

Zadanie transportowe i problem komiwojażera

Tadeusz Trzaskalik

3.1. Wprowadzenie

Słowa kluczowe

Zbilansowane zadanie transportowe

Rozwiązanie początkowe

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów

Metoda VAM

Metoda kąta północno-zachodniego

Metoda potencjałów

Bilansowanie zadania niezbilansowanego

Kryteria: optymalności, wejścia, wyjścia

Degeneracja w zadaniu transportowym

Bilansowanie zadania transportowego

Fikcyjny dostawca

Fikcyjny odbiorca

Słowa kluczowe

Problem komiwojażera

Cykl

Algorytm genetyczny

Populacja

Populacja początkowa

Chromosom

Gen

Funkcja przystosowania

Selekcja

Krzyżowanie

Punkt krzyżowania

Mutacja

Zadanie transportowe

Mamy ustaloną liczbę dostawców i odbiorców, znamy podaż każdego dostawcy i zapotrzebowanie każdego odbiorcy w ustalonym odcinku czasu oraz koszty jednostkowe transportu pomiędzy poszczególnymi dostawcami i odbiorcami, proporcjonalnie do ilości przewiezionego towaru. Należy znaleźć taki plan przewozów, który minimalizuje łączny ich koszt

Problem komiwojażera

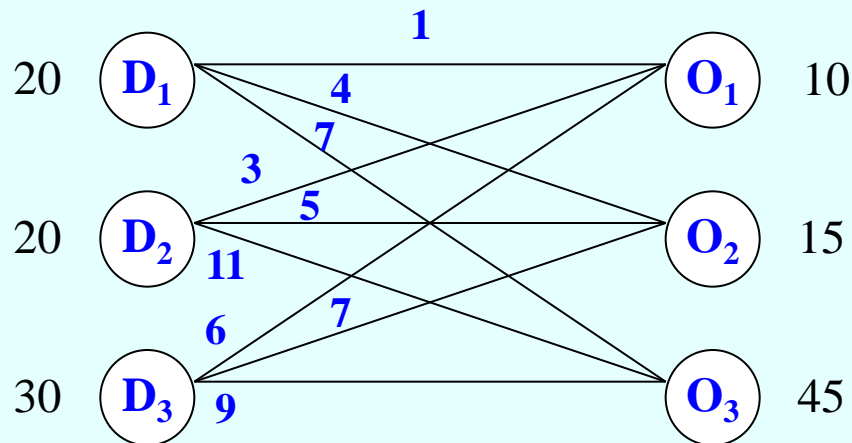
Mamy n miast, które należy odwiedzić w dowolnej kolejności, rozpoczynając podróż z miasta o numerze 1 i wracając do niego, przy czym każde z miast można odwiedzić dokładnie jeden raz. Znając wszystkie odległości między miastami należy znaleźć trasę przejazdu o minimalnej długości.

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.1. Zadanie transportowe w ujęciu programowania liniowego (1/3)

Przykład 3.1

Miejscowość	O ₁	O ₂	O ₃
D ₁	1	4	7
D ₂	3	5	11
D ₃	6	7	9



3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.1. Zadanie transportowe w ujęciu programowania liniowego (2/3)

Model matematyczny

Cel

Określenie planu przewozów, który minimalizuje łączny koszt.

Zmienne decyzyjne

x_{11} - planowany przewóz na trasie od D1 do O1

x_{12} - planowany przewóz na trasie od D1 do O2

x_{13} - planowany przewóz na trasie od D1 do O3

x_{21} - planowany przewóz na trasie od D2 do O1

x_{22} - planowany przewóz na trasie od D2 do O2

x_{23} - planowany przewóz na trasie od D2 do O3

x_{31} - planowany przewóz na trasie od D3 do O1

x_{32} - planowany przewóz na trasie od D3 do O2

x_{33} - planowany przewóz na trasie od D3 do O3

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.1. Zadanie transportowe w ujęciu programowania liniowego (3/3)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + \\ + 3x_{21} + 5x_{22} + 11x_{23} + 6x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} \rightarrow \min$$

Ograniczenia

$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45 \\ & x_{11}, \dots, x_{33} \geq 0 \end{array}$$

Rozwiązanie optymalne

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 5 & x_{12} = 0 & x_{13} = 15 \\ x_{21} = 5 & x_{22} = 15 & x_{23} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = 30 \end{array}$$

Minimalny koszt transportu wynosi 470.

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (1/7)

Postać macierzowa zadania prymalnego

c - wektor funkcji celu,

A - macierz współczynników,

b - wektor warunków
ograniczających,

x - wektor zmiennych.

$$cx \rightarrow \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

\Rightarrow

$$\bar{c}x \rightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

przy czym $\bar{c} = -c$

$$c = [1 \quad 4 \quad 7 \quad 3 \quad 5 \quad 11 \quad 6 \quad 7 \quad 9]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}$$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (2/7)

Zasady tworzenia zadania dualnego

Zadanie prymalne (ZP)

$$\bar{\mathbf{c}}\mathbf{x} \rightarrow \max$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Zadanie dualne (ZD)

$$\mathbf{y}\mathbf{b} \rightarrow \min$$

$$\mathbf{y}\mathbf{A} \geq \bar{\mathbf{c}}$$

\mathbf{y} – dowolne

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6]$$

Przyjmujemy, że $\mathbf{y} = [u, v]$

\mathbf{u} – wektor zmiennych ZD odpowiadających dostawcom,

\mathbf{v} – wektor zmiennych ZD odpowiadających odbiorcom.

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

$$\mathbf{y} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (3/7)

Postać zadania dualnego

$$\mathbf{yb} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix} = 20u_1 + 20u_2 + 30u_3 + 10v_1 + 15v_2 + 45v_3 \rightarrow \min$$

$$\mathbf{yA} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ -3 \\ -5 \\ -11 \\ -6 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{c}}$$

$$u_1 + v_1 \geq -1$$

$$u_1 + v_2 \geq -4$$

$$u_1 + v_3 \geq -7$$

$$u_2 + v_1 \geq -3$$

$$u_2 + v_2 \geq -5$$

$$u_2 + v_3 \geq -11$$

$$u_3 + v_1 \geq -6$$

$$u_3 + v_2 \geq -7$$

$$u_3 + v_3 \geq -9$$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (4/7)

Zadanie prymalne i dualne – zestawienie

Zadanie prymalne

$$-x_{11} - 4x_{12} - 7x_{13} - 3x_{21} - 5x_{22} - 11x_{23} - 6x_{31} - 7x_{32} - 9x_{33} \rightarrow \max$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$

$$x_{11}, \dots, x_{33} \geq 0$$

Zadanie dualne

$$20u_1 + 20u_2 + 30u_3 + 10v_1 + 15v_2 + 45v_3 \rightarrow \min$$

$$u_1 + v_1 + 1 \geq 0$$

$$u_1 + v_2 + 4 \geq 0$$

$$u_1 + v_3 + 7 \geq 0$$

$$u_2 + v_1 + 3 \geq 0$$

$$u_2 + v_2 + 5 \geq 0$$

$$u_2 + v_3 + 11 \geq 0$$

$$u_3 + v_1 + 6 \geq 0$$

$$u_3 + v_2 + 7 \geq 0$$

$$u_3 + v_3 + 9 \geq 0$$

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 - \text{dowolne}$$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (5/7)

