Metody wielokryterialne

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- Zadanie wielokryterialne
- Zadanie wielokryterialne programowania liniowego
- Przestrzeń decyzyjna
- Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni decyzyjnej
- Przestrzeń kryterialna
- Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni kryterialnej
- Zadanie wektorowej maksymalizacji
- Rozwiązanie dominujące
- Rozwiązanie niezdominowane
- Rozwiązanie sprawne

Słowa kluczowe (c.d.)

- **Rozwiązanie końcowe**
- **Metoda satysfakcjonujących poziomów kryteriów**
- **Współczynniki wagowe**
- **Hierarchizacja kryteriów**
- **Punkt idealny**
- **Metody interaktywne**
- **Programowanie celowe**
- **Bilansowanie celów**
- **Cele kierunkowe**
- **Cele punktowe**
- **Cele przedziałowe**

Słowa kluczowe (c.d.)

- **Wielokryterialne metody dyskretne**
- **Metoda AHP**
- **Metoda Promethe V**
- **Metoda Electre I**

4.2.1. Rozwiązanie dominujące (1/6)

Przykład 4.1

	P_1	P_2	Zasoby
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
	2	3	

Należy zaplanować produkcję w taki sposób, by jednocześnie zmaksymalizować zysk oraz łączne rozmiary produkcji.

4.2.1. Rozwiązanie dominujące (2/6)

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

x_1 - planowany rozmiar produkcji produktu P_1

x_2 - planowany rozmiar produkcji produktu P_2

Funkcje celu

$f_1(x_1,x_2)$ - funkcja opisująca zysk

$f_2(x_1,x_2)$ - funkcja opisująca łączne rozmiary produkcji

Wektorowa funkcja kryterium

$$F(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x_1+3x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix}$$

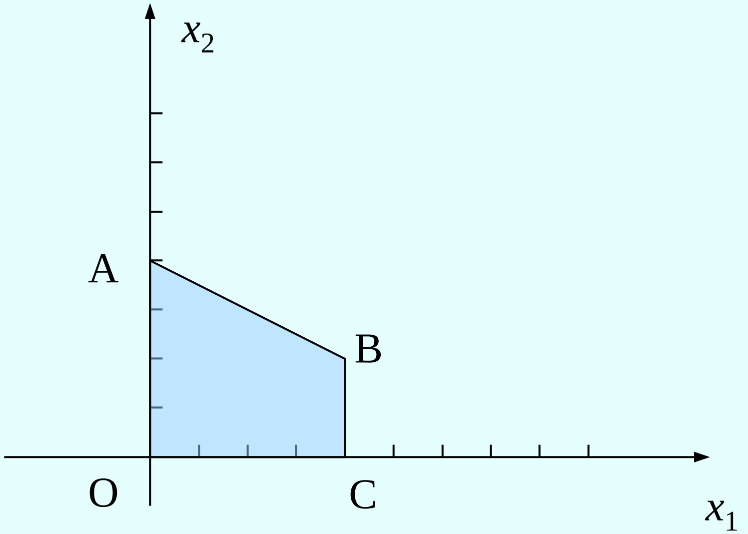
4.2.1. Rozwiązanie dominujące (3/6)

Model matematyczny (c.d.)

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni decyzyjnej



4.2.1. Rozwiązanie dominujące (4/6)

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni kryterialnej

Twierdzenie 4.1

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania wielokryterialnego programowania liniowego w przestrzeni kryterialnej jest wielościanem wypukłym.

Każdy wierzchołek tego wielościanu jest obrazem pewnego wierzchołka zbioru decyzji dopuszczalnych w przestrzeni decyzyjnej, natomiast pozostałe punkty to zbiór wszystkich kombinacji wypukłych punktów wierzchołkowych.

4.2.1. Rozwiązanie dominujące (5/6)

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni kryterialnej (c.d.)

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

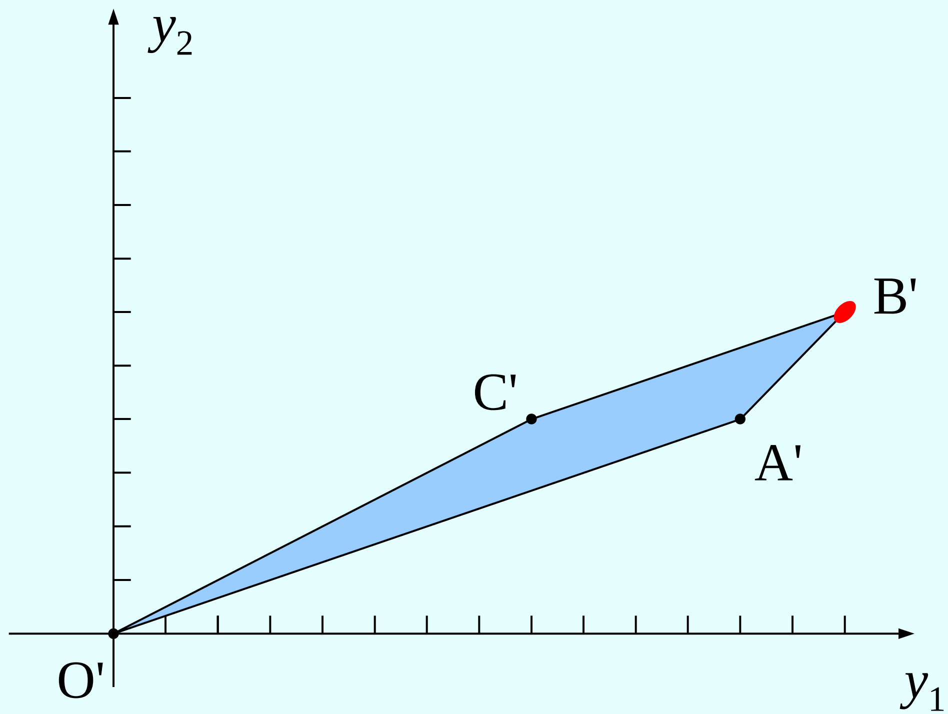
$$F(O) = F([0,0]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = O' \qquad F(A) = F([0,4]) = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = A'$$

$$F(B) = F([4,2]) = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \end{bmatrix} = B' \qquad F(C) = F([4,0]) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = C'$$

$$Y = \left\{ \begin{matrix} Y : Y = \lambda_1 O' + \lambda_2 A' + \lambda_3 B' + \lambda_4 C', \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ge 0 \end{matrix} \right\}$$

4.2.1. Rozwiązanie dominujące (6/6)

Interpretacja geometryczna



B' dominuje wszystkie rozwiązania dopuszczalne w przestrzeni kryterialnej

4.2.2. Rozwiązanie niezdominowane (1/4)

Przykład 4.2

Należy zaplanować produkcję w taki sposób, by jednocześnie zmaksymalizować zysk oraz zminimalizować wykorzystanie deficytowego środka S_1

Model matematyczny

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
\varphi_2(x_1, x_2) &= 2x_1 + 2x_2 \to \min
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 + &\le 16
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&\boxed{f_2(x_1, x_2) = -2x_1 - 2x_2 \to \max}
\end{aligned}
$$

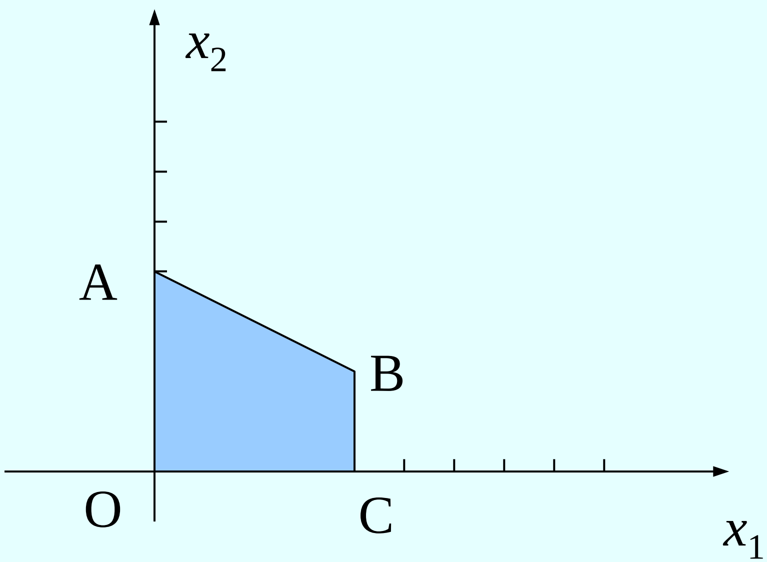
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 + &\le 16
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

