# Транспортная задача

Т. Тжаскалик

***Введение в исследование операций с применением компьютера***

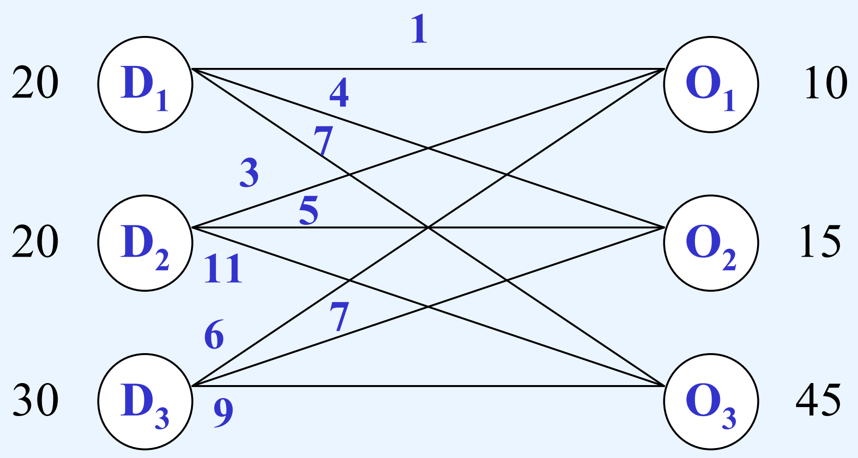
# Постановка транспортной задачи

Известны фиксированное количество поставщиков и получателей продукта, объемы поставок из каждого источника и потребности каждого получателя в рассматриваемый период времени, а также приведенные издержки транспортировки для каждой пары «поставщик – получатель», пропорциональные количеству перевозимого товара. Необходимо составить такой план поставок, который минимизирует совокупные издержки

# Транспортная задача как задача линейного программирования (1)

## Пример 3.1

| Местность | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $D_1$ | 1 | 4 | 7 |
| $D_2$ | 3 | 5 | 11 |
| $D_3$ | 6 | 7 | 9 |



# Транспортная задача как задача линейного программирования (2)

**Цель**

Минимизация транспортных издержек на доставку товара между всеми поставщиками и получателями.

**Решающие переменные**

$x_{11}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D1 до O1

$x_{12}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D1 до O2

$x_{13}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D1 до O3

$x_{21}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D2 до O1

$x_{22}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D2 до O2

$x_{23}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D2 до O3

$x_{31}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D3 до O1

$x_{32}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D3 до O2

$x_{33}$ - планируемый объем перевозок на трассе от D3 до O3

# Транспортная задача как задача линейного программирования (3)

## Целевая функция

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} +$$
$$+3x_{21} + 5x_{22} + 11x_{23} + 6x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} \to \min$$

## Ограничения

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$

$$x_{11}, \ldots, x_{33} \geq 0$$

## Оптимальное решение

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 5 & x_{12} = 0 & x_{13} = 15 \\ x_{21} = 5 & x_{22} = 15 & x_{23} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = 30 \end{array}$$

Минимальные транспортные издержки равны 470.

# Транспортная задача как задача линейного программирования (4)

## Матричная форма

$c$ - вектор целевой функции,

$A$ - матрица коэффициентов,

$b$ - вектор ограничений,

$x$ - вектор переменных.

$$\begin{aligned} cx &\to \min \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{c}x &\to \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

причем $\bar{c} = -c$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 & 5 & 11 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}$$

# Прямая и двойственная задача (1)

**Прямая задача (ZP)**

$$\bar{c}x \to \max$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

**Двойственная задача (ZD)**

$$yb \to \min$$
$$yA \geq \bar{c}$$
$$y \text{ – любое}$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6]$$

Пусть $y = [u, v]$

$u$ – вектор переменных ZD, соответствующих поставщикам,

$v$ – вектор переменных ZD, соответствующих получателям.

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \qquad v = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

$$y = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

# Прямая и двойственная задача (2)

## Двойственная задача

$$yb = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix} = 20u_1 + 20u_2 + 30u_3 + 10v_1 + 15v_2 + 45v_3 \to \min$$

$$yA = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ -3 \\ -5 \\ -11 \\ -6 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix} = \overline{c}$$

$$u_1 + v_1 \geq -1 \qquad u_1 + v_2 \geq -4 \qquad u_1 + v_3 \geq -7$$

$$u_2 + v_1 \geq -3 \qquad u_2 + v_2 \geq -5 \qquad u_2 + v_3 \geq -11$$

$$u_3 + v_1 \geq -6 \qquad u_3 + v_2 \geq -7 \qquad u_3 + v_3 \geq -9$$

# Прямая и двойственная задача (3)

## Прямая задача

$$-x_{11} - 4x_{12} - 7x_{13} - 3x_{21} - 5x_{22} - 11x_{23} - 6x_{31} - 7x_{32} - 9x_{33} \to \max$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$

$$x_{11},\ldots, x_{33} \geq 0$$

## Двойственная задача

$$20u_1 + 20u_2 + 30u_3 + 10v_1 + 15v_2 + 45v_3 \to \min$$

$$u_1 + v_1 + 1 \geq 0 \qquad u_1 + v_2 + 4 \geq 0 \qquad u_1 + v_3 + 7 \geq 0$$
$$u_2 + v_1 + 3 \geq 0 \qquad u_2 + v_2 + 5 \geq 0 \qquad u_2 + v_3 + 11 \geq 0$$
$$u_3 + v_1 + 6 \geq 0 \qquad u_3 + v_2 + 7 \geq 0 \qquad u_3 + v_3 + 9 \geq 0$$