Zależności między zmiennymi i warunkami ograniczającymi

x_{11} odpowiada warunkowi $u_1 + v_1 + 1 \geq 0$

x_{12} odpowiada warunkowi $u_1 + v_2 + 4 \geq 0$

x_{13} odpowiada warunkowi $u_1 + v_3 + 7 \geq 0$

x_{21} odpowiada warunkowi $u_2 + v_1 + 3 \geq 0$

x_{22} odpowiada warunkowi $u_2 + v_2 + 5 \geq 0$

x_{23} odpowiada warunkowi $u_2 + v_3 + 11 \geq 0$

x_{31} odpowiada warunkowi $u_3 + v_1 + 6 \geq 0$

x_{32} odpowiada warunkowi $u_3 + v_2 + 7 \geq 0$

x_{33} odpowiada warunkowi $u_3 + v_3 + 9 \geq 0$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (6/7)

Twierdzenie o komplementarności

$$(yA - \bar{c}) x = 0$$

czyli:

$$([u, v] A - \bar{c}) x = 0$$

stąd:

$$\begin{array}{ll} (u_1 + v_1 + 1) x_{11} = 0 & (u_1 + v_2 + 4) x_{12} = 0 \\ (u_2 + v_1 + 3) x_{21} = 0 & (u_2 + v_2 + 5) x_{22} = 0 \\ (u_3 + v_1 + 6) x_{31} = 0 & (u_3 + v_2 + 7) x_{32} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (u_1 + v_3 + 7) x_{13} = 0 \\ (u_2 + v_3 + 11) x_{23} = 0 \\ (u_3 + v_3 + 9) x_{33} = 0 \end{array}$$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.2. Zadanie dualne do zadania transportowego (7/7)

Wnioski z twierdzenia o komplementarności

$$\text{Jeżeli } x_{11} > 0, \text{ to } u_1 + v_1 + 1 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{12} > 0, \text{ to } u_1 + v_2 + 4 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{13} > 0, \text{ to } u_1 + v_3 + 7 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{21} > 0, \text{ to } u_2 + v_1 + 3 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{22} > 0, \text{ to } u_2 + v_2 + 5 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{23} > 0, \text{ to } u_2 + v_3 + 11 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{31} > 0, \text{ to } u_3 + v_1 + 6 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{32} > 0, \text{ to } u_3 + v_2 + 7 = 0$$

$$\text{Jeżeli } x_{33} > 0, \text{ to } u_3 + v_3 + 9 = 0$$

3.2. Zadanie transportowe i jego własności

3.2.3. Sformułowanie zadania transportowego (1/1)

Zbilansowane zadanie transportowe

Oznaczenia

m - liczba dostawców,

n - liczba odbiorców,

a_i - podaż i -tego dostawcy ($i = 1, \dots, m$),

b_j - popyt j -tego odbiorcy ($j = 1, \dots, n$),

x_{ij} - ilość towaru przewieziona od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy,

c_{ij} - koszt przewozu jednostki towaru od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Sformułowanie zadania

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{dla } j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (1/7)

Definicje

Macierz przewozów

$$X = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

Macierz kosztów

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie bazowe

- zawiera $n + m - 1$ zmiennych bazowych

Węzły bazowe

- odpowiadają zmiennym bazowym

Linia

- węzły ustalonego wiersza lub ustalonej kolumny

Wielkość przewozu

$$x_{ij} = \min(a_i, b_j)$$

Podaż i popyt po modyfikacji

$$a'_i = a_i - x_{ij}$$

$$b'_j = b_j - x_{ij}$$

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (2/7)

Przebieg obliczeń

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10 *			20 10
0			20
0			30
10 0	15	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4	7	
3	5	11	
6	7	9	

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (3/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10 *	0	10 0
0			20
0			30
0	15 5	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5	11	
6	7	9	

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (4/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10	0	0
0	5 *		20 15
0	0		30
0	5 0	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11	
6	7	9	

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (5/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10	0	0
0	5		15
0	0	30 *	30 0
0	0	45 15	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11	
6	7	9 *	

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (6/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	10	0	0
0	5	15 *	15 0
0	0	30	0
0	0	15 0	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11 *	
6	7	9 *	

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.1. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów (7/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10 *	10 *	0	0
0	5 *	15 *	0
0	0	30 *	0
0	0	0	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1 *	4 *	7	
3	5 *	11 *	
6	7	9 *	

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.2. Metoda VAM (1/3)

Przebieg obliczeń

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10 *			20 10
0			20
0			30
10 0	15	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			Różnice w wierszach
1 *	4	7	3
3	5	11	2
6	7	9	1
2	1	2	Różnice w kolumnach



3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.2. Metoda VAM (2/3)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	0		10
0	15 *		20 5
0	0		30
0	15 0	45	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			Różnice w wierszach
1 *	4	7	3
3	5 *	11	6
6	7	9	2
-	1	2	Różnice w kolumnach



3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.2. Metoda VAM (3/3)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Podaż
10	0	10 *	10 0
0	15	5 *	5 0
0	0	30 *	30 0
0	0	45 0	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			Różnice w wierszach
1 *	4	7 *	-
3	5 *	11 *	-
6	7	9 *	-
-	-	-	Różnice w kolumnach

3.3. Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

3.3.3. Metoda kąta północno-zachodniego (1/1)

Przebieg obliczeń

Rozwiązanie początkowe (metoda kąta północno-zachodniego)			Podaż
10 *	10 *	0	0
0	5 *	15 *	0
0	0	30 *	0
0	0	0	Popyt

Szkic algorytmu

1. Znaleźć pierwsze, dopuszczalne rozwiązanie bazowe.
2. Ocenic, czy jest ono optymalne, czy też nie.
3. Jeżeli nie jest optymalne, wyznaczyć nowe sąsiednie rozwiązanie bazowe. W tym celu należy:
 - wybrać zmienną wchodzącą do bazy,
 - wybrać zmienną usuwaną z bazy,
 - znaleźć rozwiązanie bazowe odpowiadające bazie sąsiedniej
4. Jeżeli otrzymane rozwiązanie jest optymalne, zakończyć postępowanie.

3.4. Metoda potencjałów

3.4.1. Badanie optymalności rozwiązania (1/3)

Konstrukcja układu równań

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu)			Podaż
10 *	10 *	0	0
0	5 *	15 *	0
0	0	30 *	0
0	0	0	Popyt

Ponieważ $x_{11} > 0$, więc $u_1 + v_1 + 1 = 0$

Ponieważ $x_{12} > 0$, więc $u_1 + v_2 + 4 = 0$

Ponieważ $x_{22} > 0$, więc $u_2 + v_2 + 5 = 0$

Ponieważ $x_{23} > 0$, więc $u_2 + v_3 + 11 = 0$

Ponieważ $x_{33} > 0$, więc $u_3 + v_3 + 9 = 0$

$$u_1 = a, \quad v_1 = -1 - a$$

$$u_2 = -1 + a, \quad v_2 = -4 - a$$

$$u_3 = 1 + a, \quad v_3 = -10 - a$$

3.4. Metoda potencjałów

3.4.1. Badanie optymalności rozwiązania (2/3)

Wskaźniki optymalności

$$\underline{c'_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u_1 = a, \quad v_1 = -1 - a \\ u_2 = -1 + a, \quad v_2 = -4 - a \\ u_3 = 1 + a, \quad v_3 = -10 - a \end{array}$$

$$c'_{11} = u_1 + v_1 + 1 = a + (-1 - a) + 1 = 0$$

$$c'_{12} = u_1 + v_2 + 4 = a + (-4 - a) + 4 = 0$$

$$c'_{13} = u_1 + v_3 + 7 = a + (-10 - a) + 7 = -3$$

$$c'_{21} = u_2 + v_1 + 3 = (-1 + a) + (-1 - a) + 3 = 1$$

$$c'_{22} = u_2 + v_2 + 5 = (-1 + a) + (-4 - a) + 5 = 0$$

$$c'_{23} = u_2 + v_3 + 11 = (-1 + a) + (-10 - a) + 11 = 0$$

$$c'_{31} = u_3 + v_1 + 6 = (1 + a) + (-1 - a) + 6 = 6$$

$$c'_{32} = u_3 + v_2 + 7 = (1 + a) + (-4 - a) + 7 = 4$$

$$c'_{33} = u_3 + v_3 + 9 = (1 + a) + (-10 - a) + 9 = 0$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4. Metoda potencjałów

3.4.1. Badanie optymalności rozwiązania (3/3)

Kryterium optymalności

Jeżeli wartości wszystkich wskaźników optymalności są dodatnie lub równe zero, wtedy rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne. Jeżeli choć jeden ze wskaźników optymalności jest ujemny, wtedy istnieje możliwość poprawy tego rozwiązania.