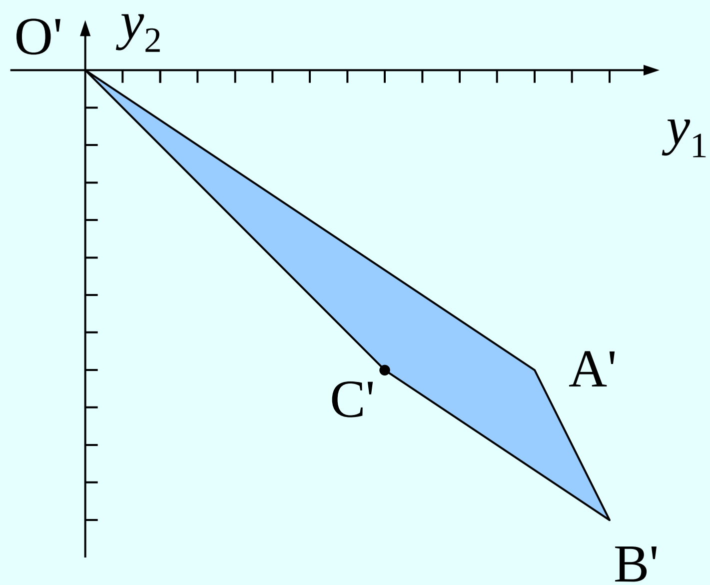
4.2.2. Rozwiązanie niezdominowane (2/4)

Zbiory rozwiązań dopuszczalnych

w przestrzeni decyzyjnej



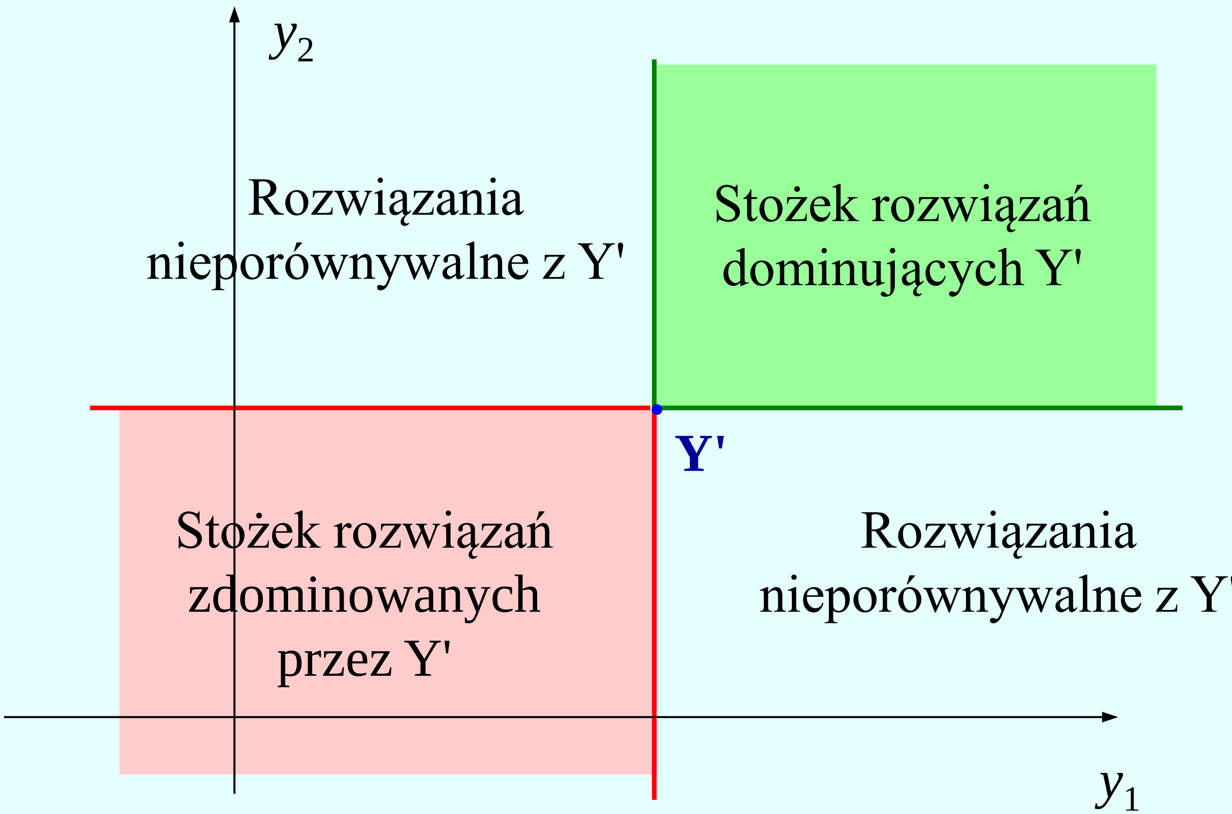
w przestrzeni kryterialnej



Brak rozwiązania dominującego

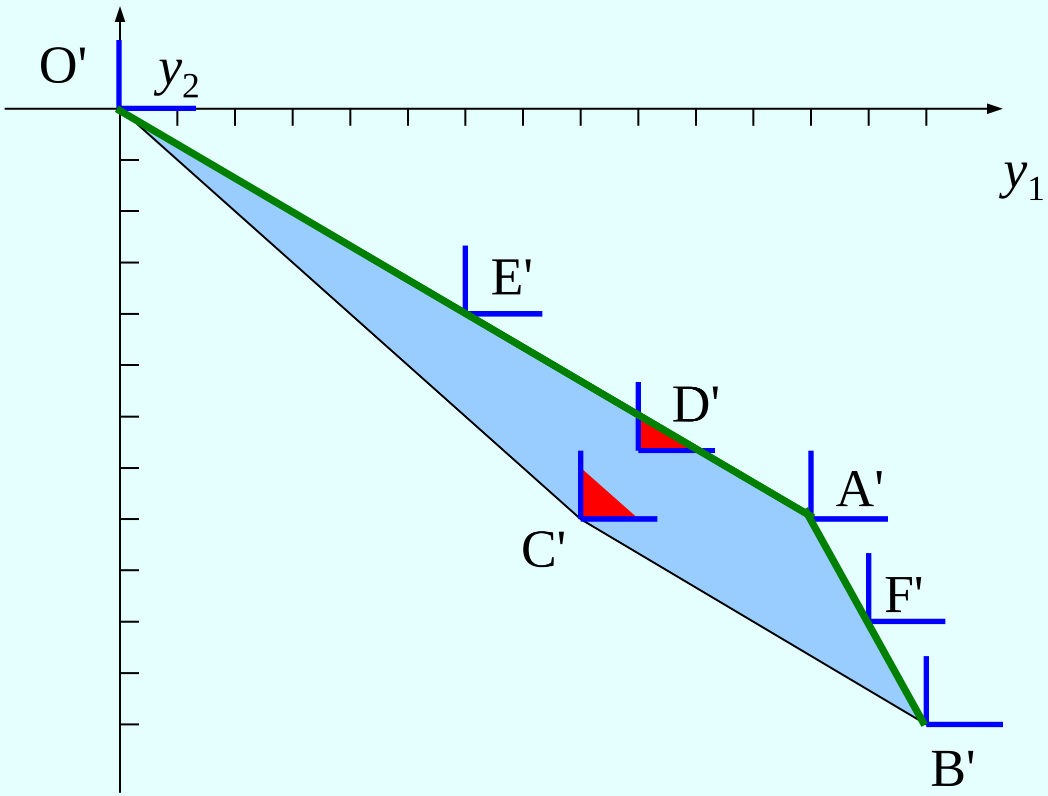
4.2.2. Rozwiązanie niezdominowane (3/4)

Stożki rozwiązań dominujących i zdominowanych przez Y'



4.2.2. Rozwiązanie niezdominowane (4/4)

Rozwiązania niezdominowane i zdominowane



Rozwiązania niezdominowane: O’, A’, B’, $\overline{\text{O’A’}}$, $\overline{\text{A’B’}}$

Rozwiązania w przestrzeni decyzyjnej, odpowiadające rozwiązaniom niezdominowanym, nazywamy **rozwiązaniami sprawnymi**.

4.3.1. Rozszerzona tablica simpleksowa (1/2)

ADBASE Postać bazowa

Przykład 4.2 c.d.

