Zadanie transportowe i problem komiwojażera

Tadeusz Trzaskalik

3.1. Wprowadzenie

Słowa kluczowe

Zbilansowane zadanie transportowe

Rozwiązanie początkowe

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów

Metoda VAM

Metoda kąta północno-zachodniego

Metoda potencjałów

Bilansowanie zadania niezbilansowanego

Fikcyjny dostawca

Fikcyjny odbiorca

Degeneracja w zadaniu transportowym

Problem komiwojażera

Algorytm genetyczny

Zadanie transportowe

Mamy ustaloną liczbę dostawców i odbiorców, znamy podaż każdego dostawcy i zapotrzebowanie każdego odbiorcy w ustalonym odcinku czasu oraz koszty jednostkowe transportu pomiędzy poszczególnymi dostawcami i odbiorcami, proporcjonalnie do ilości przewiezionego towaru. Należy znaleźć taki plan przewozów, który minimalizuje łączny ich koszt

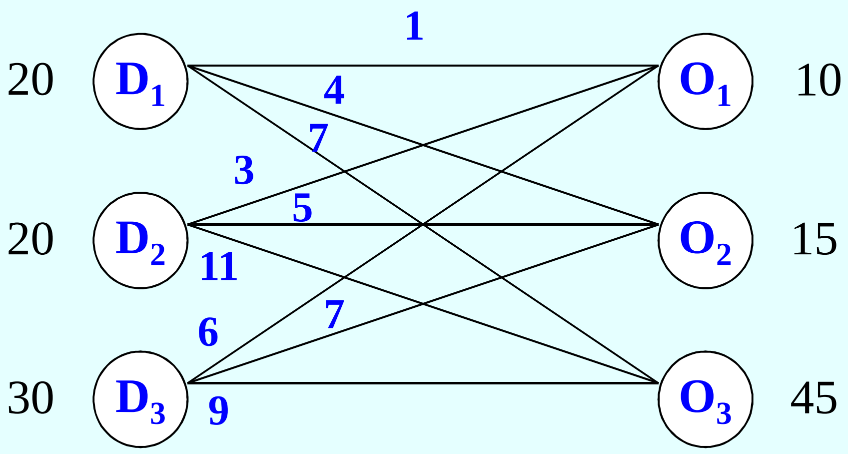
Problem komiwojażera

Mamy n miast, które należy odwiedzić w dowolnej kolejności, rozpoczynając podróż z miasta o numerze 1 i wracając do niego, przy czym każde z miast można odwiedzić dokładnie jeden raz. Znając wszystkie odległości miedzy miastami należy znaleźć trasę przejazdu o minimalnej długości.

3.2.1. Zadanie transportowe w ujęciu programowania liniowego (1/3)

Przykład 3.1

Miejscowość	O_1	O_2	O_3
D_1	1	4	7
D_2	3	5	11
D_3	6	7	9



3.2.1. Zadanie transportowe w ujęciu programowania liniowego (2/3)

Model matematyczny

Cel

Określenie planu przewozów, który minimalizuje łączny koszt.

Zmienne decyzyjne

x_{11} - planowany przewóz na trasie od D1 do O1
x_{12} - planowany przewóz na trasie od D1 do O2
x_{13} - planowany przewóz na trasie od D1 do O3

x_{21} - planowany przewóz na trasie od D2 do O1
x_{22} - planowany przewóz na trasie od D2 do O2
x_{23} - planowany przewóz na trasie od D2 do O3

x_{31} - planowany przewóz na trasie od D3 do O1
x_{32} - planowany przewóz na trasie od D3 do O2
x_{33} - planowany przewóz na trasie od D3 do O3

3.2.1. Zadanie transportowe w ujęciu programowania liniowego (3/3)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + \\ + 3x_{21} + 5x_{22} + 11x_{23} + 6x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} \rightarrow \min$$

Ograniczenia

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$

$$x_{11}, \ldots, x_{33} \geq 0$$

Rozwiązanie optymalne

$$x_{11} = 5 \quad x_{12} = 0 \quad x_{13} = 15$$
$$x_{21} = 5 \quad x_{22} = 15 \quad x_{23} = 0$$
$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 0 \quad x_{33} = 30$$

Minimalny koszt transportu wynosi 470.

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (1/7)

Postać macierzowa zadania prymalnego

c - wektor funkcji celu,

A - macierz współczynników,

b - wektor warunków ograniczających,

x - wektor zmiennych.

$$cx \rightarrow \min \qquad Ax = b \qquad x \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{c}x \rightarrow \max$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$\text{przy czym } \bar{c} = -c$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 & 5 & 11 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}$$

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (2/7)

Zasady tworzenia zadania dualnego

Zadanie prymalne (ZP)	**Zadanie dualne (ZD)**
$\bar{\mathbf{c}}\mathbf{x} \to \max$	$\mathbf{yb} \to \min$
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$\mathbf{yA} \geq \bar{\mathbf{c}}$
$\mathbf{x} \geq 0$	$\mathbf{y} - \text{dowolne}$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy, że $\mathbf{y} = [u, v]$

u – wektor zmiennych ZD odpowiadających dostawcom,
v – wektor zmiennych ZD odpowiadających odbiorcom.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (3/7)

Postać zadania dualnego

$$\mathbf{yb} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3] \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix} = 20u_1 + 20u_2 + 30u_3 + 10v_1 + 15v_2 + 45v_3 \rightarrow \min$$

$$\mathbf{yA} = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ -3 \\ -5 \\ -11 \\ -6 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{c}}$$

$$u_1 + v_1 \geq -1 \qquad u_1 + v_2 \geq -4 \qquad u_1 + v_3 \geq -7$$

$$u_2 + v_1 \geq -3 \qquad u_2 + v_2 \geq -5 \qquad u_2 + v_3 \geq -11$$

$$u_3 + v_1 \geq -6 \qquad u_3 + v_2 \geq -7 \qquad u_3 + v_3 \geq -9$$

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (4/7)

Zadanie prymalne i dualne – zestawienie

Zadanie prymalne

$$-x_{11} - 4x_{12} - 7x_{13} - 3x_{21} - 5x_{22} - 11x_{23} - 6x_{31} - 7x_{32} - 9x_{33} \to \max$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$

$$x_{11}, \ldots, x_{33} \geq 0$$

Zadanie dualne

$$20u_1 + 20u_2 + 30u_3 + 10v_1 + 15v_2 + 45v_3 \to \min$$

$$u_1 + v_1 + 1 \geq 0 \qquad u_1 + v_2 + 4 \geq 0 \qquad u_1 + v_3 + 7 \geq 0$$
$$u_2 + v_1 + 3 \geq 0 \qquad u_2 + v_2 + 5 \geq 0 \qquad u_2 + v_3 + 11 \geq 0$$
$$u_3 + v_1 + 6 \geq 0 \qquad u_3 + v_2 + 7 \geq 0 \qquad u_3 + v_3 + 9 \geq 0$$

