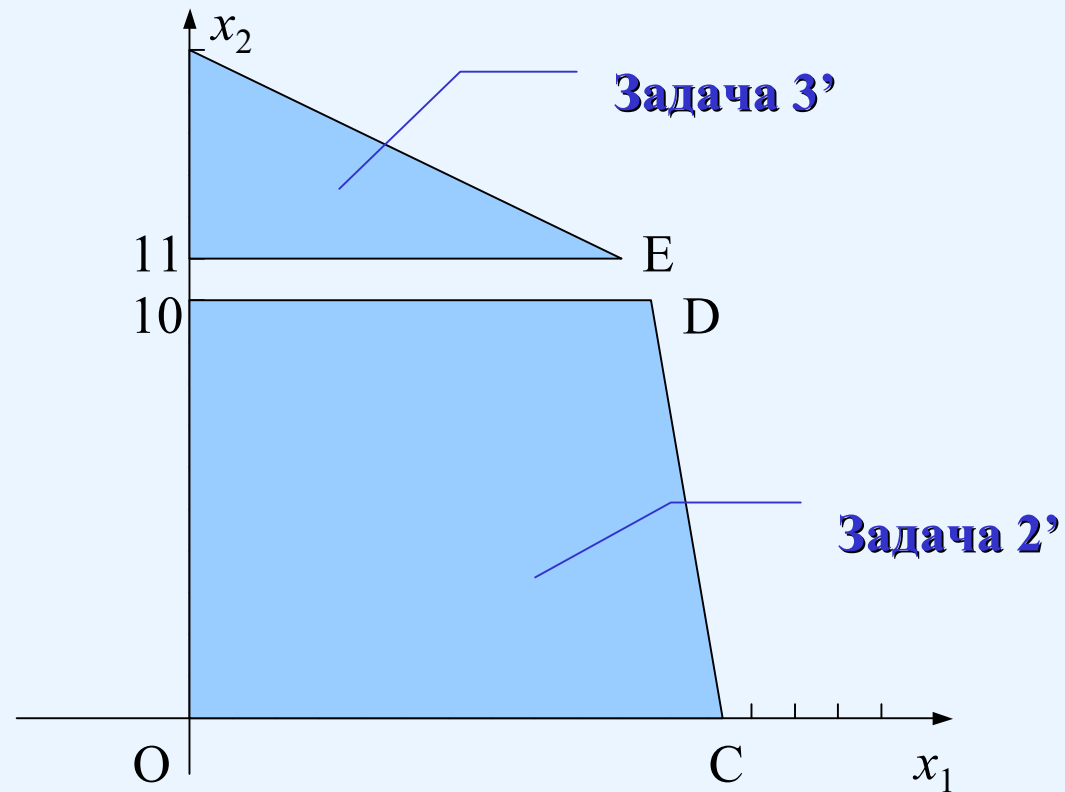
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

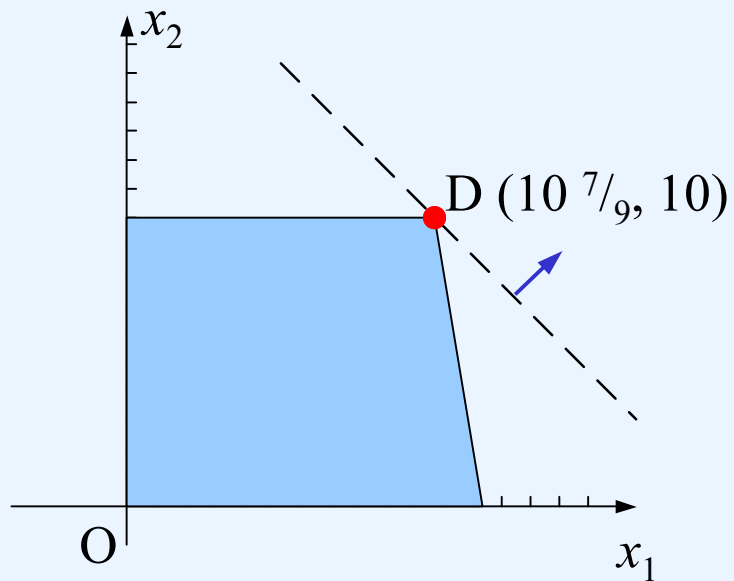
Чистая задача (6)