Zmienne bilansujące x_3, x_4

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \ \ 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -2x_1 - 2x_2 \to \max \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 8 \\
4x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 16 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8,\ x_4 = 16$$

4.3.1. Rozszerzona tablica simpleksowa (2/2)

Postać macierzowa

$$\mathbf{Cx} \rightarrow \text{„max”}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">$\mathbf{Cx} \rightarrow$ „max”</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="3">**b**</td></tr>
<tr><td>–2</td><td>–2</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Baza</td><td colspan="2">$\mathbf{C_B}$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>8</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>16</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>–2</td><td>–2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

4.3.2. Zadanie testujące (1/1)

Twierdzenie 4.3

Jeżeli optymalna wartość funkcji celu zadania testującego jest równa zeru, wówczas testowane rozwiązanie bazowe jest sprawne.

Jeżeli funkcja celu zadania testującego jest ograniczona, rozwiązanie optymalne zadania testującego generuje bazowe rozwiązanie sprawne zadania testowanego.

$$s_1 + s_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 \quad - s_1 \quad &= 0 \\
-2x_1 - 2x_2 \quad - s_2 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 8 \\
4x_1 \quad + x_4 \quad &= 16
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0$$

Rozwiązanie zadania testującego:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 16, s_1 = 0, s_2 = 0.$$

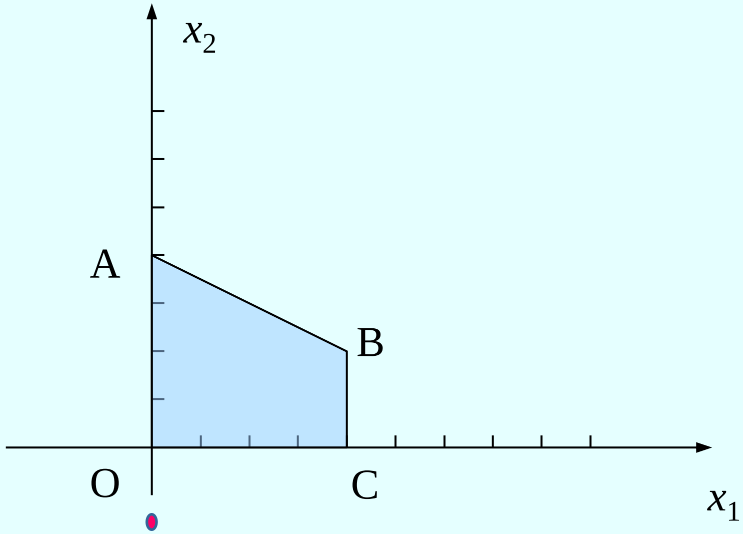
Optymalna wartość funkcji celu wynosi 0, czyli testowane rozwiązanie jest sprawne.

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (1/10)

Zbiory zmiennych bazowych dla wierzchołków O, A, B, C:

$\mathcal{B}_O = \{x_3, x_4\}$ $\mathcal{B}_A = \{x_2, x_4\}$

$\mathcal{B}_B = \{x_1, x_2\}$ $\mathcal{B}_C = \{x_1, x_3\}$



Dwa rozwiązania bazowe, odpowiadające wierzchołkom P i Q nazywamy **sąsiednimi bazowymi rozwiązaniami sprawnymi,** jeżeli

- obydwa są rozwiązaniami sprawnymi,
- są one sąsiednimi rozwiązaniami bazowymi oraz
- wszystkie punkty leżące na odcinku PQ są rozwiązaniami sprawnymi.

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (2/10)

Niebazowa zmienna sprawna

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1..., \lambda_k]: \sum_{i=1}^{k} \lambda_\mathrm{i} = 1, \lambda_i > 0 \text{ dla } i=1,...,k\}$$

Zmienną niebazową x_j w ustalonej bazie $\mathcal{B}_\mathbf{P}$ odpowiadającej wierzchołkowi P nazywamy **niebazową zmienną sprawną**, jeżeli istnieje wektor $\lambda \in \Lambda$ taki, że:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{D}_\mathbf{N} \leq 0, \qquad \boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}_j = 0$$

Mamy rozwiązanie bazowe, odpowiadające wierzchołkowi P, x_j jest niebazową zmienna sprawną oraz mamy drugie sąsiednie rozwiązanie bazowe, odpowiadające wierzchołkowi Q, które otrzymujemy, stosując przekształcenia elementarne, przy czym zmienną wchodzącą do bazy jest x_j, a zmienną opuszczającą bazę wyznaczamy przy pomocy kryterium wyjścia metody simpleks.

Twierdzenie 4.4

Wygenerowane przy pomocy niebazowej zmiennej sprawnej rozwiązanie bazowe, odpowiadające wierzchołkowi Q jest sąsiednim bazowym rozwiązaniem sprawnym dla tego wierzchołka.

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (3/10)

Iteracja 1

$\mathbf{Cx} \rightarrow$ „max”			2	3	0	0	**b**
			– 2	– 2	0	0	
Baza	$\mathbf{C_B}$		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	1	2	1	0	8
x_4	0	0	4	0	0	1	16
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			2	3	0	0	0
			– 2	– 2	0	0	0

Zmienna x_1

$$\lambda \mathbf{D_N} \le 0 \qquad \lambda \mathbf{d}_j = 0$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \qquad 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$$

Układ sprzeczny, czyli x_1 nie jest w rozpatrywanej bazie niebazową zmienną sprawną.

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (4/10)

Sprawdzanie sprawności zmiennych (c.d.)

$Cx \to$ „max”			2	3	0	0	b
			– 2	– 2	0	0	
Baza	C_B		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	1	2	1	0	8
x_4	0	0	4	0	0	1	16
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			2	3	0	0	0
			– 2	– 2	0	0	0

Zmienna x_2

$$\lambda \mathbf{D}_N \le 0 \qquad \lambda \mathbf{d}_j = 0$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0 \qquad 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0$$

$$\lambda_1 = 2/5,\ \lambda_2 = 3/5.$$

Zmienna x_2 jest w rozpatrywanej bazie niebazową zmienną sprawną.

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (5/10)

Przekształcenie simpleksowe

Pierwsza tablica simpleksowa

Cx → „max”			2	3	0	0	**b**
			– 2	– 2	0	0	
Baza	$\mathbf{C_B}$		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	1	2	1	0	8
x_4	0	0	4	0	0	1	16
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			2	3	0	0	0
			– 2	– 2	0	0	0

Tablica simpleksowa po wprowadzeniu do bazy zmiennej sprawnej x_2

Cx → „max”			2	3	0	0	**b**
			– 2	– 2	0	0	
Baza	$\mathbf{C_B}$		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	3	– 2	0,5	1	0,5	0	4
x_4	0	0	4	0	0	1	16
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			0,5	0	– 1,5	0	12
			– 1	0	1	0	– 8

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (6/10)

Iteracja 2

Czy x_1 jest niebazową zmienną sprawną?

Cx → „max”			2	3	0	0	**b**
			– 2	– 2	0	0	
Baza	$\mathbf{C_B}$		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	3	– 2	0,5	1	0,5	0	4
x_4	0	0	4	0	0	1	16
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			0,5	0	– 1,5	0	12
			– 1	0	1	0	– 8

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 0,5 & -1,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$0,5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad -1,5\lambda_1 + \lambda_2 \le 0 \qquad \lambda_1 = 2/3,\ \lambda_2 = 1/3.$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0$$

Cx → „max”			2	3	0	0	**b**
			– 2	– 2	0	0	
Baza	$\mathbf{C_B}$		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	3	– 2	0	1	0,5	-0,125	2
x_1	2	– 2	1	0	0	0,25	4
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			0	0	– 1,5	– 0,125	14
			0	0	1	0,5	– 12

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (7/10)

Czy x_3 jest niebazową zmienną sprawną?

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} -1{,}5 & -0{,}125 \\ -1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} -1{,}5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & -0{,}125\lambda_1 + 0{,}5\lambda_2 \le 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 & \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0 \end{array}$$

Układ sprzeczny. Oznacza to, że x_3 nie jest niebazową zmienną sprawną.