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Istnieje możliwość poprawy rozwiązania początkowego.

3.4. Metoda potencjałów

3.4.2. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy (1/1)

Kryterium wejścia

W macierzy wskaźników optymalności znajdujemy element najmniejszy. Odpowiadającą mu zmienną wprowadzamy do nowej bazy. Jeżeli najmniejszej wartości wskaźnika optymalności odpowiada więcej niż jedna zmienna, to do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najmniejszym numerze wiersza, a gdy numer wiersza dla dwóch zmiennych jest taki sam, wówczas do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najmniejszym numerze kolumny.

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Do bazy wprowadzamy zmienną x_{13} .

3.4. Metoda potencjałów

3.4.3. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (1/1)

Kryterium wyjścia

10	10	0
0	5	15
0	0	45

10	9 -	1 +
0	6 +	14 -
0	0	45

Półcykl dodatni:

węzły (2, 2), (1, 3)

Półcykl ujemny:

węzły (1, 2), (2, 3)

Bazę opuszcza ta zmienna należąca do półcyklu ujemnego, dla której wielkość przewozu w dotychczasowym rozwiązaniu jest minimalna.

W przypadku niejednoznaczności postępujemy tak samo, jak w przypadku wystąpienia niejednoznaczności w kryterium wejścia.

3.4. Metoda potencjałów

3.4.4. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego (1/1)

Wyznaczenie cyklu

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu)			Wartość funkcji celu 510
10	10 ⁻	0 ⁺	
0	5 ⁺	15 ⁻	
0	0	30	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne (iteracja 1)			Wartość funkcji celu 480
10 *	0	10 *	
0	15 *	5 *	
0	0	30 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.5. Kolejne iteracje (1/6)

Iteracja 2

Macierz wskaźników optymalności		
0 *	0	-3 *
1	0 *	0 *
6	4	0 *

Układ równań:

$$u_1 + v_1 = 0$$

$$u_1 + v_3 - 3 = 0$$

$$u_2 + v_2 = 0$$

$$u_2 + v_3 = 0$$

$$u_3 + v_3 = 0$$

Rozwiązanie:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0,$$

$$u_2 = -3, \quad v_2 = 3,$$

$$u_3 = -3, \quad v_3 = 3.$$

3.4. Metoda potencjałów

3.4.5. Kolejne iteracje (2/6)

Iteracja 2 (c.d.)

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
0 *	0 *	-3	0
1	0 *	0 *	-3
6	4	0 *	-3
0	3	3	v_j
Nowa macierz wskaźników optymalności			
0 *	3	0 *	
-2	0 *	0 *	
3	4	0 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.5. Kolejne iteracje (3/6)

Iteracja 2 (c.d.)

Rozwiązanie dopuszczalne			Podaż
10^-	0	10^+	20
0^+	15	5^-	20
0	0	30	30
10	15	45	Popyt
Macierz wskaźników optymalności			
0^*	3	0^*	
-2	0^*	0^*	
3	4	0^*	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.5. Kolejne iteracje (4/6)

Iteracja 2 (c.d.)

Dotychczasowe rozwiązanie dopuszczalne			Podaż
10 ⁻	0	10 ⁺	20
0 ⁺	15	5 ⁻	20
0	0	30	30
10	15	45	Popyt
Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 2) 470
5 *	0	15 *	
5 *	15 *	0	
0	0	30 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.5. Kolejne iteracje (5/6)

Iteracja 3

Macierz wskaźników optymalności		
0 *	3	0 *
-2 *	0 *	0
3	4	0 *

Układ równań

$$\begin{aligned}u_1 + v_1 &= 0 \\u_1 + v_3 &= 0 \\u_2 + v_1 - 2 &= 0 \\u_2 + v_2 &= 0 \\u_3 + v_3 &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}u_1 &= 0, & v_1 &= 0, \\u_2 &= 2, & v_2 &= -2, \\u_3 &= 0, & v_3 &= 0.\end{aligned}$$

3.4. Metoda potencjałów

3.4.5. Kolejne iteracje (6/6)

Iteracja 3 (c.d.)

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
0 *	3	0 *	0
-2	0 *	0 *	2
3	4	0 *	0
0	-2	0	v_j
Nowa macierz wskaźników optymalności			
0 *	1	0 *	
0 *	0 *	2	
3	2	0 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (1/9)

Przykład 3.2

$$a_1=10, a_2=20, a_3=30$$

$$b_1=10, b_2=20, b_3=30$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie początkowe (metoda kąta północno-zachodniego)			Podaż
10 *	0 *	0	10 0
0	20 *	0 *	20 0
0	0	30 *	30 0
10 0	20 0	30 0	Popyt

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (2/9)

Rozwiązania początkowe

10*	0 *	0
0	20*	0
0	0 *	30*

10*	0	0
0 *	20 *	0
0	0 *	30*

10*	0	0
0 *	20*	0 *
0	0	30*

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (3/9)

Iteracja 1

$$u_1 + v_1 + 7 = 0$$

$$u_1 + v_2 + 4 = 0$$

$$u_2 + v_2 + 6 = 0$$

$$u_2 + v_3 + 1 = 0$$

$$u_3 + v_3 + 5 = 0$$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -7$$

$$u_2 = -2, \quad v_2 = -4$$

$$u_3 = -6, \quad v_3 = 1$$

Macierz kosztów jednostkowych			u_i
7	4	4	0
3	6	1	-2
2	3	5	-6
-7	-4	1	v_j
Macierz wskaźników optymalności			
0	0	5	
-6	0	0	
-11	-7	0	



3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (4/9)

Iteracja 1 (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Początkowa wartość funkcji celu 340
10 ⁻	0 ⁺	0	
0	20 ⁻	0 ⁺	
0 ⁺	0	30 ⁻	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 1) 230
0	10 *	0	
0	10 *	10 *	
10 *	0	20 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (5/9)

Iteracja 2

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
0 *	0 *	5	0
-6	0 *	0 *	0
-11	-7	0 *	0
11	0	0	v_j
Nowa macierz wskaźników optymalności			
11	0 *	5	
5	0 *	0 *	
0 *	-7	0 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (6/9)

Iteracja 2 (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Początkowa wartość funkcji celu 230
0	10	0	
0	10 ⁻	10 ⁺	
10	0 ⁺	20 ⁻	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 2) 160
0	10 *	0	
0	0	20 *	
10 *	10 *	10 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (7/9)

Iteracja 3

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
11	0 *	5	0
5	0	0 *	7
0 *	-7 *	0 *	7
-7	0	-7	v_j
Nowa macierz wskaźników optymalności			
4	0 *	-2	
5	7	0 *	
0 *	0 *	0 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (8/9)

Iteracja 3 (c.d.)