$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ - dowolne

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (5/7)

Zależności między zmiennymi i warunkami ograniczającymi

x_{11} odpowiada warunkowi $u_1 + v_1 + 1 \geq 0$

x_{12} odpowiada warunkowi $u_1 + v_2 + 4 \geq 0$

x_{13} odpowiada warunkowi $u_1 + v_3 + 7 \geq 0$

x_{21} odpowiada warunkowi $u_2 + v_1 + 3 \geq 0$

x_{22} odpowiada warunkowi $u_2 + v_2 + 5 \geq 0$

x_{23} odpowiada warunkowi $u_2 + v_3 + 11 \geq 0$

x_{31} odpowiada warunkowi $u_3 + v_1 + 6 \geq 0$

x_{32} odpowiada warunkowi $u_3 + v_2 + 7 \geq 0$

x_{33} odpowiada warunkowi $u_3 + v_3 + 9 \geq 0$

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (6/7)

Twierdzenie o komplementarności

$$(yA - \overline{c}) = 0$$

czyli:

$$([u, v]\, A - \overline{c})\, x = 0$$

stąd:

$$(u_1 + v_1 + 1)\, x_{11} = 0 \qquad (u_1 + v_2 + 4)\, x_{12} = 0$$
$$(u_2 + v_1 + 3)\, x_{21} = 0 \qquad (u_2 + v_2 + 5)\, x_{22} = 0$$
$$(u_3 + v_1 + 6)\, x_{31} = 0 \qquad (u_3 + v_2 + 7)\, x_{32} = 0$$

$$(u_1 + v_3 + 7)\, x_{13} = 0$$
$$(u_2 + v_3 + 11)\, x_{23} = 0$$
$$(u_3 + v_3 + 9)\, x_{33} = 0$$

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (7/7)

Wnioski z twierdzenia o komplementarności

Jeżeli $x_{11} > 0$, to $u_1 + v_1 + 1 = 0$

Jeżeli $x_{12} > 0$, to $u_1 + v_2 + 4 = 0$

Jeżeli $x_{13} > 0$, to $u_1 + v_3 + 7 = 0$

Jeżeli $x_{21} > 0$, to $u_2 + v_1 + 3 = 0$

Jeżeli $x_{22} > 0$, to $u_2 + v_2 + 5 = 0$

Jeżeli $x_{23} > 0$, to $u_2 + v_3 + 11 = 0$

Jeżeli $x_{31} > 0$, to $u_3 + v_1 + 6 = 0$

Jeżeli $x_{32} > 0$, to $u_3 + v_2 + 7 = 0$

Jeżeli $x_{33} > 0$, to $u_3 + v_3 + 9 = 0$

3.2.3. Sformułowanie zadania transportowego (1/1)

Zbilansowane zadanie transportowe

Oznaczenia

m - liczba dostawców,
n - liczba odbiorców,
a_i - podaż i -tego dostawcy (i = 1,...,m),
b_j - popyt j -tego odbiorcy (j = 1,...,n),
x_{ij} - ilość towaru przewieziona od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
c_{ij} - koszt przewozu jednostki towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Sformułowanie zadania

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{dla } i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{dla } j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (1/7)

Definicje

Macierz przewozów **Macierz kosztów**

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie bazowe - zawiera $n + m - 1$ zmiennych bazowych

Węzły bazowe - odpowiadają zmiennym bazowym

Linia - węzły ustalonego wiersza lub ustalonej kolumny

Wielkość przewozu $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$

Podaż i popyt po modyfikacji

$$a'_i = a_i - x_{ij}$$

$$b'_j = b_j - x_{ij}$$

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (2/7)

Przebieg obliczeń

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10 *			~~20~~ 10
0			20
0			30
~~10~~ 0	15	45	Popyt

Macierz kosztów jednostkowych		
1 *	4	7
3	5	11
6	7	9

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (3/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10 *	0	~~10~~ 0
0			20
0			30
0	~~15~~ 5	45	Popyt

Macierz kosztów jednostkowych		
1 *	4 *	7
3	5	11
6	7	9

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (4/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10	0	0
0	5 *		~~20~~ 15
0	0		30
0	~~5~~ 0	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11	
6	7	9	

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (5/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10	0	0
0	5		15
0	0	30 *	~~30~~ 0
0	0	~~45~~ 15	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11	
6	7	9 *	

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (6/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10	0	0
0	5	15 *	~~15~~ 0
0	0	30	0
0	0	~~15~~ 0	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11 *	
6	7	9 *	

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (7/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10 *	10 *	0	0
0	5 *	15 *	0
0	0	30 *	0
0	0	0	Popyt

Macierz kosztów jednostkowych		
1 *	4 *	7
3	5 *	11 *
6	7	9 *

3.3.2. Metoda VAM (1/3)

Przebieg obliczeń

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10 *			~~20~~ 10
0			20
0			30
~~10~~ 0	15	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			Różnice w wierszach
1 *	4	7	3
3	5	11	2
6	7	9	1
2	1	2	Różnice w kolumnach

3.3.2. Metoda VAM (2/3)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	0		10
0	15 *		~~20~~ 5
0	0		30
0	~~15~~ 0	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			Różnice w wierszach
1 *	4	7	3
3	5 *	11	6
6	7	9	2
-	1	2	Różnice w kolumnach

3.3.2. Metoda VAM (3/3)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	0	10 *	~~10~~ 0
0	15	5 *	~~5~~ 0
0	0	30 *	~~30~~ 0
0	0	~~45~~ 0	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			Różnice w wierszach
1 *	4	7 *	-
3	5 *	11 *	-
6	7	9 *	-
-	-	-	Różnice w kolumnach

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.3. Metoda kąta północno-zachodniego (1/1)

Przebieg obliczeń

Rozwiązanie początkowe (metoda kąta północno-zachodniego)			Podaż
10 *	10 *	0	0
0	5 *	15 *	0
0	0	30 *	0
0	0	0	Popyt

Szkic algorytmu

1. Znaleźć pierwsze, dopuszczalne rozwiązanie bazowe.
2. Ocenić, czy jest ono optymalne, czy też nie.
3. Jeżeli nie jest optymalne, wyznaczyć nowe sąsiednie rozwiązanie bazowe. W tym celu należy:
   - wybrać zmienną wchodzącą do bazy,
   - wybrać zmienną usuwaną z bazy,
   - znaleźć rozwiązanie bazowe odpowiadające bazie sąsiedniej
4. Jeżeli otrzymane rozwiązanie jest optymalne, zakończyć postępowanie.