Twierdzenie 4.5

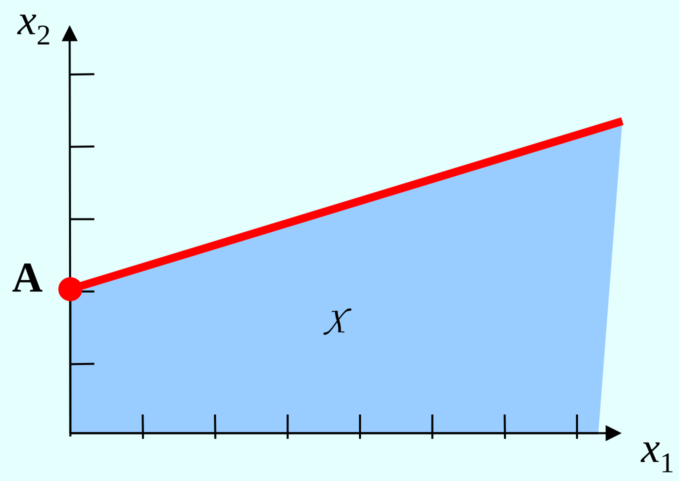
Każde dwa bazowe rozwiązania sprawne można połączyć ciągiem sąsiednich baz sprawnych.

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (8/10)

Przykład 4.3

$$\begin{aligned} -x_1 &\to \max \\ x_2 &\to \max \\ -x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 &\to \max \\ x_2 &\to \max \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$



Rozwiązanie bazowe:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 6$$

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (9/10)

Zadanie testujące

$$
\begin{array}{rcl}
 & s_1 + s_2 \to \max & \\
x_1 \qquad\qquad\qquad - s_1 & & = 0 \\
x_2 \qquad\qquad\qquad - s_2 & & = 0 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 4 \\
-x_1 + x_2 \qquad + x_4 & & = 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Rozwiązanie optymalne:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 4,\ s_1 = 0,\ s_2 = 2$$

Składowe tego rozwiązania:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 4$$

wyznaczają rozwiązanie sprawne zadania wyjściowego (odpowiadające wierzchołkowi **A**).

4.3.3. Sąsiednie bazowe rozwiązanie sprawne (10/10)

Nieograniczona krawędź sprawna

Cx → „max”			– 1	0	0	0	**b**
			0	1	0	0	
Baza	$\mathbf{C_B}$		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	– 0,5	1	0,5	0	2
x_4	0	0	– 0,5	0	– 0,5	1	4
$d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			– 1	0	0	0	0
			0,5	0	– 0,5	0	2

Zmienna x_1 jest niebazową zmienną sprawną, natomiast x_3 nie jest. Wszystkie elementy kolumny odpowiadającej zmiennej x_1 są ujemne, więc nie ma możliwości zastosowania kryterium wyjścia metody simpleks, stąd *A* jest początkiem **nieograniczonej krawędzi sprawnej.**

4.3.4. Reguły postępowania w metodzie ADBASE (1/2)

Algorytm

1. *Wyznaczenie pierwszego bazowego rozwiązania dopuszczalnego*

Uzyskujemy je, wprowadzając zmienne bilansujące. Jeżeli zachodzi konieczność wprowadzenia zmiennych sztucznych, sprawdzamy ponadto, czy rozpatrywane zadanie nie jest sprzeczne.

2. Wyznaczenie bazowego rozwiązania sprawnego

Za pomocą zadania testującego sprawdzamy, czy uzyskane w poprzednim kroku pierwsze bazowe rozwiązanie dopuszczalne jest sprawne. Jeżeli nie jest, wykorzystujemy optymalne rozwiązanie zadania testującego (o ile istnieje) do wygenerowania pierwszego bazowego rozwiązania sprawnego. Oznaczamy przez LB listę bazowych rozwiązań sprawnych, które należy zbadać, przez LWS — listę znalezionych wierzchołków sprawnych, a przez LKS — listę krawędzi sprawnych. Wyznaczoną w drugim kroku bazę sprawną umieszczamy na liście LB, wierzchołek sprawny na liście LWS.

4.3.4. Reguły postępowania w metodzie ADBASE (2/2)

Algorytm c.d.

3. Wyznaczenie wszystkich bazowych rozwiązań sprawnych

a) Jeżeli $LB = \varnothing$, to wszystkie wierzchołki sprawne zostały znalezione.

b) Jeżeli $LB \neq \varnothing$, wybieramy bazowe rozwiązanie sprawne z LB usuwamy je z listy. Następnie badamy, które zmienne niebazowe rozpatrywanego rozwiązania są niebazowymi zmiennymi sprawnymi. Znajdujemy sprawne rozwiązania bazowe, odpowiadające kolejnym niebazowym zmiennym sprawnym oraz związane z nimi bazy sprawne. Znalezione bazy sprawne dodajemy do zbioru *LB* (jeżeli ich tam nie ma) oraz dodajemy znalezione wierzchołki sprawne do zbioru *LWS* (jeżeli ich tam nie ma). Znalezione krawędzie sprawne dodajemy do zbioru *LKS*.

4.4.1. Generowanie rozwiązań sprawnych za pomocą jednej funkcji celu (1/1)

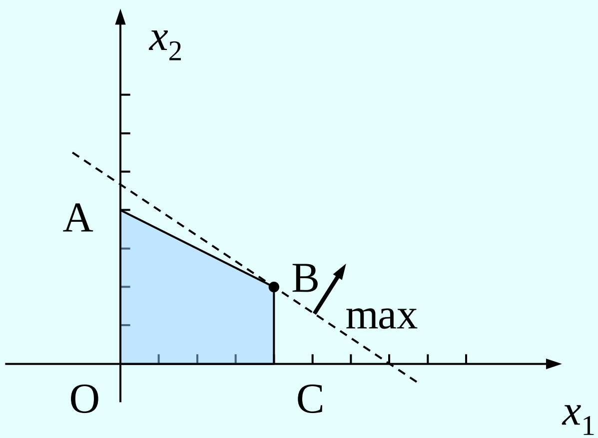
Przykład 4.4

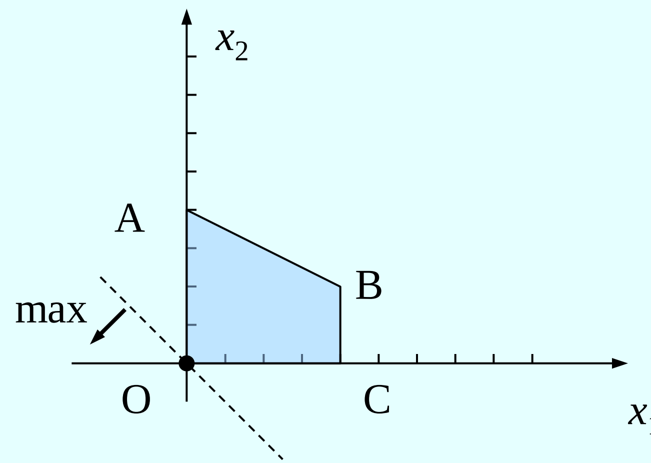
Problem P_1

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
x_1 + 2x_2 \le 8 \\
4x_1 \le 16 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

Problem P_2

$$
\begin{array}{l}
-2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max \\
x_1 + 2x_2 \le 8 \\
4x_1 \le 16 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

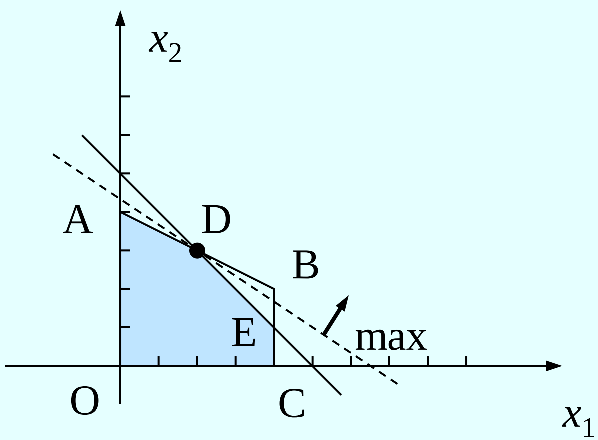


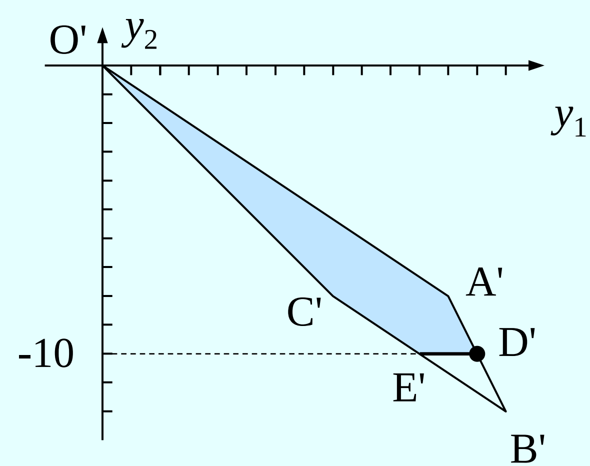


4.4.2. Metoda satysfakcjonującego poziomu kryteriów (1/1)

Przykład 4.5

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
4x_1 \quad &\leq 16 \\
\boxed{-2x_1 - 2x_2 \geq -10} \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$