$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ - любые

# Прямая и двойственная задача (4)

## Зависимости между переменными и ограничениями

$x_{11}$ соответствует условию $u_1 + v_1 + 1 \geq 0$

$x_{12}$ соответствует условию $u_1 + v_2 + 4 \geq 0$

$x_{13}$ соответствует условию $u_1 + v_3 + 7 \geq 0$

$x_{21}$ соответствует условию $u_2 + v_1 + 3 \geq 0$

$x_{22}$ соответствует условию $u_2 + v_2 + 5 \geq 0$

$x_{23}$ соответствует условию $u_2 + v_3 + 11 \geq 0$

$x_{31}$ соответствует условию $u_3 + v_1 + 6 \geq 0$

$x_{32}$ соответствует условию $u_3 + v_2 + 7 \geq 0$

$x_{33}$ соответствует условию $u_3 + v_3 + 9 \geq 0$

# Прямая и двойственная задача (5)

## Теорема о комплементарности

$$(yA - \overline{c}) = 0$$

т.е.:

$$([u, v]\, A - \overline{c})\, x = 0$$

поэтому:

$$(u_1 + v_1 + 1)\, x_{11} = 0 \qquad (u_1 + v_2 + 4)\, x_{12} = 0$$
$$(u_2 + v_1 + 3)\, x_{21} = 0 \qquad (u_2 + v_2 + 5)\, x_{22} = 0$$
$$(u_3 + v_1 + 6)\, x_{31} = 0 \qquad (u_3 + v_2 + 7)\, x_{32} = 0$$

$$(u_1 + v_3 + 7)\, x_{13} = 0$$
$$(u_2 + v_3 + 11)\, x_{23} = 0$$
$$(u_3 + v_3 + 9)\, x_{33} = 0$$

# Прямая и двойственная задача (6)

## Выводы из теоремы о комплементарности

Если $x_{11} > 0$, то $u_1 + v_1 + 1 = 0$

Если $x_{12} > 0$, то $u_1 + v_2 + 4 = 0$

Если $x_{13} > 0$, то $u_1 + v_3 + 7 = 0$

Если $x_{21} > 0$, то $u_2 + v_1 + 3 = 0$

Если $x_{22} > 0$, то $u_2 + v_2 + 5 = 0$

Если $x_{23} > 0$, то $u_2 + v_3 + 11 = 0$

Если $x_{31} > 0$, то $u_3 + v_1 + 6 = 0$

Если $x_{32} > 0$, то $u_3 + v_2 + 7 = 0$

Если $x_{33} > 0$, то $u_3 + v_3 + 9 = 0$

# Сбалансированная транспортная задача

## Обозначения

$m$ - количество поставщиков,

$n$ - количество получателей,

$a_i$ - предложение $i$-го поставщика ($i = 1,...,m$),

$b_j$ - спрос $j$-го получателя ($j = 1,...,n$),

$x_{ij}$ - количество товара, доставленное от $i$-го поставщика $j$-му получателю,

$c_{ij}$ – стоимость перевозки единицы товара от $i$-го поставщика $j$-му получателю.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

## Постановка задачи

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{для } i = 1,...,m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{для } j = 1,...,n$$

# Первое допустимое базисное решение

**Определения**

**матрица перевозок** **матрица издержек**

$$X = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

**Базисное решение** - содержит $n + m$ - 1 базисных переменных

**Базисные узлы** - соответствуют базисным переменным

**Линия** - узлы конкретной строки или конкретного столбца

**Объем перевозок** $x_{ij} = \min\,(a_i, b_j)$

**Предложение и спрос после модификации**

$$a'_i = a_i - x_{ij}$$

$$b'_j = b_j - x_{ij}$$

# Метод минимального элемента матрицы затрат (1)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 * | | | ~~20~~ 10 |
| 0 | | | 20 |
| 0 | | | 30 |
| ~~10~~ 0 | 15 | 45 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | |
| 1 * | 4 | 7 | |
| 3 | 5 | 11 | |
| 6 | 7 | 9 | |

## Метод минимального элемента матрицы затрат (2)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 | 10 * | 0 | ~~10~~ 0 |
| 0 | | | 20 |
| 0 | | | 30 |
| 0 | ~~15~~ 5 | 45 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | |
| 1 * | 4 * | 7 | |
| 3 | 5 | 11 | |
| 6 | 7 | 9 | |