3.4.1. Badanie optymalności rozwiązania (1/3)

Konstrukcja układu równań

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu)			Podaż
10 *	10 *	0	0
0	5 *	15 *	0
0	0	30 *	0
0	0	0	Popyt

Ponieważ $x_{11} > 0$, więc $u_1 + v_1 + 1 = 0$

Ponieważ $x_{12} > 0$, więc $u_1 + v_2 + 4 = 0$

Ponieważ $x_{22} > 0$, więc $u_2 + v_2 + 5 = 0$

Ponieważ $x_{23} > 0$, więc $u_2 + v_3 + 11 = 0$

Ponieważ $x_{33} > 0$, więc $u_3 + v_3 + 9 = 0$

$u_1 = a, \quad v_1 = -1 - a$
$u_2 = -1 + a, \quad v_2 = -4 - a$
$u_3 = 1 + a, \quad v_3 = -10 - a$

3.4.1. Badanie optymalności rozwiązania (2/3)

Wskaźniki optymalności

$$c'_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$u_1 = a,\quad v_1 = -1 - a$

$u_2 = -1 + a,\quad v_2 = -4 - a$

$u_3 = 1 + a,\quad v_3 = -10 - a$

$c'_{11} = u_1 + v_1 + 1 = a + (-1 - a) + 1 = 0$

$c'_{12} = u_1 + v_2 + 4 = a + (-4 - a) + 4 = 0$

$c'_{13} = u_1 + v_3 + 7 = a + (-10 - a) + 7 = -3$

$c'_{21} = u_2 + v_1 + 3 = (-1 + a) + (-1 - a) + 3 = 1$

$c'_{22} = u_2 + v_2 + 5 = (-1 + a) + (-4 - a) + 5 = 0$

$c'_{23} = u_2 + v_3 + 11 = (-1 + a) + (-10 - a) + 11 = 0$

$c'_{31} = u_3 + v_1 + 6 = (1 + a) + (-1 - a) + 6 = 6$

$c'_{32} = u_3 + v_2 + 7 = (1 + a) + (-4 - a) + 7 = 4$

$c'_{33} = u_3 + v_3 + 9 = (1 + a) + (-10 - a) + 9 = 0$

$$\mathbf{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.1. Badanie optymalności rozwiązania (3/3)

Kryterium optymalności

Jeżeli wartości wszystkich wskaźników optymalności są dodatnie lub równe zeru, wtedy rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne. Jeżeli choć jeden ze wskaźników optymalności jest ujemny, wtedy istnieje możliwość poprawy tego rozwiązania.

$$\mathbf{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Istnieje możliwość poprawy rozwiązania początkowego.

3.4.2. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy (1/1)

Kryterium wejścia

W macierzy wskaźników optymalności znajdujemy element najmniejszy. Odpowiadającą mu zmienną wprowadzamy do nowej bazy. Jeżeli najmniejszej wartości wskaźnika optymalności odpowiada więcej niż jedna zmienna, to do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najmniejszym numerze wiersza, a gdy numer wiersza dla dwóch zmiennych jest taki sam, wówczas do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najmniejszym numerze kolumny.

$$\mathbf{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Do bazy wprowadzamy zmienną x_{13}.

3.4.3. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (1/1)

Kryterium wyjścia

10	10	0
0	5	15
0	0	45

10	9 −	1 +
0	6 +	14 −
0	0	45

Półcykl dodatni: węzły (2, 2), (1, 3)

Półcykl ujemny: węzły (1, 2), (2, 3)

Bazę opuszcza ta zmienna należąca do półcyklu ujemnego, dla której wielkość przewozu w dotychczasowym rozwiązaniu jest minimalna.

W przypadku niejednoznaczności postępujemy tak samo, jak w przypadku wystąpienia niejednoznaczności w kryterium wejścia.

3.4.4. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego (1/1)

Wyznaczenie cyklu

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu)			Wartość funkcji celu
10	10^{-}	0^{+}	**510**
0	5^{+}	15^{-}	
0	0	30	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne (iteracja 1)			Wartość funkcji celu
10 *	0	10 *	**480**
0	15 *	5 *	
0	0	30 *	

3.4.5. Kolejne iteracje (1/6)

Iteracja 2

Macierz wskaźników optymalności		
0 *	0	–3 *
1	0 *	0 *
6	4	0 *

Układ równań:

$$u_1 + v_1 = 0$$
$$u_1 + v_3 - 3 = 0$$
$$u_2 + v_2 = 0$$
$$u_2 + v_3 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 0$$

Rozwiązanie:

$u_1 = 0,\quad v_1 = 0,$
$u_2 = -3,\quad v_2 = 3,$
$u_3 = -3,\quad v_3 = 3.$

3.4.5. Kolejne iteracje (2/6)

Iteracja 2 (c.d.)

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
0 *	0 *	–3	0
1	0 *	0 *	–3
6	4	0 *	–3
0	3	3	v_j

Nowa macierz wskaźników optymalności		
0 *	3	0 *
–2	0 *	0 *
3	4	0 *

3.4.5. Kolejne iteracje (3/6)

Iteracja 2 (c.d.)

Rozwiązanie dopuszczalne			Podaż
10^{-}	0	10^{+}	20
0^{+}	15	5^{-}	20
0	0	30	30
10	15	45	Popyt

Macierz wskaźników optymalności		
0 *	3	0 *
–2	0 *	0 *
3	4	0 *

3.4.5. Kolejne iteracje (4/6)

Iteracja 2 (c.d.)

Dotychczasowe rozwiązanie dopuszczalne			Podaż
10^{-}	0	10^{+}	20
0^{+}	15	5^{-}	20
0	0	30	30
10	15	45	Popyt

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 2)
5 *	0	15 *	**470**
5 *	15 *	0	
0	0	30 *	

3.4.5. Kolejne iteracje (5/6)

Iteracja 3

Macierz wskaźników optymalności		
0 *	3	0 *
–2 *	0 *	0
3	4	0 *

Układ równań

$$u_1 + v_1 = 0$$
$$u_1 + v_3 = 0$$
$$u_2 + v_1 - 2 = 0$$
$$u_2 + v_2 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 0$$

Rozwiązanie:

$u_1 = 0, \quad v_1 = 0,$
$u_2 = 2, \quad v_2 = -2,$
$u_3 = 0, \quad v_3 = 0.$

3.4.5. Kolejne iteracje (6/6)

Iteracja 3 (c.d.)