4.4.3. Metoda sumy ważonej (1/1)

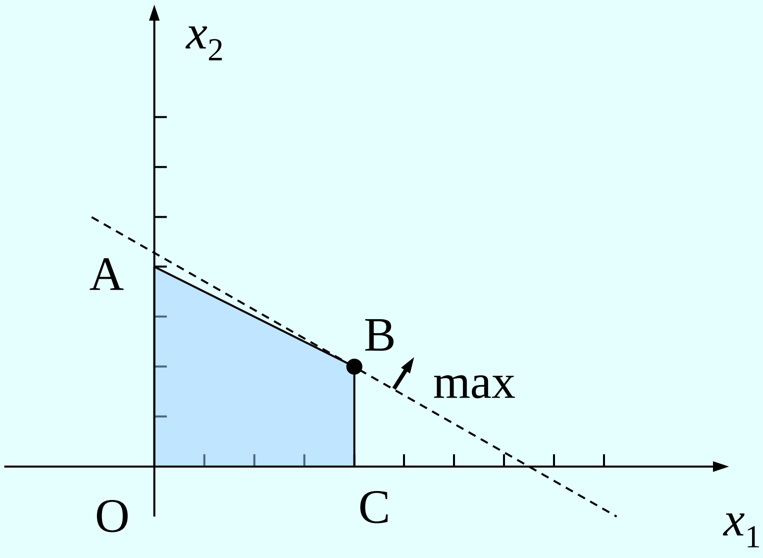
Przykład 4.6

Decydent ustalił ważność kryteriów pierwszego i drugiego w stosunku 3 : 1

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2$$
$$y_2 = -2x_1 - 2x_2$$

$$y = 3y_1 + y_2 = 3(2x_1 + 3x_2) + + (-2x_1 - 2x_2) = 4x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



4.4.4. Hierarchia kryteriów (1/2)

Przykład 4.7

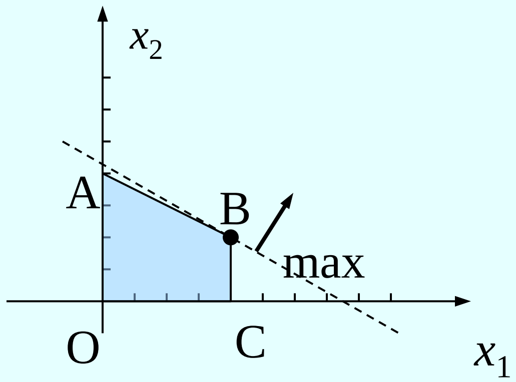
Najważniejszy jest cel pierwszy, na drugim poziomie hierarchii występuje cel drugi.

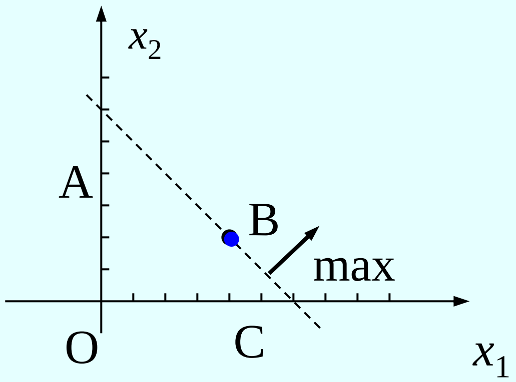
Pierwszy poziom hierarchii

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Drugi poziom hierarchii

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 &\le 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 14 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$





4.4.4. Hierarchia kryteriów (2/2)

Przykład 4.8

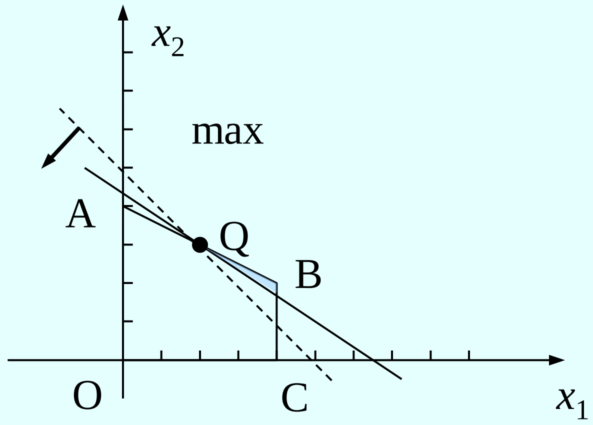
Różnica między wartością optymalną dla pierwszego kryterium a wartością w rozpatrywanym rozwiązaniu nie większa niż 1.

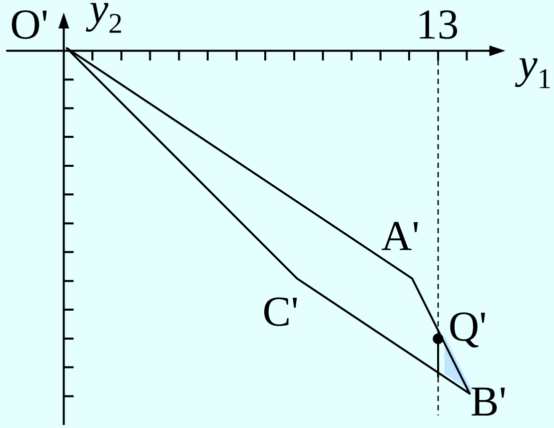
Pierwszy poziom hierarchii

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 \qquad &\leq 16 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Drugi poziom hierarchii

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 \qquad &\leq 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 13 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



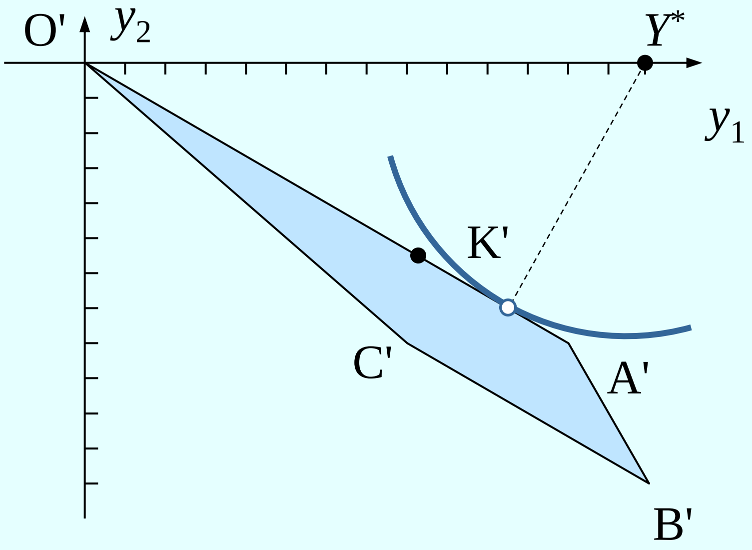


4.4.5. Wykorzystanie punktu idealnego (1/1)

Przykład 4.9

Przyjmujemy metrykę euklidesową jako sposób mierzenia odległości w przestrzeni kryterialnej.