Множества допустимых решений задач 2' и 3'

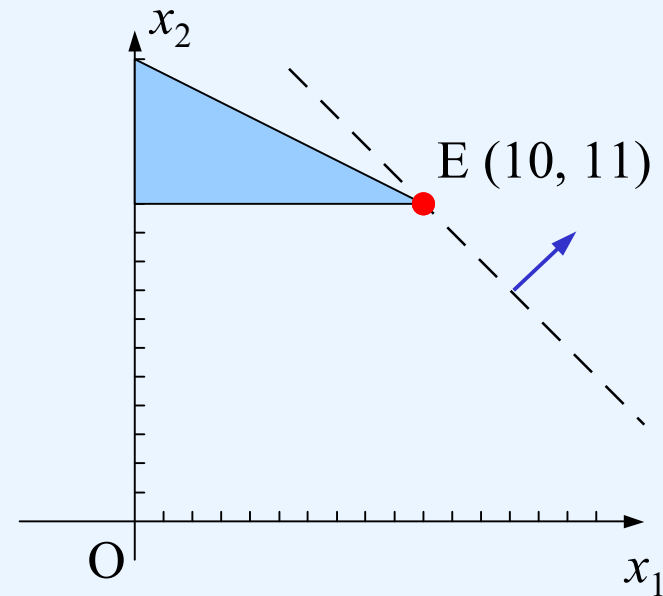


Чистая задача (7)

Решения задач 2 и 3



Задача 2'



Задача 3'

Смешанная задача (1)

Геометрическая интерпретация множества допустимых решений

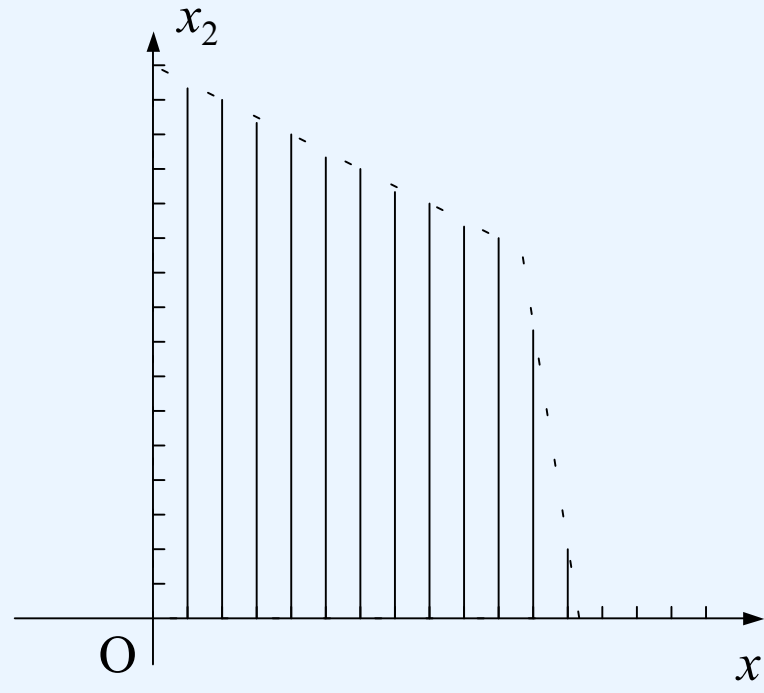
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 - целочисленные



Смешанная задача (2)

Геометрическая интерпретация множества допустимых решений

(продолжение)