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
0 *	3	0 *	0
–2	0 *	0 *	2
3	4	0 *	0
0	–2	0	v_j

Nowa macierz wskaźników optymalności		
0 *	1	0 *
0 *	0 *	2
3	2	0 *

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (1/9)

Przykład 3.2

a_1=10, a_2=20, a_3=30

b_1=10, b_2=20, b_3=30

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie początkowe (metoda kąta północno-zachodniego)			Podaż
10 *	0 *	0	~~10~~ 0
0	20 *	0 *	~~20~~ 0
0	0	30 *	~~30~~ 0
~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ 0	Popyt

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (2/9)

Rozwiązania początkowe

10*	0 *	0
0	20*	0
0	0 *	30*

10*	0	0
0 *	20 *	0
0	0 *	30*

10*	0	0
0 *	20*	0 *
0	0	30*

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (3/9)

Iteracja 1

$$u_1 + v_1 + 7 = 0$$
$$u_1 + v_2 + 4 = 0$$
$$u_2 + v_2 + 6 = 0$$
$$u_2 + v_3 + 1 = 0$$
$$u_3 + v_3 + 5 = 0$$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -7$$
$$u_2 = -2, \quad v_2 = -4$$
$$u_3 = -6, \quad v_3 = 1$$

Macierz kosztów jednostkowych			u_i
7	4	4	0
3	6	1	–2
2	3	5	–6
–7	–4	1	v_j

Macierz wskaźników optymalności		
0	0	5
–6	0	0
–11	–7	0

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (4/9)

Iteracja 1 (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Początkowa wartość funkcji celu
10^{-}	0^{+}	0	**340**
0	20^{-}	0^{+}	
0^{+}	0	30^{-}	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 1)
0	10 *	0	**230**
0	10 *	10 *	
10 *	0	20 *	

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (5/9)

Iteracja 2

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
0 *	0 *	5	0
–6	0 *	0 *	0
–11	–7	0 *	0
11	0	0	v_j

Nowa macierz wskaźników optymalności		
11	0 *	5
5	0 *	0 *
0 *	–7	0 *

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (6/9)

Iteracja 2 (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Początkowa wartość funkcji celu
0	10	0	
0	10–	10+	**230**
10	0+	20–	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 2)
0	10 *	0	
0	0	20 *	**160**
10 *	10 *	10 *	

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (7/9)

Iteracja 3

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
11	0 *	5	0
5	0	0 *	7
0 *	–7 *	0 *	7
–7	0	–7	v_j
Nowa macierz wskaźników optymalności			
4	0 *	–2	
5	7	0 *	
0 *	0 *	0 *	

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (8/9)

Iteracja 3 (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Początkowa wartość funkcji celu
0	10^{-}	0^{+}	
0	0	20	**160**
10	10^{+}	10^{-}	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 3)
0	0	20 *	
0	0	20 *	**140**
10 *	20 *	0 *	

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (9/9)

Iteracja 4

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
4	0 *	–2	0
5	7	0 *	–2
0 *	0 *	0 *	–2
2	2	2	v_j

Nowa macierz wskaźników optymalności		
6	2	0 *
5	7	0 *
0 *	0 *	0 *

3.4.7. Reguły postępowania w rozwiązywaniu zadania transportowego (1/1)

Algorytm

1. Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego.
2. Wyznaczenie wskaźników optymalności.
3. Badanie optymalności rozwiązania.
4. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy.
5. Konstrukcja cyklu.
6. Wybór zmiennej opuszczającej bazę.
7. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego.

3.5.1. Podaż przewyższa popyt (1/2)

Fikcyjny odbiorca

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$a_1 = 25,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30$$

$$b_1 = 10,\ b_2 = 15,\ b_3 = 45$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$b_4 = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = (25 + 20 + 30) - (10 + 15 + 45) = 5$$

3.5.1. Podaż przewyższa popyt (2/2)

Fikcyjny odbiorca (c.d.)

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu)				Podaż
10 *	10 *	0	5 *	25
0	5 *	15 *	0	20
0	0	30 *	0	30
10	15	45	5	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych				Wartość funkcji celu **510**
1	4	7	0	
3	5	11	0	
6	7	9	0	

Rozwiązanie optymalne

$$x_{11} = 10 \quad x_{12} = 0 \quad x_{13} = 15 \quad x_{14} = 0$$
$$x_{21} = 0 \quad x_{22} = 15 \quad x_{23} = 0 \quad x_{24} = 5$$
$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 0 \quad x_{33} = 30 \quad x_{34} = 0$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 460.

3.5.2. Popyt przewyższa podaż (1/2)

Fikcyjny dostawca

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$a_1 = 20,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30$$

$$b_1 = 10,\ b_2 = 15,\ b_3 = 50$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a_4 = (b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) = (10 + 15 + 50) - (20 + 20 + 30) = 5$$

3.5.2. Popyt przewyższa podaż (2/2)

Fikcyjny dostawca (c.d.)

Rozwiązanie początkowe

Rozwiązanie początkowe (metoda VAM)			Podaż
10 *	0	10 *	20
0	15 *	5 *	20
0	0	30 *	30
0	0	5 *	5
10	15	50	Popyt
Nowa macierz wskaźników optymalności			
1	4	7	
3	5	11	
6	7	9	
0	0	0	

Rozwiązanie optymalne

$$
\begin{array}{lll}
x_{11} = 10 & x_{12} = 0 & x_{13} = 10 \\
x_{21} = 0 & x_{22} = 15 & x_{23} = 5 \\
x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = 30 \\
x_{41} = 0 & x_{42} = 0 & x_{43} = 5
\end{array}
$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 470.

3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (1/4)

Przykład 3.5

Komiwojażer wyjeżdża z miasta 1 i ma odwiedzić miasta o numerach 2, 3, 4 i 5, Do każdego z nich przyjeżdża dokładnie jeden raz, po czym wraca do miasta 1. Szukamy trasy najkrótszej.