Punkt idealny $Y^*(14, 0)$



4.4.6. Metoda interaktywna (1/6)

Przykład 4.10

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4.4.6. Metoda interaktywna (2/6)

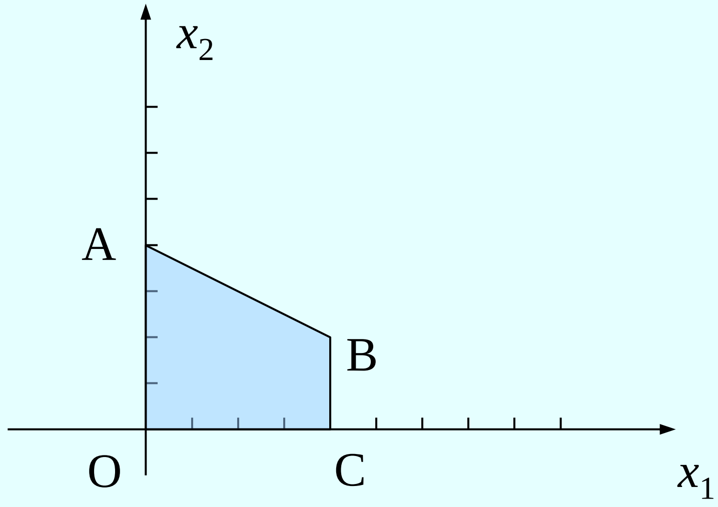
Przebieg obliczeń

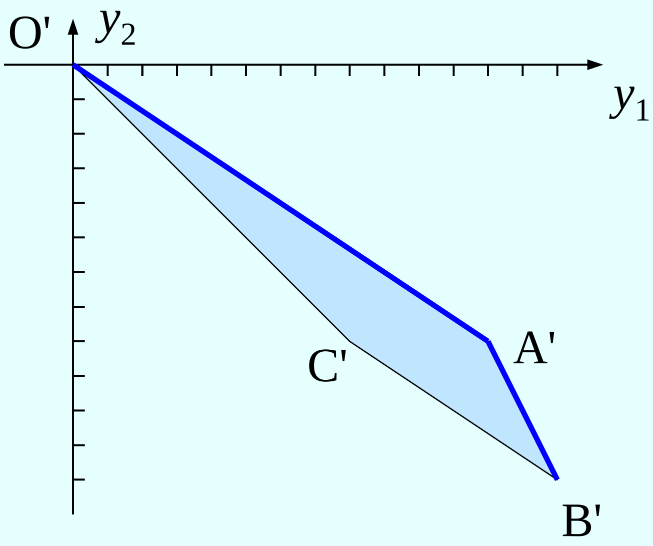
Problem P_{01}

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Problem P_{02}

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$





4.4.6. Metoda interaktywna (3/6)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie \ Kryterium	f_1	f_2
R_{01}	14	-12
R_{02}	0	0

Wartość \ Kryterium	f_1	f_2
Akceptowana	0	-12
Optymistyczna	14	0

Problem P_{11}

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Problem P_{12}

$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$

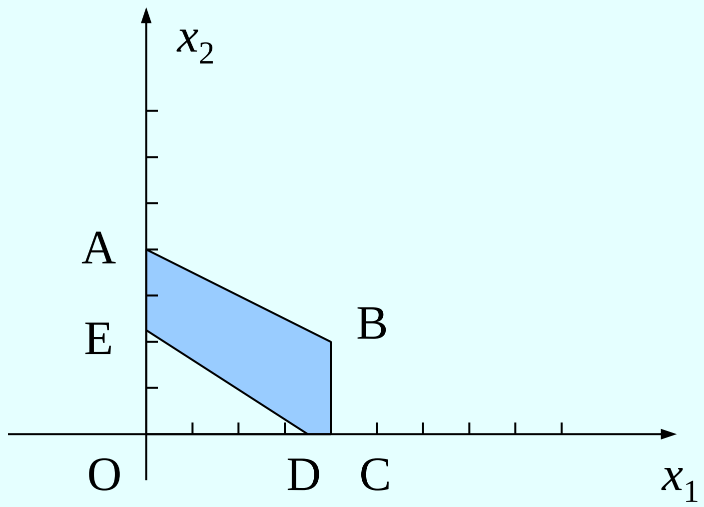
Warunki ograniczające

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$4x_1 \le 16$$
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ \mathbf{\ge 7} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ \mathbf{\ge -12} \end{aligned}}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

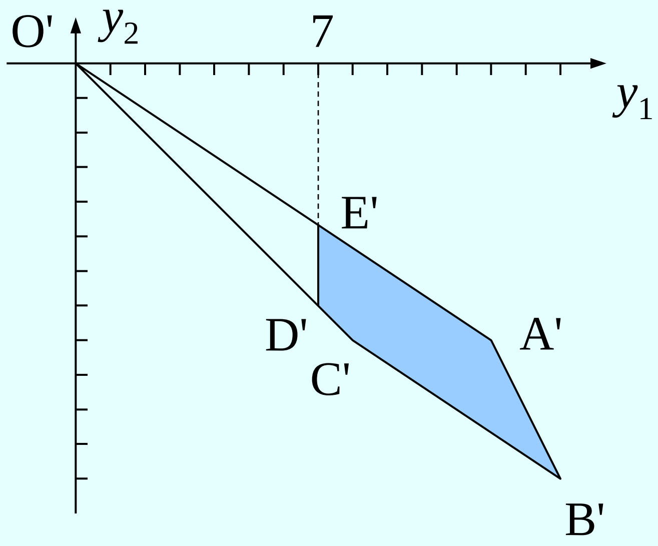
4.4.6. Metoda interaktywna (4/6)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Przestrzeń decyzyjna



Przestrzeń kryterialna



4.4.6. Metoda interaktywna (5/6)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Rozwiązanie \ Kryterium	f_1	f_2
R_{11}	14	-12
R_{12}	7	$-^{14}/_{3}$

Wartość \ Kryterium	f_1	f_2
Akceptowana	7	-12
Optymistyczna	14	$-^{14}/_{3}$

Problem P_{21}

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Problem P_{22}

$$-2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

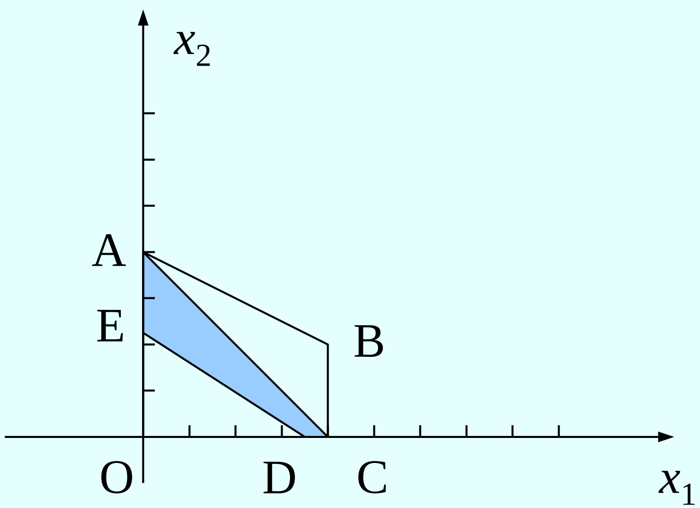
Warunki ograniczające

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$4x_1 \le 16$$
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{7} \\ \mathbf{-2x_1 - 3x_2} &\ge \mathbf{-8} \end{aligned}}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

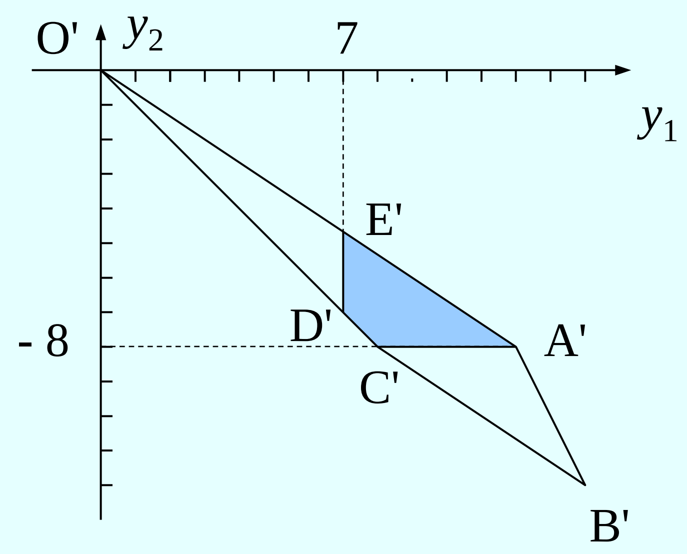
4.4.6. Metoda interaktywna (6/6)

Przebieg obliczeń (c.d.)

Przestrzeń decyzyjna



Przestrzeń kryterialna



4.5.1. Bilansowanie celów (1/3)

Przykład 4.11

Decydent uznał, że satysfakcjonuje go osiągnięcie zysku na poziomie przynajmniej 12 jednostek (cel przedziałowy) oraz pełne wykorzystanie zasobów pracy na poziomie 10 jednostek (środek S_1 – cel punktowy). Znaleźć plan produkcji spełniający poniższe wymagania.