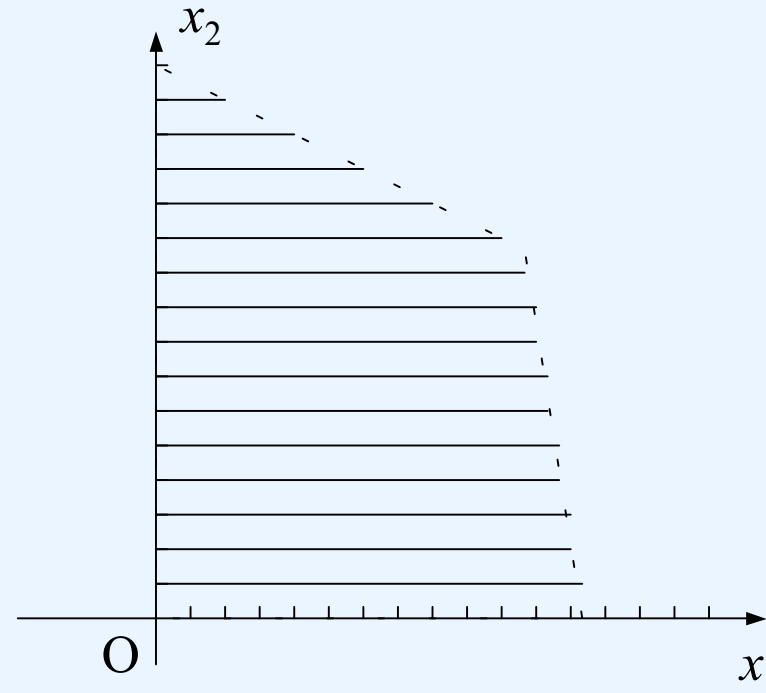
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_2 - целочисленные



Смешанная задача (3)

Пример 2.3

Исходная задача

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0 \\ 0 &\leq x_2 \leq 5 \\ 0 &\leq x_3 \leq 5\end{aligned}$$

x_2, x_3 - целочисленные

Упрощенная задача

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0 \\ 0 &\leq x_2 \leq 5 \\ 0 &\leq x_3 \leq 5\end{aligned}$$

Решение

$$x_1 = 2,667, x_2 = 2,667, x_3 = 0$$

$$f_{\text{opt}} = 16$$

Смешанная задача (4)

Итерация 1

Список рассматриваемых задач: 1

Задачи, исключаемые из списка: -

Список задач после модификации: 1

Декомпозируемые задачи: 1

Решение задачи 1: $x_1 = 2,667, x_2 = 2,667, x_3 = 0$

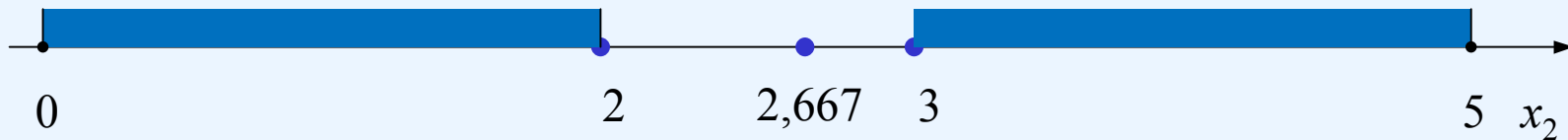
Декомпозиция относительно переменной: x_2

Смешанная задача (5)

Итерация 1 (продолжение)

Задача 1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 5 \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Задача 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad \mathbf{0 \leq x_2 \leq 2} \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Решение

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0,286 \quad f_{\text{opt}} = 15,714$$

Задача 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad \mathbf{3 \leq x_2 \leq 5} \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Задача противоречива

Смешанная задача (6)