Rozwiązanie początkowe			Początkowa wartość funkcji celu 160
0	10 ⁻	0 ⁺	
0	0	20	
10	10 ⁺	10 ⁻	

Nowe rozwiązanie dopuszczalne			Wartość funkcji celu (iteracja 3) 140
0	0	20 *	
0	0	20 *	
10 *	20 *	0 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.6. Degeneracja w zadaniu transportowym (9/9)

Iteracja 4

Dotychczasowa macierz wskaźników optymalności			u_i
4	0 *	-2	0
5	7	0 *	-2
0 *	0 *	0 *	-2
2	2	2	v_j
Nowa macierz wskaźników optymalności			
6	2	0 *	
5	7	0 *	
0 *	0 *	0 *	

3.4. Metoda potencjałów

3.4.7. Reguły postępowania w rozwiązywaniu zadania transportowego (1/1)

Algorytm

1. Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego.
2. Wyznaczenie wskaźników optymalności.
3. Badanie optymalności rozwiązania.
4. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy.
5. Konstrukcja cyklu.
6. Wybór zmiennej opuszczającej bazę.
7. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego.

3.5. Bilansowanie zadania transportowego

3.5.1. Podaż przewyższa popyt (1/2)

Fikcyjny odbiorca

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

$$a_1 = 25, a_2 = 20, a_3 = 30$$

$$b_1 = 10, b_2 = 15, b_3 = 45$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$b_4 = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = (25 + 20 + 30) - (10 + 15 + 45) = 5$$

3.5. Bilansowanie zadania transportowego

3.5.1. Podaż przewyższa popyt (2/2)

Fikcyjny odbiorca (c.d.)

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu)				Podaż
10 *	10 *	0	5 *	25
0	5 *	15 *	0	20
0	0	30 *	0	30
10	15	45	5	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych				Wartość funkcji celu 510
1	4	7	0	
3	5	11	0	
6	7	9	0	

Rozwiązanie optymalne

$$\begin{aligned}x_{11} &= 10 & x_{12} &= 0 & x_{13} &= 15 & x_{14} &= 0 \\x_{21} &= 0 & x_{22} &= 15 & x_{23} &= 0 & x_{24} &= 5 \\x_{31} &= 0 & x_{32} &= 0 & x_{33} &= 30 & x_{34} &= 0\end{aligned}$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 460.

3.5. Bilansowanie zadania transportowego

3.5.2. Popyt przewyższa podaż (1/2)

Fikcyjny dostawca

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

$$a_1 = 20, a_2 = 20, a_3 = 30$$

$$b_1 = 10, b_2 = 15, b_3 = 50$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a_4 = (b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) = (10 + 15 + 50) - (20 + 20 + 30) = 5$$

3.5. Bilansowanie zadania transportowego

3.5.2. Popyt przewyższa podaż (2/2)

Fikcyjny dostawca (c.d.)

Rozwiązanie początkowe

Rozwiązanie początkowe (metoda VAM)			Podaż
10 *	0	10 *	20
0	15 *	5 *	20
0	0	30 *	30
0	0	5 *	5
10	15	50	Popyt
Macierz kosztów jednostkowych			
1	4	7	
3	5	11	
6	7	9	
0	0	0	

Rozwiązanie optymalne

$$\begin{aligned}x_{11} &= 10 & x_{12} &= 0 & x_{13} &= 10 \\x_{21} &= 0 & x_{22} &= 15 & x_{23} &= 5 \\x_{31} &= 0 & x_{32} &= 0 & x_{33} &= 30 \\x_{41} &= 0 & x_{42} &= 0 & x_{43} &= 5\end{aligned}$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 470.

3.6. Problem komiwojażera

3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (1/4)

Przykład 3.5

Komiwojażer wyjeżdża z miasta 1 i ma odwiedzić miasta o numerach 2, 3, 4 i 5. Do każdego z nich przyjeżdża dokładnie jeden raz, po czym wraca do miasta 1. Szukamy trasy najkrótszej.

Miasto	1	2	3	4	5
1	0	10	12	15	11
2	10	0	19	10	11
3	12	19	0	10	12
4	15	10	10	0	20
5	11	11	12	20	0

3.6. Problem komiwojażera

3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (2/4)

Modelowanie trasy przejazdu

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy planowany jest przejazd na trasie od } i \text{ do } j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Trasa przejazdu 1-2-3-4-5-1

$x_{12} = 1, x_{23} = 1, x_{34} = 1, x_{45} = 1, x_{51} = 1$, pozostałe $x_{ij} = 0$

Miasto	1	2	3	4	5
1	-	1	0	0	0
2	0	-	1	0	0
3	0	0	-	1	0
4	0	0	0	-	1
5	1	0	0	0	-

3.6. Problem komiwojażera

3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (3/4)

Model transportowy

Zadanie o 5 dostawcach i 5 odbiorcach

Miasto	1	2	3	4	5	Podaż
1	100	10	12	15	11	1
2	10	100	19	10	11	1
3	12	19	100	10	12	1
4	15	10	10	100	20	1
5	11	11	12	20	100	1
	1	1	1	1	1	Popyt

3.6. Problem komiwojażera

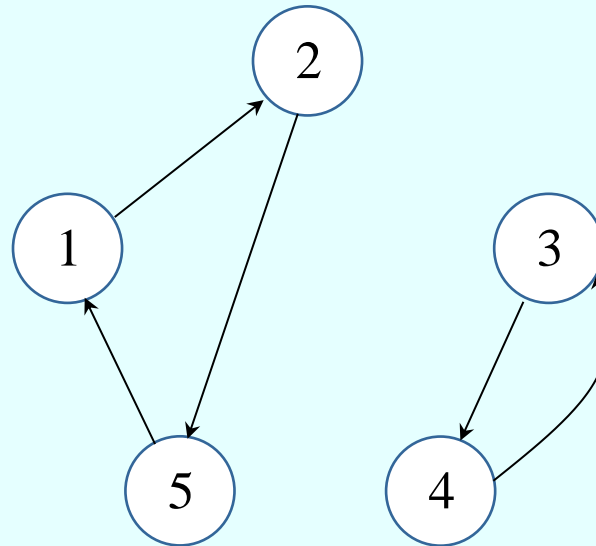
3.6.1. Problem komiwojażera a zagadnienie transportowe (4/4)

Model transportowy (c.d.)

Rozwiązanie:

$x_{12} = 1, x_{25} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1, x_{51} = 1$; pozostałe zmienne są równe 0.

Optymalna wartość funkcji celu wynosi 52.



3.6. Problem komiwojażera

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (1/5)

Model matematyczny

Funkcja celu:

$$\begin{aligned} f(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{35}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{45}, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}) = \\ = 10x_{12} + 12x_{13} + 15x_{14} + 11x_{15} + 10x_{21} + 19x_{23} + 10x_{24} + 11x_{25} + 12x_{31} + 19x_{32} + \\ + 10x_{34} + 12x_{35} + 15x_{41} + 10x_{42} + 10x_{43} + 20x_{45} + 11x_{51} + 11x_{52} + 12x_{53} + 20x_{54} \\ \rightarrow \min \end{aligned}$$

Warunki ograniczające

jednokrotny wyjazd z każdego miasta (3.12) – (3.16)

jednokrotny wjazd do każdego miasta (3.17) – (3.21)

eliminacja cykli między miastami (3.22) – (3.31)

wszystkie zmienne x_{ij} są zmiennymi binarnymi

$$x_{ij} \in \{0;1\} \text{ dla } i,j = 1, \dots, 5. \quad (3.32)$$

3.6. Problem komiwojżera

3.6.2. Zadanie komiwojżera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (2/5)

Jednokrotny wyjazd z miasta i

Miasto 1

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \quad (3.12)$$

Miasto 2

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \quad (3.13)$$

Miasto 3

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \quad (3.14)$$

Miasto 4

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \quad (3.15)$$

Miasto 5

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \quad (3.16)$$

3.6. Problem komiwojażera

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (3/5)