# Метод минимального элемента матрицы затрат (3)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 0 | 0 |
| 0 | 5 * | | ~~20~~ 15 |
| 0 | 0 | | 30 |
| 0 | ~~5~~ 0 | 45 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | |
| 1 * | 4 * | 7 | |
| 3 | 5 * | 11 | |
| 6 | 7 | 9 | |

# Метод минимального элемента матрицы затрат (4)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 0 | 0 |
| 0 | 5 | | 15 |
| 0 | 0 | 30 * | ~~30~~ 0 |
| 0 | 0 | ~~45~~ 15 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | |
| 1 * | 4 * | 7 | |
| 3 | 5 * | 11 | |
| 6 | 7 | 9 * | |

# Метод минимального элемента матрицы затрат (5)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 0 | 0 |
| 0 | 5 | 15 * | ~~15~~ 0 |
| 0 | 0 | 30 | 0 |
| 0 | 0 | ~~15~~ 0 | Спрос |

| Матрица приведенных издержек | | |
|---|---|---|
| 1 * | 4 * | 7 |
| 3 | 5 * | 11 * |
| 6 | 7 | 9 * |

## Метод минимального элемента матрицы затрат (6)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 * | 10 * | 0 | 0 |
| 0 | 5 * | 15 * | 0 |
| 0 | 0 | 30 * | 0 |
| 0 | 0 | 0 | Спрос |

| Матрица приведенных издержек | | |
|---|---|---|
| 1 * | 4 * | 7 |
| 3 | 5 * | 11 * |
| 6 | 7 | 9 * |

# Метод VAM (1)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 * | | | ~~20~~ 10 |
| 0 | | | 20 |
| 0 | | | 30 |
| ~~10~~ 0 | 15 | 45 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | Разности по строкам |
| 1 * | 4 | 7 | 3 |
| 3 | 5 | 11 | 2 |
| 6 | 7 | 9 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | Разности по столбцам |

# Метод VAM (2)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 | 0 | | 10 |
| 0 | 15 * | | ~~20~~ 5 |
| 0 | 0 | | 30 |
| 0 | ~~15~~ 0 | 45 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | Разности по строкам |
| 1 * | 4 | 7 | 3 |
| 3 | 5 * | 11 | 6 |
| 6 | 7 | 9 | 2 |
| - | 1 | 2 | Разности по столбцам |

# Метод VAM (3)

| Начальное решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 | 0 | 10 * | ~~10~~ 0 |
| 0 | 15 | 5 * | ~~5~~ 0 |
| 0 | 0 | 30 * | ~~30~~ 0 |
| 0 | 0 | ~~45~~ 0 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | Разности по строкам |
| 1 * | 4 | 7 * | - |
| 3 | 5 * | 11 * | - |
| 6 | 7 | 9 * | - |
| - | - | - | Разности по столбцам |

## Алгоритм метода потенциалов

1. Найти первое допустимое базисное решение.
2. Выяснить, является ли оно оптимальным или нет.
3. Если решение не оптимально, то, найти новое соседнее базисное решение. Для этого необходимо:
   - выбрать переменную, вводимую в базис,
   - выбрать переменную, выводимую из базиса,
   - найти базисное решение, соответствующее соседнему базису.
4. Если полученное решение оптимально, то завершить вычисления.

# Показатели оптимальности (1)

## Построение системы уравнений

| Начальное решение (Метод минимального элемента) | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 * | 10 * | 0 | 0 |
| 0 | 5 * | 15 * | 0 |
| 0 | 0 | 30 * | 0 |
| 0 | 0 | 0 | Спрос |

Поскольку $x_{11} > 0$, то $u_1 + v_1 + 1 = 0$

Поскольку $x_{12} > 0$, то $u_1 + v_2 + 4 = 0$

Поскольку $x_{22} > 0$, то $u_2 + v_2 + 5 = 0$

Поскольку $x_{23} > 0$, то $u_2 + v_3 + 11 = 0$

Поскольку $x_{33} > 0$, то $u_3 + v_3 + 9 = 0$

$$u_1 = a, \qquad v_1 = -1 - a$$
$$u_2 = -1 + a, \quad v_2 = -4 - a$$
$$u_3 = 1 + a, \quad v_3 = -10 - a$$