Итерация 2

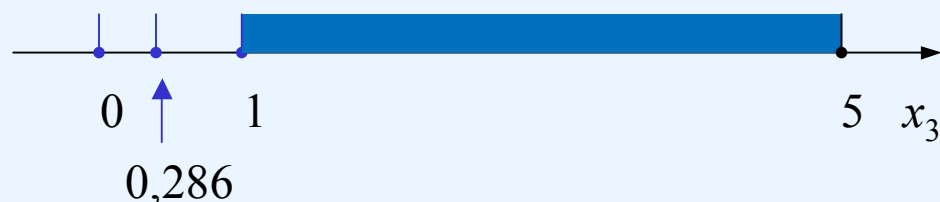
Список рассматриваемых задач:	1, 2, 3
Задачи, исключаемые из списка:	1 (декомпозирована), 3 (противоречива)
Список задач после модификации:	2
Декомпозируемые задачи:	2
Решение задачи 2:	$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0,286$
Декомпозиция относительно переменной:	x_3

Смешанная задача (7)

Итерация 2 (продолжение)

Задача 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Задача 4

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad \boxed{0 \leq x_3 \leq 0} \end{aligned}$$

Решение

$$x_1 = 2,33, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0$$

$$f_{\text{opt}} = 13$$

Задача 5

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad \boxed{1 \leq x_3 \leq 5} \end{aligned}$$

Решение

$$x_1 = 0,33, \quad x_2 = 0,33, \quad x_3 = 1$$

$$f_{\text{opt}} = 15$$

Смешанная задача (8)

Итерация 3

Список рассматриваемых задач: 2, 4, 5

Задачи, исключаемые из списка: 2 (декомпозирована)

Список задач после модификации: 4, 5

Декомпозируемые задачи: 5

Решение задачи 5: $x_1 = 0,33, x_2 = 0,33, x_3 = 1$

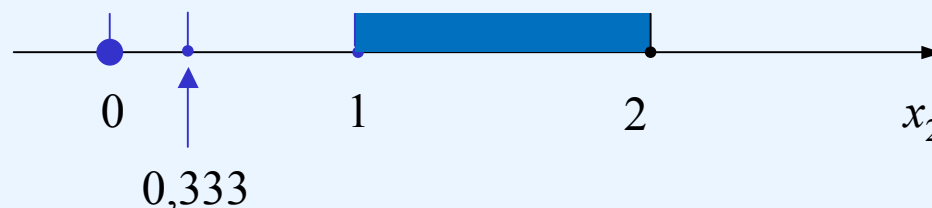
Декомпозиция относительно переменной: x_2

Смешанная задача (9)

Итерация 3 (продолжение)

Задача 5

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Задача 6

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad \boxed{0 \leq x_2 \leq 0} \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Решение

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1,143$$

$$f_{\text{opt}} = 14,857$$

Задача 7

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad \boxed{1 \leq x_2 \leq 2} \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Задача противоречива

Смешанная задача (10)

Итерация 4

Список рассматриваемых задач:	4, 5, 6, 7
Задачи, исключаемые из списка:	5 (декомпозирована), 7 (противоречива)
Список задач после модификации:	4, 6
Декомпозируемые задачи:	6
Решение задачи 6:	$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1,143$
Декомпозиция относительно переменной:	x_3

Смешанная задача (11)

Итерация 4 (продолжение)

Задача 6

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 0 \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Задача 8

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 0 \quad \boxed{1 \leq x_3 \leq 1} \end{aligned}$$

Решение

$$x_1 = 0,167, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$f_{\text{opt}} = 13,5$$

Задача 9

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 1 \leq x_2 \leq 2 \quad \boxed{2 \leq x_3 \leq 5} \end{aligned}$$

Задача противоречива

Смешанная задача (12)

Итерация 5

Список рассматриваемых задач: 4, 6, 8, 9

Задачи, исключаемые из списка: 6 (декомпозирована),
9 (противоречива)
4 ($f_{\text{opt}}^{(4)} = 13 < f_{\text{opt}}^{(8)} = 13,5$)

Список задач после модификации: 8

Решение задачи 8: $x_1 = 0,167, x_2 = 0, x_3 = 1$

Условия целочисленности выполнены. Полученное решение является оптимальным решением исходной задачи.