Cel 1 Zysk na poziomie przynajmniej 12 jednostek

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \geq 12$$

Cel 2 Wykorzystanie zasobów pracy na poziomie 10 jednostek

$$\varphi_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 2\, x_2 = 10$$

4.5.1. Bilansowanie celów (2/3)

Cel 1

$$y_1^+ = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 12 & \text{gdy } f_1(x_1, x_2) \geq 12 \\ 0 & \text{gdy } f_1(x_1, x_2) < 12 \end{cases}$$

$$y_1^- = \begin{cases} 0 & \text{gdy } f_1(x_1, x_2) \geq 12 \\ 12 - 2x_1 - 3x_2 & \text{gdy } f_1(x_1, x_2) < 12 \end{cases}$$

Równanie bilansujące dla celu 1

$$2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 12$$

4.5.1. Bilansowanie celów (3/3)

Cel 2

$$y_2^+ = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 10 & \text{gdy } \varphi_2(x_1, x_2) \geq 10 \\ 0 & \text{gdy } \varphi_2(x_1, x_2) < 10 \end{cases}$$

$$y_2^- = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \varphi_2(x_1, x_2) \geq 10 \\ 10 - 2x_1 - 2x_2 & \text{gdy } \varphi_2(x_1, x_2) < 10 \end{cases}$$

Równanie bilansujące dla celu 2

$$2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$$

4.5.2. Hierarchizacja odchyleń (1/2)

Zadanie pierwszego poziomu hierarchii

$$y_1^- \to \min$$

Cel 1 $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 12$

Cel 2 $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

Ograniczenia

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$4x_1 \le 16$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \ge 0$$

Istnieje rozwiązanie optymalne tego zadania, w którym $y_1^- = 0$

4.5.2. Hierarchizacja odchyleń (2/2)

Zadanie drugiego poziomu hierarchii `

$$\boldsymbol{y_2^+ + y_2^- \rightarrow \min}$$

Cel 1 $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 12$

Cel 2 $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

$$y_1^- = 0$$

Ograniczenia

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \ge 0$$

Rozwiązanie

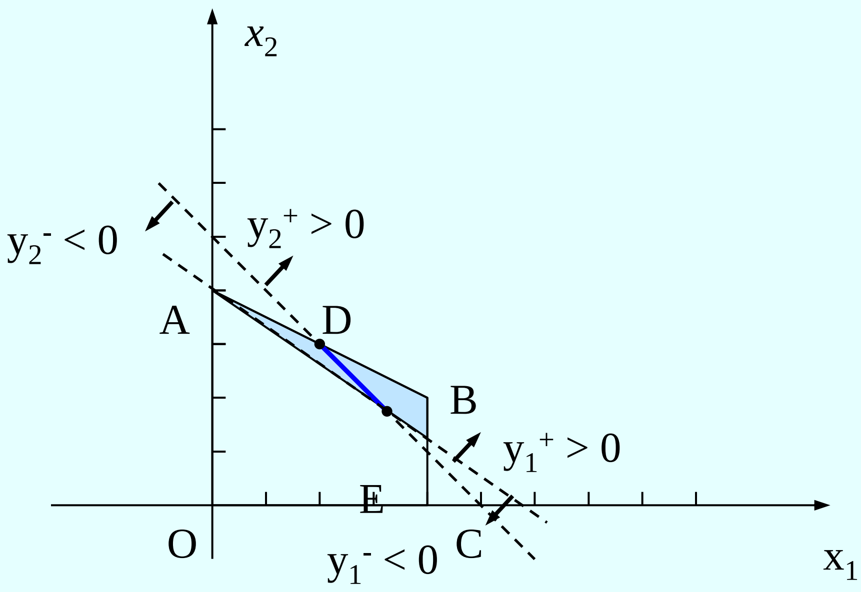
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ y_1^+ = 1,\ y_1^- = 0,\ y_2^+ = 0,\ y_2^- = 0$$

4.5.3. Ilustracja graficzna w przestrzeni decyzyjnej (1/3)

Przypadek 1

Cel 1 $y_1 = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$

Cel 2 $y_2 = 2x_1 + 2\,x_2 = \mathbf{10}$

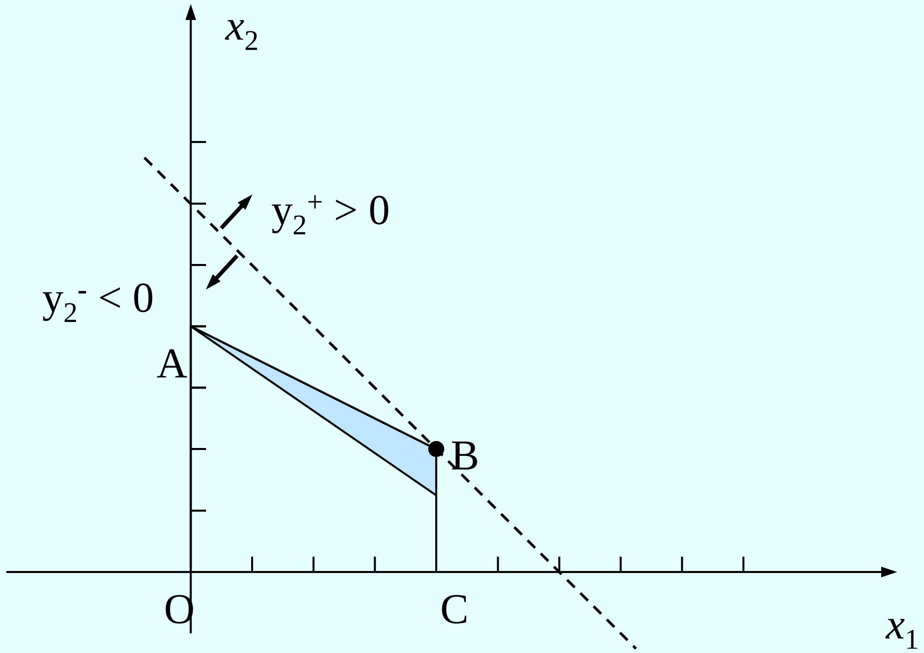


4.5.3. Ilustracja graficzna w przestrzeni decyzyjnej (2/3)

Przypadek 2

Cel 1 $y_1 = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$

Cel 2 $y_2 = 2x_1 + 2\,x_2 = \mathbf{12}$

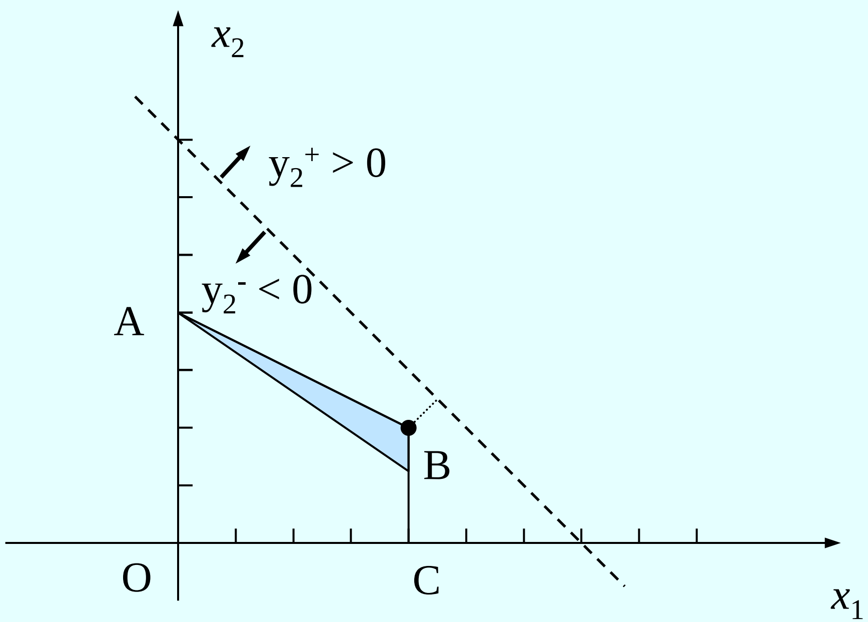


4.5.3. Ilustracja graficzna w przestrzeni decyzyjnej (3/3)

Przypadek 3

Cel 1 $y_1 = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$

Cel 2 $y_2 = 2x_1 + 2\,x_2 = \mathbf{14}$



4.5.4. Współczynniki wagowe (1/5)

Przykład 4.12

Odchylenie „in plus” w realizacji celu 2 jest dwukrotnie bardziej niekorzystne niż odchylenie „in minus”. Realizacja obu celów jest tak samo ważna dla decydenta.

Model matamatyczny

$$
\begin{aligned}
y_1^- \qquad + 2\,y_2^+ + y_2^- &\rightarrow \min \\
2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 12 \\
2x_1 + 2x_2 \qquad - y_2^+ + y_2^- &= 10 \\
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 &\le 16
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \ge 0$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ y_1^+ = 0,\ y_1^- = 0,\ y_2^+ = 0,\ y_2^- = 0$$

4.5.4. Współczynniki wagowe (2/5)

Przykład 4.13

Cel 1: Zysk na poziomie przynajmniej 14 jednostek.