# Показатели оптимальности (2)

$$c'_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} u_1 = a, & v_1 = -1 - a \\ u_2 = -1 + a, & v_2 = -4 - a \\ u_3 = 1 + a, & v_3 = -10 - a \end{array}$$

$$c'_{11} = u_1 + v_1 + 1 = a + (-1 - a) + 1 = 0$$
$$c'_{12} = u_1 + v_2 + 4 = a + (-4 - a) + 4 = 0$$
$$c'_{13} = u_1 + v_3 + 7 = a + (-10 - a) + 7 = -3$$
$$c'_{21} = u_2 + v_1 + 3 = (-1 + a) + (-1 - a) + 3 = 1$$
$$c'_{22} = u_2 + v_2 + 5 = (-1 + a) + (-4 - a) + 5 = 0$$
$$c'_{23} = u_2 + v_3 + 11 = (-1 + a) + (-10 - a) + 11 = 0$$
$$c'_{31} = u_3 + v_1 + 6 = (1 + a) + (-1 - a) + 6 = 6$$
$$c'_{32} = u_3 + v_2 + 7 = (1 + a) + (-4 - a) + 7 = 4$$
$$c'_{33} = u_3 + v_3 + 9 = (1 + a) + (-10 - a) + 9 = 0$$

$$\mathbf{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

# Критерий оптимальности

Если значения всех показателей оптимальности неотрицательны, то рассматриваемое решение оптимально. Если хотя бы один показатель оптимальности отрицателен, то существует возможность улучшить решение.

$$\mathbf{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Начальное решение может быть улучшено.

# Критерий ввода

Находим в матрице показателей оптимальности наименьший элемент. Соответствующую ему переменную вводим в новый базис.

$$\mathbf{C'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

в базис вводится переменная $x_{13}$.

# Критерий вывода

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 10 | 0 |
| 0 | 5 | 15 |
| 0 | 0 | 45 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 9 − | 1 + |
| 0 | 6 + | 14 − |
| 0 | 0 | 45 |

**Положительный полуцикл:** узлы (2, 2), (1, 3)

**Отрицательный полуцикл:** узлы (1, 2), (2, 3)

Из базиса выводится та переменная отрицательного полуцикла, для которой объем перевозок в предыдущем решении оказался минимальным.

# Переход к соседнему базисному решению

| Начальное решение (Метод минимального элемента) | | | Значение целевой функции |
|---|---|---|---|
| 10 | 10– | 0+ | **510** |
| 0 | 5+ | 15– | |
| 0 | 0 | 30 | |

| Новое допустимое решение (итерация 1) | | | Значение целевой функции |
|---|---|---|---|
| 10 * | 0 | 10 * | **480** |
| 0 | 15 * | 5 * | |
| 0 | 0 | 30 * | |

# Процесс вычислений (1)

## Итерация 2

| Матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 0 * | 0 | –3 * |
| 1 | 0 * | 0 * |
| 6 | 4 | 0 * |

**Система уравнений:**

$$u_1 + v_1 = 0$$
$$u_1 + v_3 - 3 = 0$$
$$u_2 + v_2 = 0$$
$$u_2 + v_3 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 0$$

**Решение:**

$u_1 = 0,\quad v_1 = 0,$

$u_2 = -3,\quad v_2 = 3,$

$u_3 = -3,\quad v_3 = 3.$

# Процесс вычислений (2)

## Итерация 2 (продолжение)

| Предыдущая матрица показателей оптимальности | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 * | 0 * | –3 | 0 |
| 1 | 0 * | 0 * | –3 |
| 6 | 4 | 0 * | –3 |
| 0 | 3 | 3 | $v_j$ |

| Новая матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 0 * | 3 | 0 * |
| –2 | 0 * | 0 * |
| 3 | 4 | 0 * |

# Процесс вычислений (3)

## Итерация 2 (продолжение)

| Допустимое решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| $10^{-}$ | 0 | $10^{+}$ | 20 |
| $0^{+}$ | 15 | $5^{-}$ | 20 |
| 0 | 0 | 30 | 30 |
| 10 | 15 | 45 | Спрос |

| Матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 0 * | 3 | 0 * |
| –2 | 0 * | 0 * |
| 3 | 4 | 0 * |

# Процесс вычислений (4)

## Итерация 2 (продолжение)

| Предыдущее допустимое решение | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| $10^{-}$ | 0 | $10^{+}$ | 20 |
| $0^{+}$ | 15 | $5^{-}$ | 20 |
| 0 | 0 | 30 | 30 |
| 10 | 15 | 45 | Спрос |

| Новое допустимое решение | | | Значение целевой функции (итерация 2) |
|---|---|---|---|
| 5 * | 0 | 15 * | **470** |
| 5 * | 15 * | 0 | |
| 0 | 0 | 30 * | |

# Процесс вычислений (5)

## Итерация 3

| Матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 0 * | 3 | 0 * |
| –2 * | 0 * | 0 |
| 3 | 4 | 0 * |

**Система уравнений**

$$u_1 + v_1 = 0$$
$$u_1 + v_3 = 0$$
$$u_2 + v_1 - 2 = 0$$
$$u_2 + v_2 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 0$$

**Решение:**

$u_1 = 0,\quad v_1 = 0,$

$u_2 = 2,\quad v_2 = -2,$

$u_3 = 0,\quad v_3 = 0.$

# Процесс вычислений (6)

## Итерация 3 (продолжение)

| Предыдущая матрица показателей оптимальности | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 * | 3 | 0 * | 0 |
| –2 | 0 * | 0 * | 2 |
| 3 | 4 | 0 * | 0 |
| 0 | –2 | 0 | $v_j$ |

| Новая матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 0 * | 1 | 0 * |
| 0 * | 0 * | 2 |
| 3 | 2 | 0 * |