Смешанная задача (13)

Сводное описание решавшихся задач

Номер задачи	Интервалы изм-я		Оптимальное решение			Оптимальное значение цел. функции	Вновь генерируемые задачи
	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3		
1	[0, 5]	[0, 5]	2,667	2,667	0	16	2, 3
2	[0, 2]	[0, 5]	2	2	0,286	15,714	4, 5
3	[3, 5]	[0, 5]	Задача противоречива				
4	[0, 2]	[0, 0]	2,333	2	0	13	
5	[0, 2]	[1, 5]	0,333	0,333	1	15	6,7
6	[0, 0]	[1, 5]	0	0	1,143	14,857	8,9
7	[1, 2]	[1, 5]	Задача противоречива				
8	[0, 0]	[1, 1]	0,167	0	1	13,5	
9	[1, 2]	[2, 5]	Задача противоречива				

Правила применения метода ветвей и границ

- 1.** Упорядочение списка упрощенных задач.
- 2.** Проверка критерия оптимальности и в случае его удовлетворения – завершение вычислений.
- 3.** Выбор задачи для декомпозиции.
- 4.** Выбор переменной, относительно которой будет выполняться декомпозиция.
- 5.** Декомпозиция задачи, решение вновь сформированных задач и внесение их в список упрощенных задач.

Уравнение сечения (1)

Пример 2.4

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - целочисленные

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 32$$

$$18x_1 + 3x_2 + x_4 = 224$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$cx \rightarrow \max$		1	1	0	0	b
Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	0	1	0,5455	-0,0303	10,6667
x_1	1	1	0	-0,0909	0,0606	10,6667
$c_j - z_j$		0	0	-0,4545	-0,0303	21,3333

$$x_1 - 0,0909x_3 + 0,0606x_4 = 10,6667$$

Уравнение сечения (2)

Вывод формулы

$$[-0,0909] \leq -0,0909 \quad [-0,0909]x_3 \leq -0,0909x_3$$

$$[0,0606] \leq 0,0606 \quad [0,0606]x_4 \leq 0,0606x_4$$

$$[-0,0909]x_3 + [0,0606]x_4 \leq -0,0909x_3 + 0,0606x_4$$

$$x_1 + [-0,0909]x_3 + [0,0606]x_4 \leq x_1 - 0,0909x_3 + 0,0606x_4 = 10,6667$$

$$x_1 + [-0,0909]x_3 + [0,0606]x_4 \leq 10,6667$$

$$x_1 + [-0,0909]x_3 + [0,0606]x_4 \leq [10,6667]$$

$$x_1 + [-0,0909]x_3 + [0,0606]x_4 + x_5 = [10,6667]$$

$$([-0,0909] + 0,0909)x_3 + ([0,0606] - 0,0606)x_4 + x_5 = [10,6667] - 10,6667$$

$$-0,9091x_3 - 0,0606x_4 + x_5 = -0,6667$$

Уравнение сечения (3)

Расширение симплекс-таблицы

$cx \rightarrow \max$		1	1	0	0	0	b
Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	0	1	0,5455	-0,0303	0	10,6667
x_1	1	1	0	-0,0909	0,0606	0	10,6667
x_5	0	0	0	-0,9091	-0,0606	1	-0,6667
$c_j - z_j$		0	0	-0,4545	-0,0303	0	21,3333

Двойственный симплекс-метод

$cx \rightarrow \max$		1	1	0	0	0	b
Базис		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	0	1	1	0	-0,5	11
x_1	1	1	0	-1	0	1	10
x_4	1	0	0	15	1	-16	11
$c_j - z_j$		0	0	0	0	-0,5	21

Уравнение сечения (4)