Miasto	1	2	3	4	5
1	0	10	12	15	11
2	10	0	19	10	11
3	12	19	0	10	12
4	15	10	10	0	20
5	11	11	12	20	0

3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (2/4)

Modelowanie trasy przejazdu

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ gdy planowany jest przejazd na trasie od i do j} \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Trasa przejazdu 1-2-3-4-5-1

$x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{51} = 1$, pozostałe $x_{ij} = 0$

Miasto	1	2	3	4	5
1	-	1	0	0	0
2	0	-	1	0	0
3	0	0	-	1	0
4	0	0	0	-	1
5	1	0	0	0	-

3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (3/4)

Model transportowy

Zadanie o 5 dostawcach i 5 odbiorcach

Miasto	1	2	3	4	5	Podaż
1	100	10	12	15	11	1
2	10	100	19	10	11	1
3	12	19	100	10	12	1
4	15	10	10	100	20	1
5	11	11	12	20	100	1
	1	1	1	1	1	Popyt

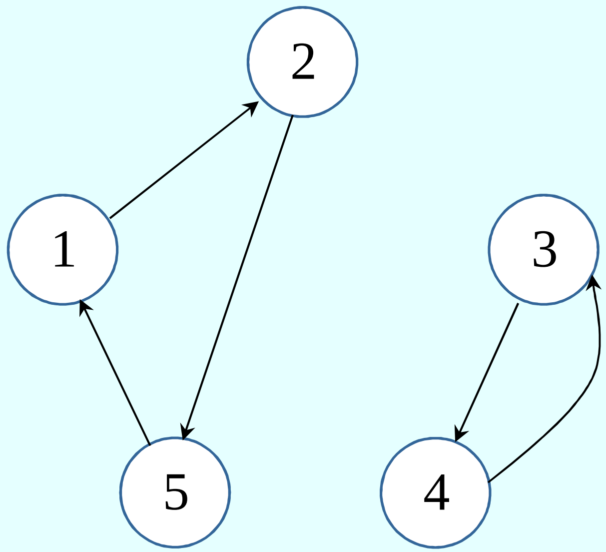
3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (4/4)

Model transportowy (c.d.)

Rozwiązanie:

$x_{12} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{51} = 1$; pozostałe zmienne są równe 0.

Optymalna wartość funkcji celu wynosi 52.



3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (1/5)

Model matematyczny

Funkcja celu:

$f(x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{21},x_{23},x_{24},x_{25},x_{31},x_{32},x_{34},x_{35},x_{41},x_{42},x_{43},x_{45},x_{51},x_{52},x_{53},x_{54}) =$

$= 10x_{12} + 12x_{13} + 15x_{14} + 11x_{15} + 10x_{21} + 19x_{23} + 10x_{24} + 11x_{25} + 12x_{31} + 19x_{32} +$

$+ 10x_{34} + 12x_{35} + 15x_{41} + 10x_{42} + 10x_{43} + 20x_{45} + 11x_{51} + 11x_{52} + 12x_{53} + 20x_{54}$

$\rightarrow \min$

Warunki ograniczające

jednokrotny wyjazd z każdego miasta (3.11) – (3-15)

jednokrotny wjazd do każdego miasta (3.16) – (3.20)

eliminacja cyklów między miastami (3.21) – (3.30)

wszystkie zmienne x_{ij} są zmiennymi binarnymi

$$x_{ij} \in \{0;1\} \text{ dla } i,j = 1, \ldots ,5. \qquad (3.31)$$

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (2/5)

Jednokrotny wyjazd z miasta i

Miasto 1

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \qquad (3.11)$$

Miasto 2

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \qquad (3.12)$$

Miasto 3

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \qquad (3.13)$$

Miasto 4

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \qquad (3.14)$$

Miasto 5

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \qquad (3.15)$$

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (3/5)

Jednokrotny wjazd do miasta i

Miasto 1

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \qquad (3.16)$$

Miasto 2

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \qquad (3.17)$$

Miasto 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \qquad (3.18)$$

Miasto 4

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \qquad (3.19)$$

Miasto 5

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \qquad (3.20)$$

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (4/5)

Eliminacja cyklów pomiędzy miastami

Miasta 1 i 2:	$x_{12} + x_{21} \le 1$	(3.21)
Miasta 1 i 3:	$x_{13} + x_{31} \le 1$	(3.22)
Miasta 1 i 4:	$x_{14} + x_{41} \le 1$	(3.23)
Miasta 1 i 5:	$x_{15} + x_{51} \le 1$	(3.24)
Miasta 2 i 3:	$x_{23} + x_{32} \le 1$	(3.25)
Miasta 2 i 4	$x_{24} + x_{42} \le 1$	(3.26)
Miasta 2 i 5	$x_{25} + x_{52} \le 1$	(3.27)
Miasta 3 i 4	$x_{34} + x_{43} \le 1$	(3.28)
Miasta 3 i 5	$x_{35} + x_{53} \le 1$	(3.29)
Miasta 4 i 5	$x_{45} + x_{54} \le 1$	(3.30)

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (5/5)

Rozwiązanie optymalne

$x_{15} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, pozostałe zmiennych $x_{ij} = 0$.

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 53.

Zapis tabelaryczny

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0

3.6.3. Mechanizmy działania algorytmu genetycznego (1/1)

Podstawowe pojęcia

populacja

populacja początkowa

chromosom

gen

funkcja przystosowania

selekcja

krzyżowanie

mutacja

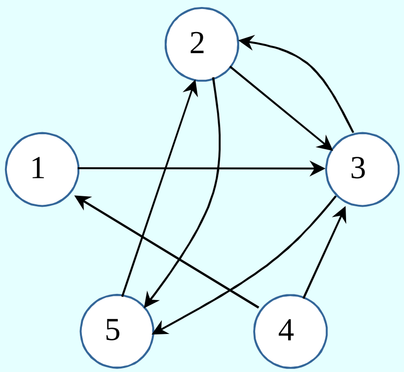
warunek końca algorytmu

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (1/9)

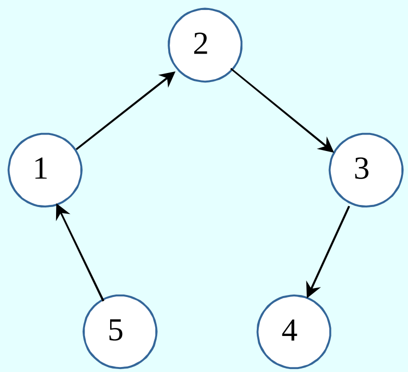
Populacja początkowa

Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{11}	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
C_{12}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{13}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
C_{14}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C_{15}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_{16}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

C_{11}

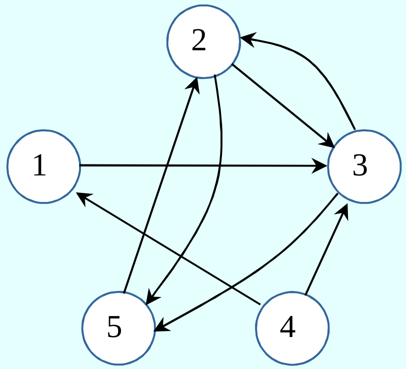


C_{12}

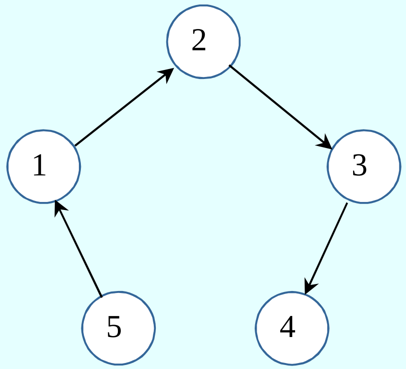


3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (2/9)

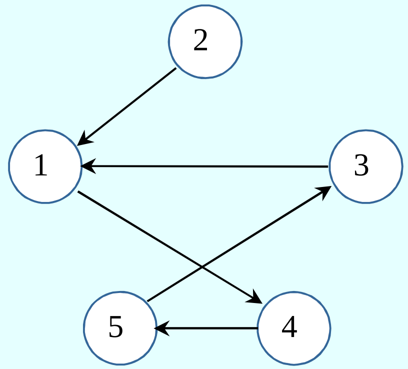
Populacja początkowa (c.d.)