# Балансирование транспортной задачи (1)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

**Пример 3.2**

$$a_1 = 25,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30$$

$$b_1 = 10,\ b_2 = 15,\ b_3 = 45$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$b_4 = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = (25 + 20 + 30) - (10 + 15 + 45) = 5$$

# Балансирование транспортной задачи (2)

## Начальное решение

| Начальное решение (Метод минимального элемента) | | | | Предложение |
|---|---|---|---|---|
| 10 * | 10 * | 0 | 5 * | 25 |
| 0 | 5 * | 15 * | 0 | 20 |
| 0 | 0 | 30 * | 0 | 30 |
| 10 | 15 | 45 | 5 | Спрос |
| Матрица приведенных издержек | | | | Значение целевой функции **510** |
| 1 | 4 | 7 | 0 | |
| 3 | 5 | 11 | 0 | |
| 6 | 7 | 9 | 0 | |

## Оптимальное решение

$$x_{11} = 10 \quad x_{12} = 0 \quad x_{13} = 15 \quad x_{14} = 0$$
$$x_{21} = 0 \quad x_{22} = 15 \quad x_{23} = 0 \quad x_{24} = 5$$
$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 0 \quad x_{33} = 30 \quad x_{34} = 0$$

Оптимальное значение целевой функции равно 460.

# Балансирование транспортной задачи (3)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

**Пример 3.3**

$$a_1 = 20,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30$$

$$b_1 = 10,\ b_2 = 15,\ b_3 = 50$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a_4 = (b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) = (10 + 15 + 50) - (20 + 20 + 30) = 5$$

# Балансирование транспортной задачи (4)

## Начальное решение

| Начальное решение (Метод VAM) | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 * | 0 | 10 * | 20 |
| 0 | 15 * | 5 * | 20 |
| 0 | 0 | 30 * | 30 |
| 0 | 0 | 5 * | 5 |
| 10 | 15 | 50 | $v_j$ |
| Новая матрица показателей оптимальности | | | |
| 1 | 4 | 7 | |
| 3 | 5 | 11 | |
| 6 | 7 | 9 | |
| 0 | 0 | 0 | |

## Оптимальное решение

$$x_{11} = 10 \quad x_{12} = 0 \quad x_{13} = 10$$
$$x_{21} = 0 \quad x_{22} = 15 \quad x_{23} = 5$$
$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 0 \quad x_{33} = 30$$
$$x_{11} = 0 \quad x_{12} = 0 \quad x_{13} = 5$$

Оптимальное значение целевой функции равно 470.

# Вырождение транспортной задачи (1)

**Пример 3.4**

$a_1$=10, $a_2$=20, $a_3$=30

$b_1$=10, $b_2$=20, $b_3$=30

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

| Начальное решение (Метод северо-западного угла) | | | Предложение |
|---|---|---|---|
| 10 * | 0 * | 0 | ~~10~~ 0 |
| 0 | 20 * | 0 * | ~~20~~ 0 |
| 0 | 0 | 30 * | ~~30~~ 0 |
| ~~10~~ 0 | ~~20~~ 0 | ~~30~~ 0 | Спрос |

# Вырождение транспортной задачи (2)

## Следующие начальные решения

| | | |
|---|---|---|
| 10* | 0 * | 0 |
| 0 | 20* | 0 |
| 0 | 0 * | 30* |

| | | |
|---|---|---|
| 10* | 0 | 0 |
| 0 * | 20 * | 0 |
| 0 | 0 * | 30* |

| | | |
|---|---|---|
| 10* | 0 | 0 |
| 0 * | 20* | 0 * |
| 0 | 0 | 30* |

# Процесс вычислений (1)

## Итерация 1

$$u_1 + v_1 + 7 = 0$$
$$u_1 + v_2 + 4 = 0$$
$$u_2 + v_2 + 6 = 0$$
$$u_2 + v_3 + 1 = 0$$
$$u_3 + v_3 + 5 = 0$$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -7$$
$$u_2 = -2, \quad v_2 = -4$$
$$u_3 = -6, \quad v_3 = 1$$

| Матрица приведенных издержек | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 6 | 1 | –2 |
| 2 | 3 | 5 | –6 |
| –7 | –4 | 1 | $v_j$ |

| Матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 |
| –6 | 0 | 0 |
| –11 | –7 | 0 |

# Процесс вычислений (2)

## Итерация 1 (продолжение)

| Начальное решение | | | Начальное значение целевой функции |
|---|---|---|---|
| 10– | 0+ | 0 | 340 |
| 0 | 20– | 0+ | |
| 0+ | 0 | 30– | |

| Новое допустимое решение | | | Значение целевой функции (итерация 1) |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 * | 0 | 230 |
| 0 | 10 * | 10 * | |
| 10 * | 0 | 20 * | |