Геометрическая интерпретация

$$-0,9091x_3 - 0,0606x_4 + x_5 = -0,6667$$

$$-\frac{10}{11}x_3 - \frac{2}{33}x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{10}{11}x_3 - \frac{2}{33}x_4 \leq -\frac{2}{3}$$

$$x_3 = 32 - x_1 - 2x_2$$

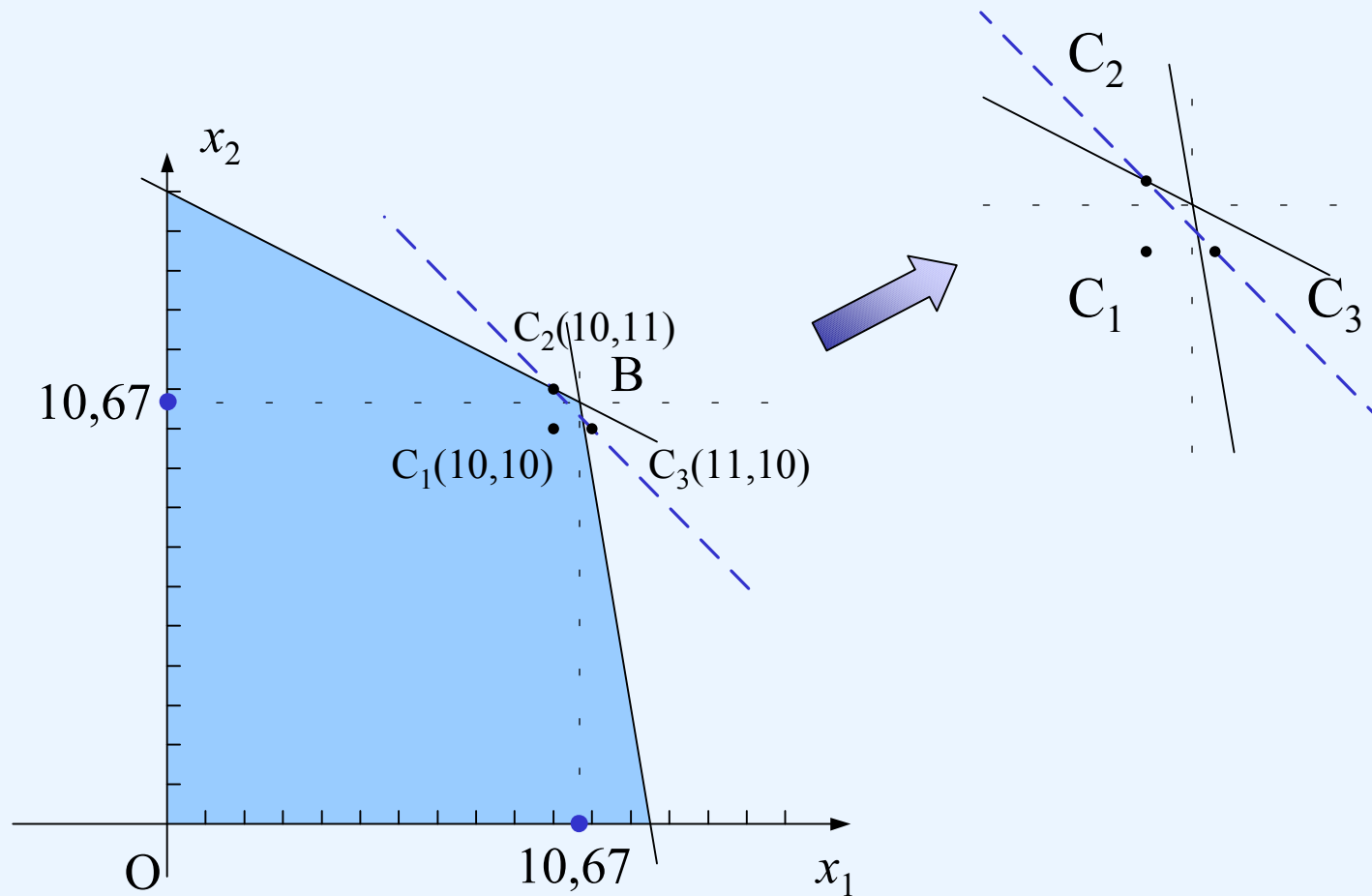
$$x_4 = 224 - 18x_1 - 3x_2$$

$$-\frac{10}{11}(32 - x_1 - 2x_2) - \frac{2}{33}(224 - 18x_1 - 3x_2) \leq -\frac{2}{3}$$

$$x_1 + x_2 \leq 21$$

Уравнение сечения (5)