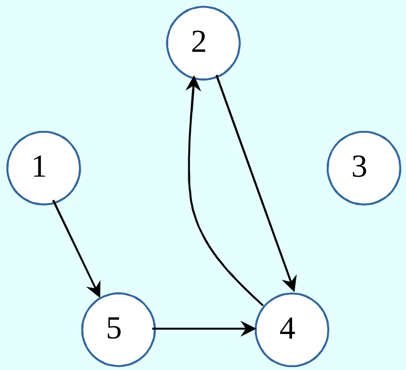
C_{11}



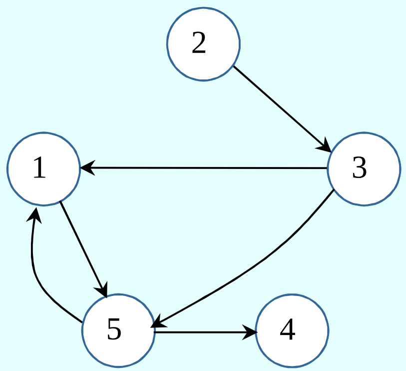
C_{12}



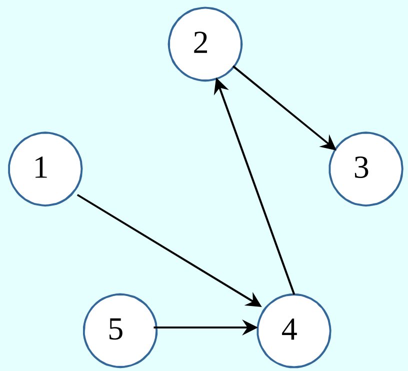
C_{13}



C_{14}



C_{15}



C_{16}

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (3/9)

Wartości funkcji przystosowania

Chromosom	Numery naruszonych ograniczeń	Długość Odcinków	Kara	Wartość funkcji przystosowania
C_{11}	(3.12), (3.13), (3.14), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.25), (3.27)	109	1000	1109
C_{12}	(3.14), (3.20)	50	200	250
C_{13}	(3.16), (3.17)	69	200	269
C_{14}	(3.13), (3.16), (3.18), (3.19), (3.26)	51	500	551
C_{15}	(3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.20), (3.24)	85	700	785
C_{16}	(3.13), (3.16), (3.19), (3.20)	64	400	464
			Suma	3428

Średnia wartość funkcji przystosowania wynosi 3428 : 6 = 571,33.

Najlepsza wartość funkcji przystosowania w tej populacji wynosi 250.

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (4/9)

Prawdopodobieństwo selekcji

Chromosom	Wartość funkcji przystosowania	Odwrotność wartości funkcji przystosowania	Suma odwrotności funkcji przystosowania	Prawdopodobieństwo selekcji
C_{11}	1109	0,0009017	0,0138631	0,065044 ≈ 7%
C_{12}	250	0,0040000		0,288536 ≈ 29%
C_{13}	269	0,0037175		0,268156 ≈ 27%
C_{14}	551	0,0018149		0,130915 ≈ 13%
C_{15}	785	0,0012739		0,091890 ≈ 9%
C_{16}	464	0,0021552		0,155461 ≈ 15%

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (5/9)

Selekcja i krzyżowanie

Wylosowane chromosomy

Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	PK
C_{15}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	**11**
C_{16}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
C_{12}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	**3**
C_{12}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
C_{14}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	**17**
C_{13}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	

Nowa populacja po krzyżowaniu

Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{21}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C_{22}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_{23}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{24}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{25}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
C_{26}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (6/9)

Mutacja

Prawdopodobieństwo mutacji = 1/100.

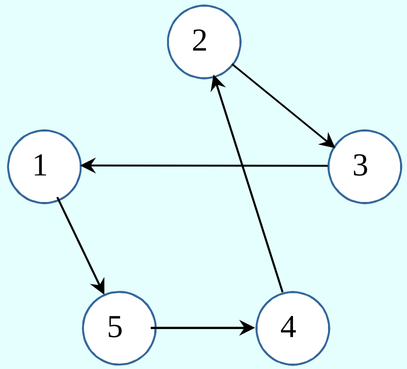
Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{24}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{24}’	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (7/9)