Jednokrotny wjazd do miasta i

Miasto 1

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \quad (3.17)$$

Miasto 2

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \quad (3.18)$$

Miasto 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \quad (3.19)$$

Miasto 4

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \quad (3.20)$$

Miasto 5

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \quad (3.21)$$

3.6. Problem komiwojażera

3.6.2. Zadanie komiwojażera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (4/5)

Eliminacja cykli pomiędzy miastami

$$\text{Miasta 1 i 2:} \quad x_{12} + x_{21} \leq 1 \quad (3.22)$$

$$\text{Miasta 1 i 3:} \quad x_{13} + x_{31} \leq 1 \quad (3.23)$$

$$\text{Miasta 1 i 4:} \quad x_{14} + x_{41} \leq 1 \quad (3.24)$$

$$\text{Miasta 1 i 5:} \quad x_{15} + x_{51} \leq 1 \quad (3.25)$$

$$\text{Miasta 2 i 3:} \quad x_{23} + x_{32} \leq 1 \quad (3.26)$$

$$\text{Miasta 2 i 4:} \quad x_{24} + x_{42} \leq 1 \quad (3.27)$$

$$\text{Miasta 2 i 5:} \quad x_{25} + x_{52} \leq 1 \quad (3.28)$$

$$\text{Miasta 3 i 4:} \quad x_{34} + x_{43} \leq 1 \quad (3.29)$$

$$\text{Miasta 3 i 5:} \quad x_{35} + x_{53} \leq 1 \quad (3.30)$$

$$\text{Miasta 4 i 5:} \quad x_{45} + x_{54} \leq 1 \quad (3.31)$$

3.6. Problem komiwojżera

3.6.2. Zadanie komiwojżera jako zadanie programowania całkowitoliczbowego (5/5)

Rozwiązanie optymalne

$x_{15} = 1, x_{21} = 1, x_{34} = 1, x_{42} = 1, x_{53} = 1$, pozostałe zmiennych $x_{ij} = 0$.

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 53.

Zapis tabelaryczny

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0

3.6. Problem komiwojażera

3.6.Podstawowe pojęcia(1/2)

Populacja - rozpatrywany podzbiór rozwiązań o ustalonej liczbie elementów

Populacja początkowa - pierwsza losowo wygenerowana populacja

Chromosom - rozwiązanie (w postaci zer i jedynek)

Gen - kolejne elementy tworzące chromosom

funkcja przystosowania - funkcja oceniająca chromosomy

selekcja - polega na wybraniu zbioru chromosomów, które stają się rodzicami nowotworzonej populacji potomków. Ma przebieg losowy, lecz przeprowadzana jest w taki sposób, by chromosomy najlepsze miały największe szanse wylosowania.

krzyżowanie - losowe pary rodziców, punkt krzyżowania.

mutacja - zamiana genu z 0 na 1 lub z 1 na 0.

warunek końca algorytmu: z góry określona liczba iteracji lub gdy dwie populacje nie różnią się między sobą.

3.6. Problem komiwojżera

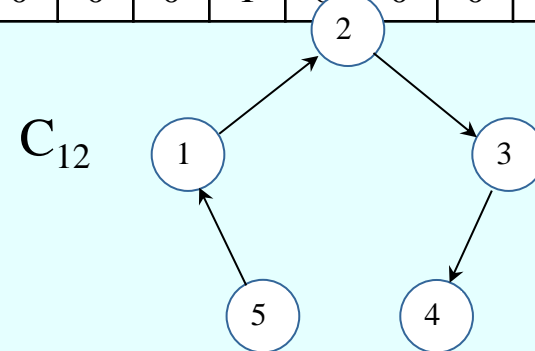
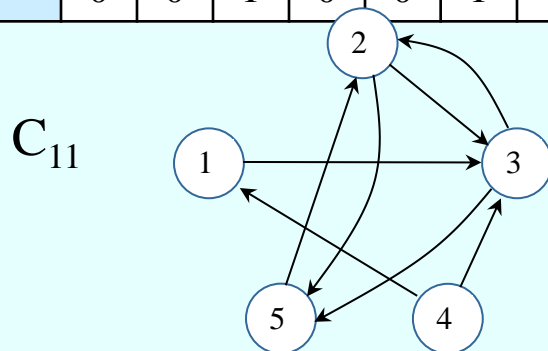
3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (1/9)

Populacja początkowa

Przyjmujemy, że liczność każdej populacji wynosi 6.

Losowanie genów – prawdopodobieństwo wylosowania 0 wynosi 0,75, prawdopodobieństwo wylosowania jedynki wynosi 0,25.

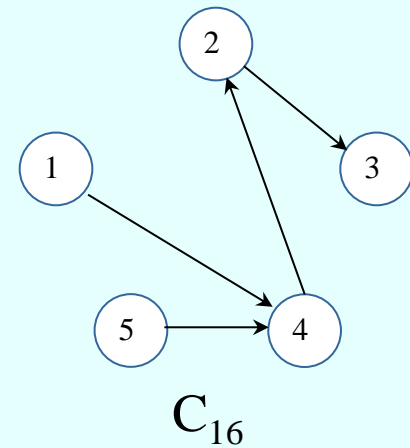
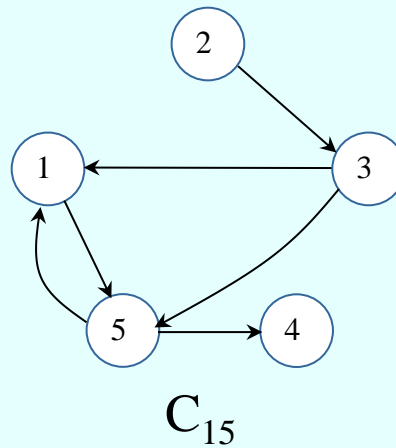
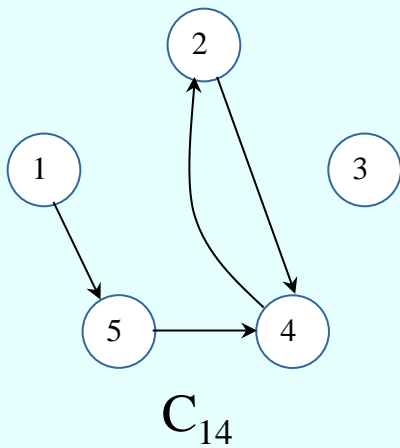
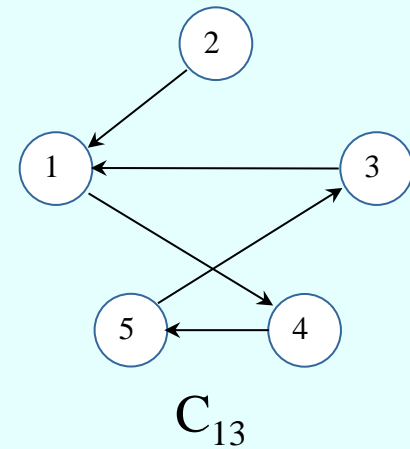
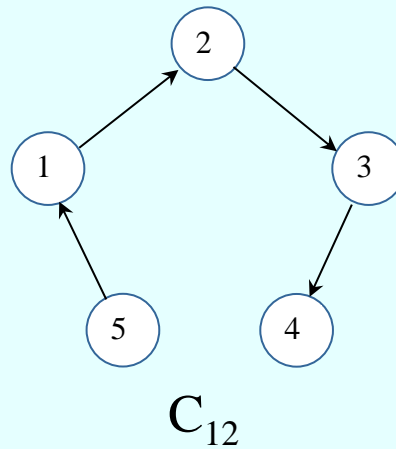
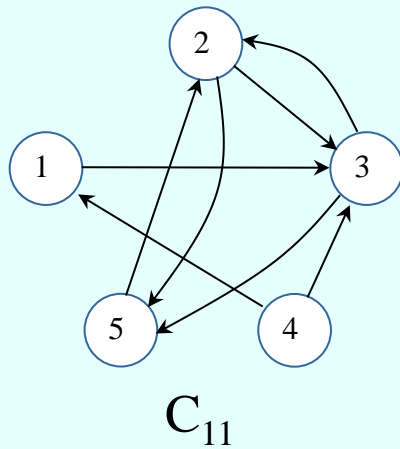
Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{11}	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
C_{12}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{13}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
C_{14}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C_{15}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_{16}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1



3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (2/9)

Populacja początkowa (c.d.)