Геометрическая интерпретация (продолжение)



Правила применения метода сечений

1. Решение упрощенной задачи.
2. Выбор уравнения, используемого для построения уравнения сечения (строка u).

3. Построение уравнения сечения:

$$\sum_{\text{небазисные переменные}} ([a_{ij}] - a_{ij}) x_j + x_{n+1} = [b_i] - b_i$$

4. Переход к новому допустимому базису.
5. Завершение процедуры.

Модернизация оборудования (1)

Пример 2.5

Время работы	Продукты			Максимальное время работы
	1	2	3	
Машина 1	1	3	2	30
Машина 2	2	2	6	20
Приведенный доход	1	2	3	

Машина	Вариант	Увеличение времени работы	Издержки
1	1	7	45
	2	16	70
2	1	10	28
	2	30	80

Совокупные издержки модернизации не могут превысить 125.

Необходимо провести такую модернизацию оборудования, которая максимизирует доход при возросших производственных мощностях.

Модернизация оборудования (2)

Цель

Цель заключается в такой модернизации оборудования, которая максимизирует доход от производства продуктов P_1 , P_2 , P_3 .

Решающие переменные

x_1 – планируемый объем производства изделия P_1 ,

x_2 – планируемый объем производства изделия P_2 ,

x_3 – планируемый объем производства изделия P_3 ,

Модернизация оборудования (3)

Дополнительные переменные

$$x_4 = \begin{cases} 1, & \text{если время работы машины 1 будет увеличено на 7 единиц} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_5 = \begin{cases} 1, & \text{если время работы машины 1 будет увеличено на 16 единиц} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_6 = \begin{cases} 1, & \text{если время работы машины 2 будет увеличено на 10 единиц} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_7 = \begin{cases} 1, & \text{если время работы машины 2 будет увеличено на 30 единиц} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Модернизация оборудования (4)

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

Ограничения

ограничение, связанное с временем работы машины 1:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 + 7x_4 + 16x_5$$

ограничение, связанное с временем работы машины 2:

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 20 + 10x_6 + 30x_7$$

Бюджетное ограничение:

$$45x_4 + 70x_5 + 28x_6 + 80x_7 \leq 125$$

Модернизация оборудования (5)

Ограничения (продолжение)

Ограничения, определяющие возможность одновременной реализации вариантов:

для машины 1:

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

для машины 2:

$$x_6 + x_7 \leq 1$$

условия неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

дополнительные условия:

$$x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8,7, \quad x_3 = 5,43, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1$$

Значение целевой функции равно 33,71

План издания (1)

Пример 2.6

Дисциплина	Вид рукописи	Прогноз объема продаж
Управление	новое издание	2500
Математика	переиздание	3000
Статистика	новое издание	2000
Математическая статистика	новое издание	1500
Описательная статистика	переиздание	1500
Финансы	новое издание	1800
Бухгалтерский учет	новое издание	3000
Бухгалтерский учет II	переиздание	3500
Английский язык	новое издание	5000
Французский язык	новое издание	3500

С рукописями могут работать редакторы:

Ежи 480 часов,
Кристина 320 часов,
Мария 350 часов.