Populacja początkowa dla następnej iteracji

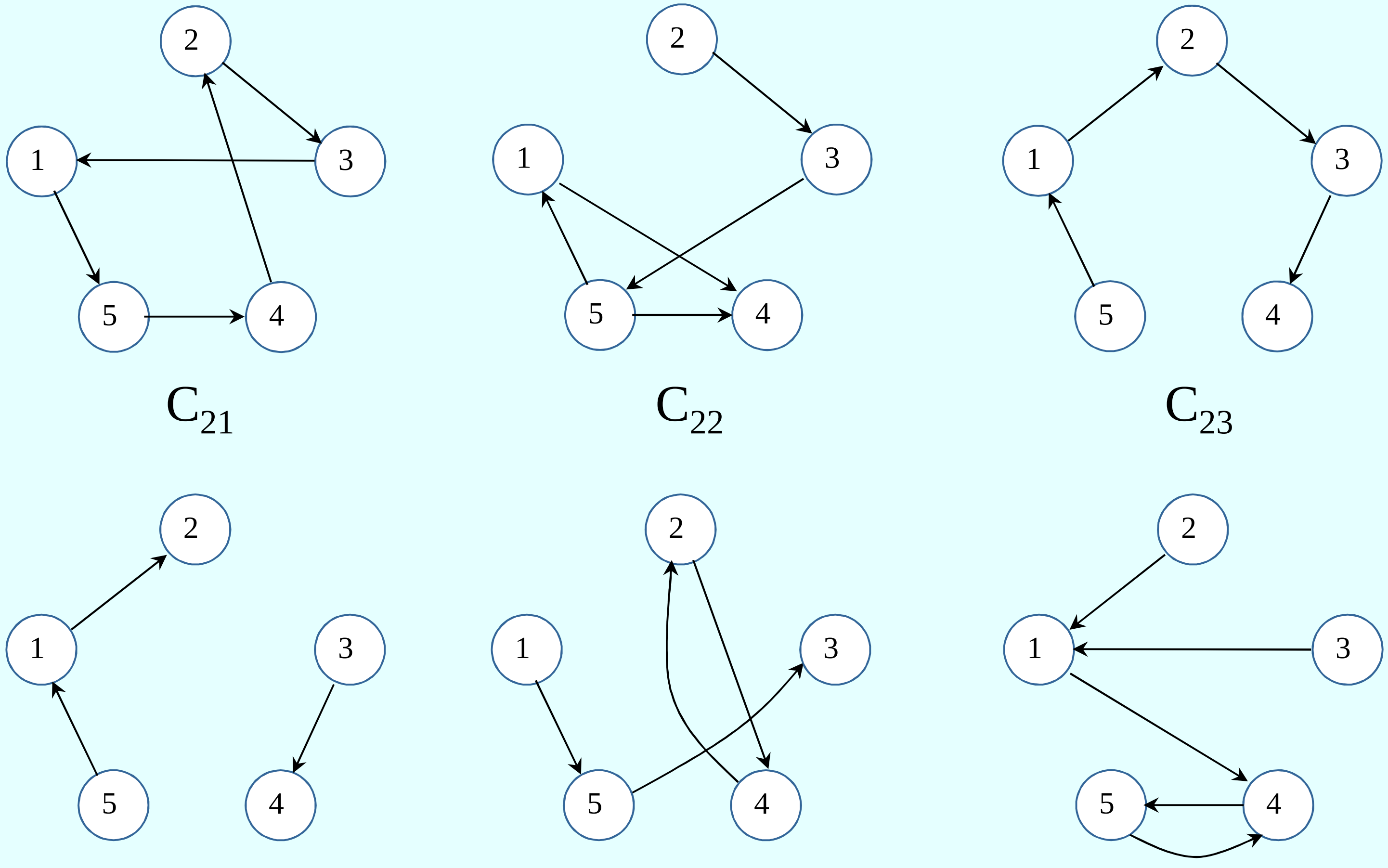
Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{21}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C_{22}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_{23}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{24}’	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{25}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
C_{26}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

C_{21}



3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (8/9)

Populacja początkowa dla następnej iteracji (c.d.)



3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (9/9)

Wartości funkcji przystawania

Chromosom	Numery naruszonych ograniczeń	Długość trasy	Kara	Wartość funkcji przystosowania
C_{21}		72	0	72
C_{22}	(3.14), (3.15), (3.17), (3.19)	77	400	477
C_{23}	(3.14), (3.20)	50	200	250
C_{24}’	(3.12), (3.14), (3.18), (3.20)	31	400	431
C_{25}	(3.13), (3.16), (3.26)	43	300	343
C_{26}	(3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.30)	77	500	577
			Suma	2150

Średnia wartość funkcji przystosowania wynosi 358,33

Najlepsza wartość funkcji przystosowania w tej populacji wynosi 72

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (1/7)

Przykład 3.6

Mamy układ ośmiu miast, między którymi istnieją połączenia komunikacyjne. Z każdego z nich wywozi się i do każdego przywozi określoną masę towarową wykorzystując do przewozu samochody o tej samej ładowności. Odległości między miastami:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	315	250	190	320	80	380	345
2		0	130	400	305	320	170	440
3			0	240	245	295	315	385
4				0	165	270	520	155
5					0	400	480	140
6						0	315	480
7							0	615
8								0

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (2/7)

Przykład 3.6 (c.d.)

Przewidywany przewóz masy towaru, mierzony liczbą samochodów:

		Wywóz z miasta *i*								p_i
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
Przywóz do miasta *i*	**1**	0	21	18	19	16	17	10	9	**110**
	2	14	0	12	15	9	11	6	4	**71**
	3	18	9	0	13	11	12	5	6	**74**
	4	13	8	9	0	7	14	3	7	**61**
	5	16	18	10	8	0	6	2	8	**68**
	6	18	19	6	11	9	0	6	2	**71**
	7	8	7	6	4	3	9	0	2	**39**
	8	4	3	6	10	3	4	2	0	**32**
w_i		**91**	**85**	**67**	**80**	**58**	**73**	**34**	**38**	

Znaleźć plan przewozów minimalizujących puste przebiegi.

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (3/7)

Nadwyżka/niedobór samochodów w kolejnych miastach

p_i	110	71	74	61	68	71	39	32
w_i	91	85	67	80	58	73	34	38
$\boldsymbol{w_i}$	**19**	**–14**	**7**	**–19**	**10**	**–2**	**5**	**–6**

a_1 – nadwyżka samochodów w mieście 1 (dostawca pierwszy),
a_2 – nadwyżka samochodów w mieście 3 (dostawca drugi),
a_3 – nadwyżka samochodów w mieście 5, (dostawca trzeci),
a_4 – nadwyżka samochodów w mieście 7 (dostawca czwarty),

b_1 – niedobór samochodów w mieście 2 (odbiorca pierwszy),
b_2 – niedobór samochodów w mieście 4 (odbiorca drugi),
b_3 – niedobór samochodów w mieście 6 (odbiorca trzeci),
b_4 – niedobór samochodów w mieście 8 (odbiorca czwarty).

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (4/7)

Podaż i popyt na puste samochody

dostawca	odbiorca			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	315	190	80	345
a_2	130	240	295	385
a_3	305	165	400	140
a_4	170	520	315	615

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (5/7)

Model matematyczny

Cel

określenie takiego planu przewozów, który minimalizuje łączną liczbę kilometrów pustych przebiegów.

Zmienne decyzyjne

Liczba pustych przebiegów:

x_{11} – z miasta 1 do miasta 2,
x_{12} – z miasta 1 do miasta 4,
x_{13} – z miasta 1 do miasta 6,
x_{14} – z miasta 1 do miasta 8,

x_{21} – z miasta 2 do miasta 2,
x_{22} – z miasta 2 do miasta 4,
x_{23} – z miasta 2 do miasta 6,
x_{24} – z miasta 2 do miasta 8,

x_{31} – z miasta 3 do miasta 2,
x_{32} – z miasta 3 do miasta 4,
x_{33} – z miasta 3 do miasta 6,
x_{34} – z miasta 3 do miasta 8,

x_{41} – z miasta 4 do miasta 2,
x_{42} – z miasta 4 do miasta 4,
x_{43} – z miasta 4 do miasta 6,
x_{44} – z miasta 4 do miasta 8.