3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (3/9)

Wartości funkcji przystosowania

Chromosom	Numery naruszonych ograniczeń	Długość Odcinków	Kara	Wartość funkcji przystosowania
C ₁₁	(3.12), (3.13), (3.14), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.25), (3.27)	109	1000	1109
C ₁₂	(3.14), (3.20)	50	200	250
C ₁₃	(3.16), (3.17)	69	200	269
C ₁₄	(3.13), (3.16), (3.18), (3.19), (3.26)	51	500	551
C ₁₅	(3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.20), (3.24)	85	700	785
C ₁₆	(3.13), (3.16), (3.19), (3.20)	64	400	464
Suma				3428

Średnia wartość funkcji przystosowania wynosi $3428 : 6 = 571,33$.

Najlepsza wartość funkcji przystosowania w tej populacji wynosi 250.

3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (4/9)

Prawdopodobieństwo selekcji

Chromosom	Wartość funkcji przystosowania	Odwrotność wartości funkcji przystosowania	Suma odwrotności funkcji przystosowania	Prawdopodobieństwo selekcji
C ₁₁	1109	0,0009017	0,0138631	0,065044 ≈ 7%
C ₁₂	250	0,0040000		0,288536 ≈ 29%
C ₁₃	269	0,0037175		0,268156 ≈ 27%
C ₁₄	551	0,0018149		0,130915 ≈ 13%
C ₁₅	785	0,0012739		0,091890 ≈ 9%
C ₁₆	464	0,0021552		0,155461 ≈ 15%

3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (5/9)

Selekcja i krzyżowanie

Wylosowane chromosomy

Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	PK
C_{15}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	11
C_{16}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
C_{12}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3
C_{12}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
C_{14}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	17
C_{13}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	

Nowa populacja po krzyżowaniu

Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{21}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C_{22}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_{23}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{24}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{25}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
C_{26}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (6/9)

Mutacja

Prawdopodobieństwo mutacji = 1/100.

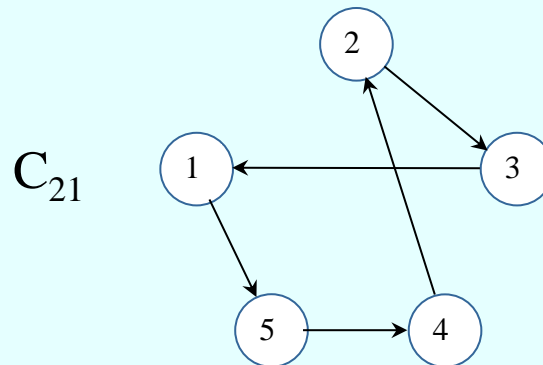
Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{24}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{24}'	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

3.6. Problem komiwojażera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (7/9)

Populacja początkowa dla następnej iteracji

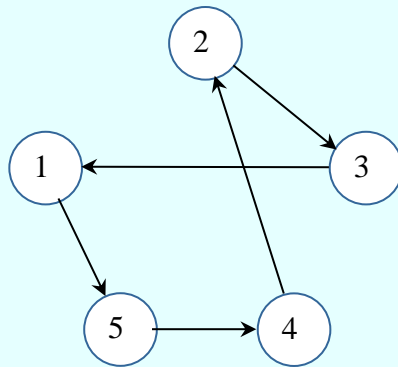
Chromosom	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
C_{21}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C_{22}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_{23}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{24}'	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{25}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
C_{26}	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1



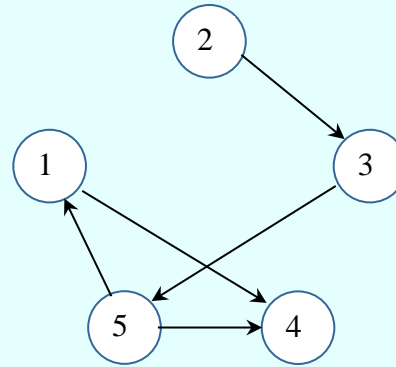
3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (8/9)

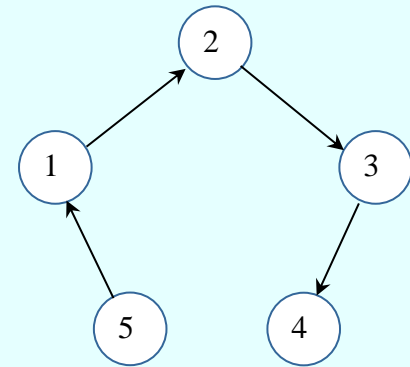
Populacja początkowa dla następnej iteracji (c.d.)



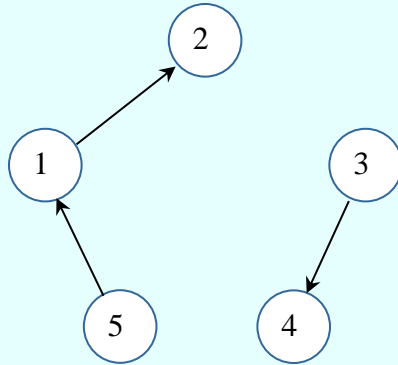
C_{21}



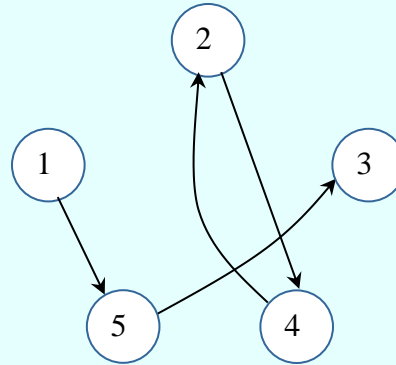
C_{22}



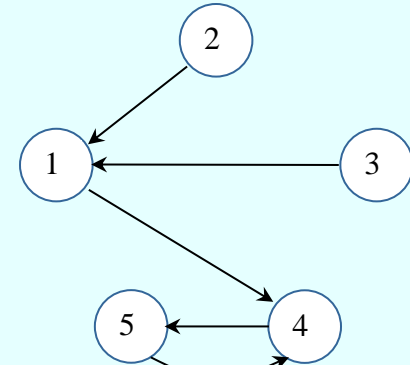
C_{23}



C_{24}'



C_{25}



C_{26}

3.6. Problem komiwojżera

3.6.4. Symulacja działania algorytmu genetycznego (9/9)

Wartości funkcji przystosowania

Chromosom	Numery naruszonych ograniczeń	Długość trasy	Kara	Wartość funkcji przystosowania
C_{21}		72	0	72
C_{22}	(3.14), (3.15), (3.17), (3.19)	77	400	477
C_{23}	(3.14), (3.20)	50	200	250
C_{24}'	(3.12), (3.14), (3.18), (3.20)	31	400	431
C_{25}	(3.13), (3.16), (3.26)	43	300	343
C_{26}	(3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.30)	77	500	577
			Suma	2150

Średnia wartość funkcji przystosowania wynosi 358,33

Najlepsza wartość funkcji przystosowania w tej populacji wynosi 72

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (1/4)

Przykład 3.6

Zdolności produkcyjne zakładów: 40, 50, 30

Zapotrzebowanie odbiorców: 45, 10, 30, 35

Jednostkowe koszty produkcji: 4, 3, 1

Jednostkowe koszty transportu

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Jednostkowe koszty
produkcji i transportu

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 10 & 12 \\ 9 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Znaleźć taki plan produkcji, by zminimalizować łączne koszty produkcji i transportu.