План издания (2)

Пример 2.6 (продолжение)

Рукопись	Ежи	Кристина	Мария
Управление	220	300	-
Математика	130	190	-
Статистика	190	150	210
Математическая статистика	160	-	190
Описательная статистика	90	-	120
Финансы	-	220	100
Бухгалтерский учет	-	-	200
Бухгалтерский учет II	-	-	180
Английский язык	300	-	240
Французский язык	-	400	310

Могут быть изданы:

- не более двух рукописей по статистике,
- не более одной рукописи по бухгалтерскому учету,
- математика или управление,

Необходимо составить наилучший издательский план.

План издания (3)

Цель

Составление издательского плана, максимизирующего совокупный плановый объем реализации.

Решающие переменные

Переменная	Описание переменной		Значение
x_1	издание рукописи:	Управление	{0, 1}
x_2		Математика	{0, 1}
x_3		Статистика	{0, 1}
x_4		Математическая статистика	{0, 1}
x_5		Описательная статистика	{0, 1}
x_6		Финансы	{0, 1}
x_7		Бухгалтерский учет	{0, 1}
x_8		Бухгалтерский учет II	{0, 1}
x_9		Английский язык	{0, 1}
x_{10}		Французский язык	{0, 1}

План издания (4)

Целевая функция

$$25x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 15x_5 + 18x_6 + 30x_7 + 35x_8 + 50x_9 + 35x_{10} \rightarrow \max$$

Ограничения

Ежи - не более 480 часов:

$$220x_1 + 130x_2 + 190x_3 + 160x_4 + 90x_5 + 300x_9 \leq 480$$

Кристина - не более 320 часов:

$$300x_1 + 190x_2 + 150x_3 + 220x_6 + 400x_{10} \leq 320$$

Мария - не более 350 часов:

$$210x_3 + 190x_4 + 120x_5 + 100x_6 + 200x_7 + 180x_8 + 240x_9 + 310x_{10} \leq 350$$

Не более двух рукописей по статистике:

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

План издания (5)

Ограничения (продолжение)

План не может содержать более одной рукописи по бухгалтерскому учету:

$$x_7 + x_8 \leq 1$$

В плане должна присутствовать рукопись либо по управлению, либо по математике:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Дополнительные ограничения решающих переменных:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \in \{0, 1\}$$

Оптимальное решение

Решение 1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Решение 2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Оптимальное значение целевой функции равно 80.

Размещение комиссариатов полиции (1)

Пример 2.7

Предлагаемое размещение	Районы
A	1, 5, 7
B	1, 2, 5, 7
C	1, 3, 5
D	2, 4, 5
E	3, 4, 6
F	4, 5, 6
G	1, 5, 6, 7

Найти наименьшее количество размещаемых комиссариатов, зоны ответственности которых покрывают все семь районов.

Размещение комиссариатов полиции (2)

Цель

Определение наименьшего количества размещаемых комиссариатов, при котором любой район находился в зоне ответственности хотя бы одного комиссариата.

Решающие переменные

Переменная	Описание переменной		Значение
x_1	Предлагаемое размещение комиссариата:	A	{0, 1}
x_2		B	{0, 1}
x_3		C	{0, 1}
x_4		D	{0, 1}
x_5		E	{0, 1}
x_6		F	{0, 1}
x_7		G	{0, 1}

Размещение комиссариатов полиции (3)

Целевая функция

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \min$$

Ограничения

Район 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 \geq 1$$

Район 2:

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

Район 3:

$$x_3 + x_5 \geq 1$$

Район 4:

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

Размещение комиссариатов полиции (4)

Ограничения (продолжение)

Район 5:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$$

Район 6:

$$x_1 + x_2 + x_7 \geq 1$$

Дополнительные ограничения решающих переменных:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$

Оптимальное решение

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	0	0	1	0	0

Оптимальное значение целевой функции равно 2.

Резюме

Ключевые слова

- Целочисленное решение
- Принцип декомпозируемости
- Условия целочисленности
- Чистая задача целочисленного программирования
- Смешанная задача целочисленного программирования
- Упрощение задачи
- Метод округлений
- Метод ветвей и границ
- Метод сечений
- Двоичные переменные

Можно отдыхать!