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (6/7)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44})=$$
$$= 315x_{11} + 190x_{12} + 80x_{13} + 345x_{14} +$$
$$+ 130x_{21} + 240x_{22} + 295x_{23} + 385x_{24} +$$
$$+ 305x_{31} + 165x_{32} + 400x_{33} + 140x_{34} +$$
$$+ 170x_{41} + 520x_{42} + 315x_{43} + 615x_{44} \rightarrow \min$$

Ograniczenia

dostawca 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 19$ **odbiorca 1:** $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 14$

dostawca 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 7$ **odbiorca 2:** $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 19$

dostawca 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10$ **odbiorca 3:** $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 2$

dostawca 4: $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 5$ **odbiorca 4:** $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 6$

Warunki nieujemności

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (7/7)

Rozwiązanie optymalne

$x_{11} = 2$	$x_{12} = 15$	$x_{13} = 2$	$x_{14} =0$
$x_{21} = 7$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 0$	$x_{24} = 0$
$x_{31} = 0$	$x_{32} = 4$	$x_{33} = 0$	$x_{34} = 6$
$x_{41} = 5$	$x_{42} = 0$	$x_{43} = 0$	$x_{44} = 0$

Optymalna wartość funkcji celu : 6900

3.7.2. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (1/4)

Przykład 3.7

Zdolności produkcyjne zakładów: 40, 50, 30

Zapotrzebowanie odbiorców: 45, 10, 30, 35

Jednostkowe koszty produkcji: 4, 3, 1

Jednostkowe koszty transportu

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Jednostkowe koszty produkcji i transportu

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 10 & 12 \\ 9 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Znaleźć taki plan produkcji, by zminimalizować łączne koszty produkcji i transportu.

3.7.2. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (2/4)

Model matematyczny

Cel

Minimalizacja łącznych kosztów produkcji i transportu.

Zmienne decyzyjne

Ilość produktu wytworzona:

x_{11} - przez zakład 1 dla odbiorcy 1
x_{12} - przez zakład 1 dla odbiorcy 2
x_{13} - przez zakład 1 dla odbiorcy 3
x_{14} - przez zakład 1 dla odbiorcy 4

x_{21} - przez zakład 2 dla odbiorcy 1
x_{22} - przez zakład 2 dla odbiorcy 2
x_{23} - przez zakład 2 dla odbiorcy 3
x_{24} - przez zakład 2 dla odbiorcy 4

x_{31} - przez zakład 3 dla odbiorcy 1
x_{32} - przez zakład 3 dla odbiorcy 2
x_{33} - przez zakład 3 dla odbiorcy 3
x_{34} - przez zakład 3 dla odbiorcy 4

3.7.2. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (3/4)

Model matematyczny

Funkcja celu

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) =$$
$$= 8x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} +$$
$$+ 6x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 12x_{24} +$$
$$+ 9x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34} \rightarrow \min$$

Ograniczenia

zakład 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40$

zakład 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$

zakład 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30$

odbiorca 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 45$

odbiorca 2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 10$

odbiorca 3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30$

odbiorca 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35$

Warunki nieujemności

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

3.7.2. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (4/4)

Rozwiązanie optymalne

$x_{11} = 0$ $x_{12} = 0$ $x_{13} = 30$ $x_{14} = 10$
$x_{21} = 45$ $x_{22} = 5$ $x_{23} = 0$ $x_{24} = 0$
$x_{31} = 0$ $x_{32} = 5$ $x_{33} = 0$ $x_{34} = 25$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 665

Plan przewozów				Produkcja	
odbiorca 1	odbiorca 2	odbiorca 3	odbiorca 4		
0	0	30	10	zakład 1	40
45	5	0	0	zakład 2	50
0	5	0	25	zakład 3	30

3.7.3. Zagadnienie przydziału (1/5)

Przykład 3.8

Czas pracy doradców firmy consultingowej :

X - 140 godz., ***Y*** - 140 godz., ***Z*** - 120 godz.

Wymagania czasowe nowych kontraktów:

Klient	Liczba godzin
A	165
B	50
C	80
D	70

Stawki godzinowe:

Doradca	Klient A	Klient B	Klient C	Klient D
X	9	11,5	12	10
Y	11	13	11,5	12
Z	15	14,5	14	13

W jaki sposób przydzielić doradcom kontrakty tak, by łączny koszt ich realizacji był najmniejszy?

3.7.3. Zagadnienie przydziału (2/5)

Model matematyczny

Cel

Minimalizacja kosztów wynagrodzenia doradców.

Zmienne decyzyjne

Liczba godzin pracy:

x_{11} - doradcy X dla klienta A,
x_{12} - doradcy X dla klienta B,
x_{13} - doradcy X dla klienta C,
x_{14} - doradcy X dla klienta D,
x_{15} - doradcy X dla fikcyjnego klienta E,

x_{21} - doradcy Y dla klienta A,
x_{22} - doradcy Y dla klienta B,
x_{23} - doradcy Y dla klienta C,
x_{24} - doradcy Y dla klienta D,
x_{25} - doradcy Y dla fikcyjnego klienta E,

x_{31} - doradcy Z dla klienta A,
x_{32} - doradcy Z dla klienta B,
x_{33} - doradcy Z dla klienta C,
x_{34} - doradcy Z dla klienta D,
x_{35} - doradcy Z dla fikcyjnego klienta E.

3.7.3. Zagadnienie przydziału (3/5)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}) =$$
$$= 90x_{11} + 115x_{12} + 120x_{13} + 100x_{14} + 0x_{14} +$$
$$+ 110x_{21} + 130x_{22} + 115x_{23} + 120x_{24} + 0x_{25} +$$
$$+ 150x_{31} + 145x_{32} + 140x_{33} + 130x_{34} + 0x_{35} \rightarrow \min$$

Ograniczenia

dla doradcy X: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 140$

dla doradcy Y: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 140$

dla doradcy Z: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 120$

dla klienta A: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 165$

dla klienta B: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$

dla klienta C: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$

dla klienta D: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70$

dla klienta E: $x_{15} + x_{25} + x_{35} = 35$

Warunki nieujemności dla zmiennych decyzyjnych

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$$

3.7.3. Zagadnienie przydziału (5/5)

Rozwiązanie optymalne

$x_{11} = 140$ $x_{12} = 0$ $x_{13} = 0$ $x_{14} = 0$ $x_{15} = 0$

$x_{21} = 25$ $x_{22} = 35$ $x_{23} = 80$ $x_{24} = 0$ $x_{25} = 0$

$x_{31} = 0$ $x_{32} = 15$ $x_{33} = 0$ $x_{34} = 70$ $x_{35} = 35$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 4037,5

Doradca	Klient A	Klient B	Klient C	Klient D
X	140	0	0	0
Y	25	35	80	0
Z	0	15	0	70

Pora na relaks