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (2/4)

Model matematyczny

Cel

Minimalizacja łącznych kosztów produkcji i transportu.

Zmienne decyzyjne

Ilość produktu wytworzona:

x_{11} - przez zakład 1 dla odbiorcy 1

x_{12} - przez zakład 1 dla odbiorcy 2

x_{13} - przez zakład 1 dla odbiorcy 3

x_{14} - przez zakład 1 dla odbiorcy 4

x_{21} - przez zakład 2 dla odbiorcy 1

x_{22} - przez zakład 2 dla odbiorcy 2

x_{23} - przez zakład 2 dla odbiorcy 3

x_{24} - przez zakład 2 dla odbiorcy 4

x_{31} - przez zakład 3 dla odbiorcy 1

x_{32} - przez zakład 3 dla odbiorcy 2

x_{33} - przez zakład 3 dla odbiorcy 3

x_{34} - przez zakład 3 dla odbiorcy 4

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (3/4)

Model matematyczny

Funkcja celu

$$\begin{aligned} f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = \\ = 8x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + \\ + 6x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 12x_{24} + \\ + 9x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34} \quad \rightarrow \min \end{aligned}$$

Ograniczenia

$$\text{zakład 1: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40$$

$$\text{zakład 2: } x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$$

$$\text{zakład 3: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30$$

$$\text{odbiorca 1: } x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45$$

$$\text{odbiorca 2: } x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10$$

$$\text{odbiorca 3: } x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$

$$\text{odbiorca 4: } x_{14} + x_{24} + x_{34} = 35$$

Warunki nieujemności

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (4/4)

Rozwiązanie optymalne

$$x_{11} = 0$$

$$x_{21} = 45$$

$$x_{31} = 0$$

$$x_{12} = 0$$

$$x_{22} = 5$$

$$x_{32} = 5$$

$$x_{13} = 30$$

$$x_{23} = 0$$

$$x_{33} = 0$$

$$x_{14} = 10$$

$$x_{24} = 0$$

$$x_{34} = 25$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 670

Plan przewozów				Produkcja	
odbiorca 1	odbiorca 2	odbiorca 3	odbiorca 4		
0	0	30	10	zakład 1	40
45	5	0	0	zakład 2	50
0	5	0	25	zakład 3	30

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.2. Zagadnienie rozdziału (1/4)

Przykład 3.8

Czas pracy doradców firmy consultingowej :

X - 140 godz., **Y** - 140 godz., **Z** - 120 godz.

Wymagania czasowe nowych kontraktów:

Klient	Liczba godzin
A	165
B	50
C	80
D	70

Stawki godzinowe:

Doradca	Klient A	Klient B	Klient C	Klient D
X	9	11,5	12	10
Y	11	13	11,5	12
Z	15	14,5	14	13

W jaki sposób przydzielić doradcom kontrakty tak, by łączny koszt ich realizacji był najmniejszy?

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.2. Zagadnienie rozdziału (2/4)

Model matematyczny

Cel

Minimalizacja kosztów wynagrodzenia doradców.

Zmienne decyzyjne

Liczba godzin pracy:

- x_{11} - doradcy X dla klienta A,
- x_{12} - doradcy X dla klienta B,
- x_{13} - doradcy X dla klienta C,
- x_{14} - doradcy X dla klienta D,
- x_{15} - doradcy X dla fikcyjnego klienta E,

- x_{21} - doradcy Y dla klienta A,
- x_{22} - doradcy Y dla klienta B,
- x_{23} - doradcy Y dla klienta C,
- x_{24} - doradcy Y dla klienta D,
- x_{25} - doradcy Y dla fikcyjnego klienta E,

- x_{31} - doradcy Z dla klienta A,
- x_{32} - doradcy Z dla klienta B,
- x_{33} - doradcy Z dla klienta C,
- x_{34} - doradcy Z dla klienta D,
- x_{35} - doradcy Z dla fikcyjnego
klienta E.

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.2. Zagadnienie rozdziału (3/4)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$\begin{aligned} f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}) = \\ = 9,0x_{11} + 11,5x_{12} + 12,0x_{13} + 10,0x_{14} + 0x_{14} + \\ + 11,0x_{21} + 13,0x_{22} + 11,5x_{23} + 12,0x_{24} + 0x_{25} + \\ + 15,0x_{31} + 14,5x_{32} + 14,0x_{33} + 13,0x_{34} + 0x_{35} \quad \rightarrow \min \end{aligned}$$

Ograniczenia

$$\text{dla doradcy X: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 140 \quad \text{dla klienta A: } x_{11} + x_{21} + x_{31} = 165$$

$$\text{dla doradcy Y: } x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 140 \quad \text{dla klienta B: } x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$$

$$\text{dla doradcy Z: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 120 \quad \text{dla klienta C: } x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$$

$$\text{dla klienta D: } x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70$$

$$\text{dla klienta E: } x_{15} + x_{25} + x_{35} = 35$$

Warunki nieujemności dla zmiennych decyzyjnych

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$$

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.2. Zagadnienie rozdziału (4/4)

Rozwiązanie optymalne

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} = 140 & x_{12} = 0 & x_{13} = 0 & x_{14} = 0 & x_{15} = 0 \\ x_{21} = 25 & x_{22} = 35 & x_{23} = 80 & x_{24} = 0 & x_{25} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 15 & x_{33} = 0 & x_{34} = 70 & x_{35} = 35 \end{array}$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 4037,5

Interpretacja rozwiązania

- doradca A powinien cały czas pracy – 140 godzin – przeznaczyć na pracę z klientem X,
- doradca B powinien pracować 25 godzin z klientem A, 35 godzin z klientem B oraz 80 godzin z klientem C,
- doradca C powinien pracować 15 godzin z klientem B oraz 70 godzin z klientem D. Pozostałe 35 godzin, którymi dysponuje (najdroższy) doradca C, są na razie niewykorzystane.

Minimalny koszt wynagrodzenia doradców przy zapewnieniu realizacji wszystkich kontraktów to 4037,5 zł.

Doradca	Klient A	Klient B	Klient C	Klient D
X	140	0	0	0
Y	25	35	80	0
Z	0	15	0	70

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (1/8)

Przykład 3.8

Mamy układ ośmiu miast, między którymi istnieją połączenia komunikacyjne. Z każdego z nich wywozi się i do każdego przywozi określoną masę towarową wykorzystując do przewozu samochody o tej samej ładowności. Odległości między miastami:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0	31,5	25,0	19,0	32,0	8,0	38,0	34,5
2	31,5	0,0	13,0	40,0	30,5	32,0	17,0	44,0
3	25,0	13,0	0,0	24,0	25,5	29,5	31,5	38,5
4	19,0	40,0	24,0	0,0	16,5	27,0	25,0	15,5
5	32,0	30,5	25,5	16,5	0	40,0	48,0	14,0
6	8,0	32,0	29,5	27,0	40,0	0	31,5	48,0
7	38,0	17,0	31,5	25,0	48,0	31,5	0	61,5
8	34,5	44,0	38,5	15,5	14,0	48,0	61,5	0

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (2/8)

Wyjazd z miasta i dzień pierwszy	Przyjazd do miasta j - dzień pierwszy							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	3	1	4	1	4	2
2	4	0	1	3	2	3	2	3
3	7	2	0	0	5	0	4	4
4	0	1	3	0	3	3	3	0
5	1	0	7	5	0	0	1	3
6	0	0	2	2	2	0	1	2
7	2	3	2	1	5	1	0	1
8	3	5	0	2	3	0	0	0

Wyjazd z miasta i dzień drugi	Przyjazd do miasta j - dzień drugi							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	2	1	4	1	2	3	2
2	3	0	0	3	2	3	2	1
3	1	4	0	1	4	4	1	0
4	3	0	3	0	3	2	1	1
5	2	3	3	2	0	3	1	3
6	0	5	1	5	3	0	3	1
7	5	1	3	3	4	0	0	1
8	5	1	3	0	2	2	0	0

Znaleźć plan przewozów minimalizujących puste przebiegi.