# Процесс вычислений (3)

## Итерация 2

| Предыдущая матрица показателей оптимальности | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 * | 0 * | 5 | 0 |
| –6 | 0 * | 0 * | 0 |
| –11 | –7 | 0 * | 0 |
| 11 | 0 | 0 | $v_j$ |
| **Новая матрица показателей оптимальности** | | | |
| 11 | 0 * | 5 | |
| 5 | 0 * | 0 * | |
| 0 * | –7 | 0 * | |

# Процесс вычислений (4)

## Итерация 2 (продолжение)

| Начальное решение | | | Начальное значение целевой функции |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0 | 230 |
| 0 | $10^{-}$ | $10^{+}$ | |
| 10 | $0^{+}$ | $20^{-}$ | |

| Новое допустимое решение | | | Значение целевой функции (итерация 2) |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 * | 0 | 160 |
| 0 | 0 | 20 * | |
| 10 * | 10 * | 10 * | |

# Процесс вычислений (5)

## Итерация 3

| Предыдущая матрица показателей оптимальности | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|
| 11 | 0 | 5 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 7 |
| 0 | –7 | 0 | 7 |
| –7 | 0 | –7 | $v_j$ |
| **Новая матрица показателей оптимальности** | | | |
| 4 | 0 * | –2 | |
| 5 | 7 | 0 * | |
| 0 * | 0 * | 0 * | |

# Процесс вычислений (6)

## Итерация 3 (продолжение)

| Начальное решение | | | Начальное значение целевой функции |
|---|---|---|---|
| 0 | $10^{-}$ | $0^{+}$ | |
| 0 | 0 | 20 | |
| 10 | $10^{+}$ | $10^{-}$ | **160** |

| Новое допустимое решение | | | Значение целевой функции (итерация 3) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 20 * | |
| 0 | 0 | 20 * | |
| 10 * | 20 * | 0 * | **140** |

# Процесс вычислений (7)

## Итерация 4

| Предыдущая матрица показателей оптимальности | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 0 * | –2 | 0 |
| 5 | 7 | 0 * | –2 |
| 0 * | 0 * | 0 * | –2 |
| 2 | 2 | 2 | $v_j$ |

| Новая матрица показателей оптимальности | | |
|---|---|---|
| 6 | 2 | 0 * |
| 5 | 7 | 0 * |
| 0 * | 0 * | 0 * |

# Минимизация порожних пробегов (1)

## Пример 3.5

Расстояния между городами:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 315 | 250 | 190 | 320 | 80 | 380 | 345 |
| 2 | | 0 | 130 | 400 | 305 | 320 | 170 | 440 |
| 3 | | | 0 | 240 | 245 | 295 | 315 | 385 |
| 4 | | | | 0 | 165 | 270 | 520 | 155 |
| 5 | | | | | 0 | 400 | 480 | 140 |
| 6 | | | | | | 0 | 315 | 480 |
| 7 | | | | | | | 0 | 615 |
| 8 | | | | | | | | 0 |

# Минимизация порожних пробегов (2)

## Пример 3.5 (продолжение)

| Поставка в $i$-й город | Вывоз из $i$ -го города: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 21 | 18 | 19 | 16 | 17 | 10 | 9 | 110 |
| 2 | 14 | 0 | 12 | 15 | 9 | 11 | 6 | 4 | 71 |
| 3 | 18 | 9 | 0 | 13 | 11 | 12 | 5 | 6 | 74 |
| 4 | 13 | 8 | 9 | 0 | 7 | 14 | 3 | 7 | 61 |
| 5 | 16 | 18 | 10 | 8 | 0 | 6 | 2 | 8 | 68 |
| 6 | 18 | 19 | 6 | 11 | 9 | 0 | 6 | 2 | 71 |
| 7 | 8 | 7 | 6 | 4 | 3 | 9 | 0 | 2 | 39 |
| 8 | 4 | 3 | 6 | 10 | 3 | 4 | 2 | 0 | 32 |
| $w_i$ | 91 | 85 | 67 | 80 | 58 | 73 | 34 | 38 | |

Найти план перевозок, минимизирующий порожние пробеги.

# Минимизация порожних пробегов (3)

## Излишек/нехватка автомобилей в каждом городе

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 110 | 71 | 74 | 61 | 68 | 71 | 39 | 32 |
| $w_i$ | 91 | 85 | 67 | 80 | 58 | 73 | 34 | 38 |
| $\boldsymbol{w_i}$ | **19** | **–14** | **7** | **–19** | **10** | **–2** | **5** | **–6** |

$a_1$ – излишек автомобилей в городе 1 (поставщик 1),
$a_2$ – излишек автомобилей в городе 3 (поставщик 2),
$a_3$ – излишек автомобилей в городе 5, (поставщик 3),
$a_4$ – излишек автомобилей в городе 7 (поставщик 4),

$b_1$ – нехватка автомобилей в городе 2 (получатель 1),
$b_2$ – нехватка автомобилей в городе 4 (получатель 2),
$b_3$ – нехватка автомобилей в городе 6 (получатель 3),
$b_4$ – нехватка автомобилей в городе 8 (получатель 4).