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (3/8)

Ilości samochodów, przyjeżdżających pierwszego dnia do kolejnych miast:

$$\text{miasto 1: } 0 + 4 + 7 + 0 + 1 + 0 + 2 + 3 = 17$$

$$\text{miasto 2: } 0 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0 + 3 + 5 = 11$$

$$\text{miasto 3: } 3 + 1 + 0 + 3 + 7 + 2 + 2 + 0 = 18$$

$$\text{miasto 4: } 1 + 3 + 0 + 0 + 5 + 2 + 1 + 2 = 14$$

$$\text{miasto 5: } 4 + 2 + 5 + 3 + 0 + 2 + 5 + 3 = 24$$

$$\text{miasto 6: } 1 + 3 + 0 + 3 + 0 + 0 + 1 + 0 = 8$$

$$\text{miasto 7: } 4 + 2 + 4 + 3 + 1 + 1 + 0 + 0 = 15$$

$$\text{miasto 8: } 2 + 3 + 4 + 0 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15.$$

Łączna liczba samochodów przyjeżdżających do poszczególnych miast pierwszego dnia wynosi

$$17 + 11 + 18 + 14 + 24 + 8 + 15 + 15 = 122$$

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (4/8)

Ilości samochodów wyjeżdżających następnego dnia:

$$\text{miasto 1: } 0 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 + 3 + 2 = 15$$

$$\text{miasto 2: } 3 + 0 + 0 + 3 + 2 + 3 + 2 + 1 = 14$$

$$\text{miasto 3: } 1 + 4 + 0 + 1 + 4 + 4 + 1 + 0 = 15$$

$$\text{miasto 4: } 3 + 0 + 3 + 0 + 3 + 2 + 1 + 1 = 13$$

$$\text{miasto 5: } 2 + 3 + 3 + 2 + 0 + 3 + 1 + 3 = 17$$

$$\text{miasto 6: } 0 + 5 + 1 + 5 + 3 + 0 + 3 + 1 = 18$$

$$\text{miasto 7: } 5 + 1 + 3 + 3 + 4 + 0 + 0 + 1 = 17$$

$$\text{miasto 8: } 5 + 1 + 3 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 13$$

Łączna liczba samochodów, których wyjazd jest zaplanowany drugiego dnia wynosi:

$$15 + 14 + 15 + 13 + 17 + 18 + 17 + 13 = 122.$$

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (5/8)

Różnice w stosunku do planu:

- w mieście 1 pojawia się nadwyżka $17 - 15 = 2$ samochodów (**dostawca 1**),
- w mieście 2 pojawia się niedobór $14 - 11 = 3$ samochodów (**odbiorca 1**),
- w mieście 3 pojawia się nadwyżka $18 - 15 = 3$ samochodów (**dostawca 2**),
- w mieście 4 pojawia się nadwyżka $14 - 13 = 1$ samochód (**dostawca 3**),
- w mieście 5 pojawia się nadwyżka $24 - 17 = 7$ samochodów (**dostawca 4**),
- w mieście 6 pojawia się niedobór $18 - 8 = 10$ samochodów (**odbiorca 2**),
- w mieście 7 pojawia się niedobór $17 - 15 = 2$ samochodów (**odbiorca 3**),
- w mieście 8 pojawia się nadwyżka $15 - 13 = 2$ samochodów (**dostawca 5**).

Dostawcy	Odbiorcy		
	Miasto 2 (odbiorca 1)	Miasto 6 (odbiorca 2)	Miasto 7 (odbiorca 3)
Miasto 1 (dostawca 1)	31,5	8	38
Miasto 3 (dostawca 2)	13	29,5	31,5
Miasto 4 (dostawca 3)	40	27	25
Miasto 5 (dostawca 4)	30,5	40	48
Miasto 8 (dostawca 8)	44	48	61,5

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (6/8)

Model matematyczny

Cel

określenie takiego planu przewozów, który minimalizuje łączną liczbę kilometrów pustych przebiegów.

Zmienne decyzyjne

Liczba pustych przebiegów:

x_{12} — z miasta 1 do miasta 2,

x_{16} — z miasta 1 do miasta 6,

x_{17} — z miasta 1 do miasta 7,

x_{32} — z miasta 3 do miasta 2,

x_{36} — z miasta 3 do miasta 6,

x_{37} — z miasta 3 do miasta 7,

x_{42} — z miasta 4 do miasta 2,

x_{46} — z miasta 4 do miasta 6,

x_{47} — z miasta 4 do miasta 7,

x_{52} — z miasta 5 do miasta 2,

x_{56} — z miasta 5 do miasta 6,

x_{57} — z miasta 5 do miasta 7,

x_{82} — z miasta 8 do miasta 2,

x_{84} — z miasta 8 do miasta 4,

x_{86} — z miasta 8 do miasta 6.

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (7/8)

Funkcja celu

$$31,5x_{12} + 8x_{16} + 38x_{17} + 13x_{32} + 29,5x_{36} + 31,5x_{37} + 40x_{42} + 27x_{46} + 25x_{47} + 30,5x_{52} + 40x_{56} + 48x_{57} + 44x_{82} + 48x_{84} + 61,5x_{86} \rightarrow \min$$

Ograniczenia

$$\text{dostawca 1: } x_{12} + x_{16} + x_{17} = 2,$$

$$\text{dostawca 2: } x_{32} + x_{37} + x_{38} = 3,$$

$$\text{dostawca 3: } x_{42} + x_{46} + x_{47} = 1,$$

$$\text{dostawca 4: } x_{52} + x_{56} + x_{57} = 7,$$

$$\text{dostawca 5: } x_{82} + x_{86} + x_{87} = 2,$$

$$\text{odbiorca 1: } x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{82} = 3,$$

$$\text{odbiorca 2: } x_{16} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{86} = 10$$

$$\text{odbiorca 3: } x_{17} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{87} = 2$$

Warunki nieujemności

$$x_{12}, x_{16}, x_{17}, x_{32}, x_{36}, x_{37}, x_{42}, x_{46}, x_{47}, x_{52}, x_{56}, x_{57}, x_{82}, x_{84}, x_{86} \geq 0.$$

3.7. Przykłady wykorzystania zadania transportowego

3.7.1. Minimalizacja pustych przebiegów (8/8)

Rozwiązanie optymalne

$$x_{12} = 0 \qquad x_{16} = 2 \qquad x_{17} = 0,$$

$$x_{32} = 3 \qquad x_{37} = 0 \qquad x_{38} = 0,$$

$$x_{42} = 0 \qquad x_{46} = 0 \qquad x_{47} = 1,$$

$$x_{52} = 0 \qquad x_{56} = 6 \qquad x_{57} = 1,$$

$$x_{82} = 0 \qquad x_{86} = 2 \qquad x_{87} = 0.$$

Optymalna wartość funkcji celu

464

Interpretacja rozwiązania

2 puste przebiegi na trasie z miasta 1 do miasta 6 (16 km),

3 puste przebiegi z miasta 3 do miasta 2 (39 km),

1 pusty przebieg na trasie z miasta 4 do miasta 7 (25 km),

6 pustych przebiegów na trasie z miasta 5 do miasta 6 (240 km),

1 pusty przebieg na trasie z miasta 5 do 7, (48 km)

2 puste przebiegi na trasie z miasta 8 do miasta 6 (96 km)

Minimalna liczba kilometrów pustych przebiegów – 464.

Pora na relaks