# Минимизация порожних пробегов (4)

## Предложение и спрос на порожние автомобили

| Поставщик | Получатель | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
| $a_1$ | 315 | 190 | 80 | 345 |
| $a_2$ | 130 | 240 | 295 | 385 |
| $a_3$ | 305 | 165 | 400 | 140 |
| $a_4$ | 170 | 520 | 315 | 615 |

# Минимизация порожних пробегов (5)

**Цель**

Составить такой план перевозок, который минимизирует совокупное количество «автомобиле-километров» порожнего пробега.

**Решающие переменные**

количество порожних пробегов:

$x_{11}$ – из города 1 в город 2,
$x_{12}$ – из города 1 в город 4,
$x_{13}$ – из города 1 в город 6,
$x_{14}$ – из города 1 в город 8,

$x_{21}$ – из города 2 в город 2,
$x_{22}$ – из города 2 в город 4,
$x_{23}$ – из города 2 в город 6,
$x_{24}$ – из города 2 в город 8,

$x_{31}$ – из города 3 в город 2,
$x_{32}$ – из города 3 в город 4,
$x_{33}$ – из города 3 в город 6,
$x_{34}$ – из города 3 в город 8,

$x_{41}$ – из города 4 в город 2,
$x_{42}$ – из города 4 в город 4,
$x_{43}$ – из города 4 в город 6,
$x_{44}$ – из города 4 в город 8.

# Минимизация порожних пробегов (6)

## Целевая функция

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44})=$$
$$= 315x_{11} + 190x_{12} + 80x_{13} + 345x_{14} +$$
$$+ 130x_{21} + 240x_{22} + 295x_{23} + 385x_{24} +$$
$$+ 305x_{31} + 165x_{32} + 400x_{33} + 140x_{34} +$$
$$+ 170x_{41} + 520x_{42} + 315x_{43} + 615x_{44} \rightarrow \min$$

## Ограничения

**поставщик 1:** $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 19$

**поставщик 2:** $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 7$

**поставщик 3:** $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10$

**поставщик 4:** $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 5$

**получатель 1:** $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 14$

**получатель 2:** $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 19$

**получатель 3:** $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 2$

**получатель 4:** $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 6$

## Условия неотрицательности

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

# Минимизация порожних пробегов (7)

## Оптимальное решение

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_{11} = 2$ | $x_{12} = 15$ | $x_{13} = 2$ | $x_{14} = 0$ |
| $x_{21} = 7$ | $x_{22} = 0$ | $x_{23} = 0$ | $x_{24} = 0$ |
| $x_{31} = 0$ | $x_{32} = 4$ | $x_{33} = 0$ | $x_{34} = 6$ |
| $x_{41} = 5$ | $x_{42} = 0$ | $x_{43} = 0$ | $x_{44} = 0$ |

**Оптимальное значение целевой функции :** 6900

# Транспортно-производственная задача (1)

## Пример 3.6

Производственные мощности предприятий: 40, 50, 30

Спрос получателей: 45, 10, 30, 35

Приведенные производственные издержки: 4, 3, 1

Приведенные транспортные издержки

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Приведенные производственно-транспортные издержки

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 10 & 12 \\ 9 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Составить такой план выпуска продукции, который минимизирует совокупные производственно-транспортные издержки.

# Транспортно-производственная задача (2)

## Цель

Минимизация совокупных производственно-транспортных издержек.

## Решающие переменные

количество продукции, выпущенной:

$x_{11}$ - предприятием 1 для получателя 1
$x_{12}$ - предприятием 1 для получателя 2
$x_{13}$ - предприятием 1 для получателя 3
$x_{14}$ - предприятием 1 для получателя 4

$x_{21}$ - предприятием 2 для получателя 1
$x_{22}$ - предприятием 2 для получателя 2
$x_{23}$ - предприятием 2 для получателя 3
$x_{24}$ - предприятием 2 для получателя 4

$x_{31}$ - предприятием 3 для получателя 1
$x_{32}$ - предприятием 3 для получателя 2
$x_{33}$ - предприятием 3 для получателя 3
$x_{34}$ - предприятием 3 для получателя 4

# Транспортно-производственная задача (3)

## Целевая функция

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) =$$
$$= 8x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} +$$
$$+ 6x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 12x_{24} +$$
$$+ 9x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34} \quad \rightarrow \min$$

## Ограничения

**предприятие 1:** $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40$

**предприятие 2:** $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$

**предприятие 3:** $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30$

**получатель 1:** $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 45$

**получатель 2:** $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 10$

**получатель 3:** $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30$

**получатель 4:** $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35$

## Условия неотрицательности

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

# Транспортно-производственная задача (4)

## Оптимальное решение

$$
\begin{array}{llll}
x_{11} = 0 & x_{12} = 0 & x_{13} = 30 & x_{14} = 10 \\
x_{21} = 45 & x_{22} = 5 & x_{23} = 0 & x_{24} = 0 \\
x_{31} = 0 & x_{32} = 5 & x_{33} = 0 & x_{34} = 25
\end{array}
$$

**Оптимальное значение целевой функции равно** 665

| План перевозок | | | | Производство | |
|---|---|---|---|---|---|
| получатель 1 | получатель 2 | получатель 3 | получатель 4 | | |
| 0 | 0 | 30 | 10 | предприятие 1 | 40 |
| 45 | 5 | 0 | 0 | предприятие 2 | 50 |
| 0 | 5 | 0 | 25 | предприятие 3 | 30 |

# Задача распределения (1)

## Пример 3.7

Фонд времени сотрудников консалтинговой фирмы :

*X* - 140 час., *Y* - 140 час., *Z* - 120 час.

Время, необходимое для обслуживания новых контрактов:

| Клиент | Кол-во часов |
|---|---|
| A | 165 |
| B | 50 |
| C | 80 |
| D | 70 |

Ставки почасовой оплаты:

| Сотрудник | Клиент A | Клиент B | Клиент C | Клиент D |
|---|---|---|---|---|
| X | 9 | 11,5 | 12 | 10 |
| Y | 11 | 13 | 11,5 | 12 |
| Z | 15 | 14,5 | 14 | 13 |

Распределить клиентов по сотрудникам фирмы так, чтобы суммарные затраты на оплату труда были минимальными.

# Задача распределения (2)

**Цель**

Минимизация затрат на оплату труда сотрудников.

**Решающие переменные**

количество часов работы:

$x_{11}$ - сотрудника X с клиентом A,
$x_{12}$ - сотрудника X с клиентом B,
$x_{13}$ - сотрудника X с клиентом C,
$x_{14}$ - сотрудника X с клиентом D,

$x_{21}$ - сотрудника Y с клиентом A,
$x_{22}$ - сотрудника Y с клиентом B,
$x_{23}$ - сотрудника Y с клиентом C,
$x_{24}$ - сотрудника Y с клиентом D,

$x_{31}$ - сотрудника Z с клиентом A,
$x_{32}$ - сотрудника Z с клиентом B,
$x_{33}$ - сотрудника Z с клиентом C,
$x_{34}$ - сотрудника Z с клиентом D.

# Задача распределения (3)

## Целевая функция

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) =$$
$$= 90x_{11} + 115x_{12} + 120x_{13} + 100x_{14} +$$
$$+ 110x_{21} + 130x_{22} + 115x_{23} + 120x_{24} +$$
$$+ 150x_{31} + 145x_{32} + 140x_{33} + 130x_{34} \quad \rightarrow \min$$

## Ограничения

**для сотрудника X:** $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 140$

**для сотрудника Y:** $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 140$

**для сотрудника Z:** $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 120$

**для клиента A:** $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 165$

**для клиента B:** $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$

**для клиента C:** $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$

**для клиента D:** $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70$

**Условия неотрицательности для решающих переменных**

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

# Задача распределения (4)

## Фиктивный клиент (получатель E)

### Дополнительные решающие переменные

$x_{15}$ - количество часов работы сотрудника X с клиентом E,
$x_{25}$ - количество часов работы сотрудника Y с клиентом E,
$x_{35}$ - количество часов работы сотрудника X с клиентом E,

### Дополнительное ограничение с клиентом E

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 35$$

### Дополнительные условия неотрицательности:

$$x_{15}, x_{25}, x_{35} \geq 0$$

# Задача распределения (5)

## Оптимальное решение

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_{11} = 140$ | $x_{12} = 0$ | $x_{13} = 0$ | $x_{14} = 0$ | $x_{15} = 0$ |
| $x_{21} = 25$ | $x_{22} = 35$ | $x_{23} = 80$ | $x_{24} = 0$ | $x_{25} = 0$ |
| $x_{31} = 0$ | $x_{32} = 15$ | $x_{33} = 0$ | $x_{34} = 70$ | $x_{35} = 35$ |

**Оптимальное значение целевой функции равно** 40 375

| Сотрудник | Клиент A | Клиент B | Клиент C | Клиент D |
|---|---|---|---|---|
| X | 140 | 0 | 0 | 0 |
| Y | 25 | 35 | 80 | 0 |
| Z | 0 | 15 | 0 | 70 |

# Резюме

## Ключевые слова

Сбалансированная транспортная задача

Начальное решение

Метод минимального элемента матрицы

Метод VAM

Метод северо-западного угла

Метод потенциалов

Балансирование несбалансированной задачи

Фиктивный поставщик

Фиктивный получатель

Вырождение транспортной задачи

**Можно отдыхать!**