Cel 2: Zatrudnienie na poziomie 10 jednostek.

- **Cel 2a:** Zatrudnienie nie może przekroczyć 10 jednostek.
- **Cel 2b:** Zatrudnienie nie może być mniejsze od 10 jednostek.

Cel 3: Produkcja P_1 na poziomie przynajmniej 4 jednostek.

I poziom hierarchii: Cel 1 i cel 2a.
Realizacja celu 1 jest dwukrotnie ważniejsza od realizacji celu 2a

II poziom hierarchii: Ważność realizacji celu 3 pozostaje do ważności realizacji celu 2b w stosunku 3 : 2

4.5.4. Współczynniki wagowe (3/5)

Zadanie 1 (pierwszy poziom hierarchii)

$$2y_1^- + y_2^+ \to \min$$

Cel 1: $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14$

Cel 2: $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

Cel 3: $x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4$

Ograniczenia: $x_1 + 2x_2 \leq 8$

$4x_1 \leq 16$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Minimalna wartość funkcji celu dla Zadania 1 wynosi 2

4.5.4. Współczynniki wagowe (4/5)

Zadanie 2 (drugi poziom hierarchii)

$$2y_2^- + 3y_3^- \to \min$$

Cel 1: $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14$

Cel 2: $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

Cel 3: $x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4$

$2y_1^- + y_2^- = 2$

Ograniczenia: $x_1 + 2x_2 \le 8$

$4x_1 \le 16$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \ge 0$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ y_1^+ = 0,\ y_1^- = 1,\ y_2^+ = 0,\ y_2^- = 0,\ y_3^+ = 0,\ y_3^- = 1$$

4.5.4. Współczynniki wagowe (5/5)

Współczynniki kary

Pozycja w hierarchii	Nazwa celu	Poziom osiągnięcia celu	Współczynnik kary
1	Zysk	≥ 14	2 M
1	Zatrudnienie	≤ 10	M
2	Zatrudnienie	≥ 10	2
2	Produkcja P_2	≥ 4	3

$$2My_1^- + My_2^+ + 2y_2^- + 3y_3^- \to \min$$

$$2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14$$

$$2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$$

$$x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Sformułowanie problemu

Decydent określił pewien skończony zbiór wariantów decyzyjnych A, złożony z n elementów, spośród których chce wybrać wariant najlepiej odpowiadający jego preferencjom. W tym celu określa on również k kryteriów, którymi zamierza się kierować. Metody, pozwalające na rozwiązanie tego typu zadań nazywamy wielokryterialnymi metodami dyskretnymi.

4.6.1. Metoda AHP (1/8)

AHP - skala ocen

Ocena werbalna Wariant **a w porównaniu z wariantem b względem rozpatrywanego kryterium** jest preferowany	Ocena numeryczna
ekstremalnie	9
bardzo silnie do ekstremalnie	8
bardzo silnie	7
silnie do bardzo silnie	6
silnie	5
umiarkowanie do silnie	4
umiarkowanie	3
równoważnie do umiarkowanie	2
równoważnie	1

4.6.1. Metoda AHP (2/8)

Przykład 4.14

Problem decyzyjny

wybór samochodu

Warianty decyzyjne:

wariant **a** (samochód **a**),
wariant **b** (samochód **b**),
wariant **c** (samochód **c**),

Kryteria:

cena
koszty eksploatacji
sylwetka
marka

Decydent:

student (o niewielkich dochodach)

4.6.1. Metoda AHP (3/8)

Porównanie parami wariantów względem kolejnych kryteriów

Cena				Eksploatacja				Sylwetka				Marka			
	a	**b**	**c**		**a**	**b**	**c**		**a**	**b**	**c**		**a**	**b**	**c**
a		2		**a**			4	**a**		2	4	**a**			
b				**b**	2		5	**b**			3	**b**	5		4
c	6	5		**c**				**c**				**c**	3		

Porównanie parami kryteriów

	Cena	Eksploatacja	Sylwetka	Marka
Cena		6	2	
Eksploatacja				
Sylwetka		9		
Marka	3	8	2	

4.6.1. Metoda AHP (4/8)

Macierz porównań

Kryterium: Marka

Marka			
	a	**b**	**c**
a			
b	5		4
c	3		

Marka			
	a	**b**	**c**
a	1	1/5	1/3
b	5	1	4
c	3	¼	1

4.6.1. Metoda AHP (5/8)

Ranking częściowy

1. W macierzy porównań parami sumujemy wartości kolejnych kolumn.

Marka			
	a	**b**	**c**
a	1	1/5	1/3
b	5	1	4
c	3	1/4	1
Suma s_i	9,000	1,450	5,334

2. Normalizujemy otrzymaną macierz względem kolumn, dzieląc każdy element i-tej kolumny przez sumę s_i.

Marka			
	a	**b**	**c**
a	0,111	0,138	0,063
b	0,556	0,690	0,750
c	0,333	0,172	0,188

3. Znajdujemy średnią dla każdego wiersza. Obliczone wartości traktujemy jako względne wagi porównywanych elementów.

Marka				
	a	**b**	**c**	**średnia**
a	0,111	0,138	0,063	0,104
b	0,556	0,690	0,750	0,665
c	0,333	0,172	0,188	0,231

4.6.1. Metoda AHP (6/8)

Współczynnik zgodności

1. Mnożymy macierz porównań przez obliczone uprzednio wagi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,104 \\ 0,665 \\ 0,231 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,314 \\ 2,109 \\ 0,709 \end{bmatrix}$$

2. Dzielimy elementy otrzymanego wektora przez kolejne wagi.

$$\frac{0,314}{0,104} = 3,023 \qquad \frac{2,109}{0,665} = 3,171 \qquad \frac{0,709}{0,231} = 3,068$$

3. Obliczamy średnią dla wartości obliczonych w kroku drugim.

$$\lambda_{\max} = \frac{3,023 + 3,171 + 3,068}{3} = 3,087$$

4.6.1. Metoda AHP (7/8)

Współczynnik zgodności (c.d.)

4. Obliczamy współczynnik zgodności ze wzoru:

$$c = \frac{\lambda_{\max} - n}{r(n-1)}$$

r - indeks losowy

n	3	4	5	6	7	8	9	10
r	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

$$c = \frac{\lambda_{\max} - n}{r(n-1)} = \frac{3,087 - 3}{0,58(3-1)} = 0,075$$

c ≤ 0,1 – wystarczająca zgodność

4.6.1. Metoda AHP (8/8)

Przebieg obliczeń

Wyniki obliczeń dla pozostałych kryteriów

	0,256	0,041	0,233	0,470
	cena	eksploatacja	sylwetka	marka
a	0,168	0,334	0,557	0,104
b	0,113	0,568	0,320	0,665
c	0,719	0,098	0,123	0,231

Ranking końcowy

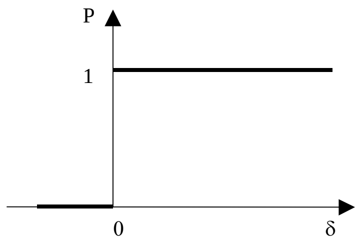
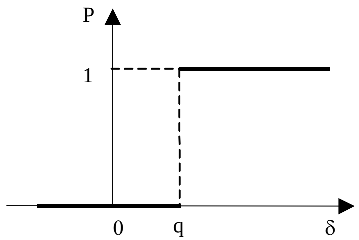
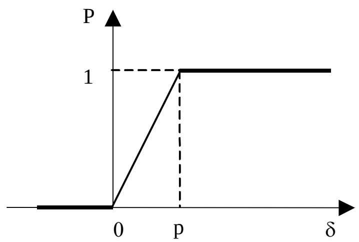
$$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{Ww}$$

$$\overline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0{,}168 & 0{,}334 & 0{,}557 & 0{,}104 \\ 0{,}113 & 0{,}568 & 0{,}320 & 0{,}665 \\ 0{,}719 & 0{,}098 & 0{,}123 & 0{,}231 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}256 \\ 0{,}041 \\ 0{,}233 \\ 0{,}470 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}236 \\ 0{,}439 \\ 0{,}325 \end{bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (1) \\ (2) \end{matrix}$$

4.6.2. Metoda Promethee (1/15)

Promethee – funkcje preferencji

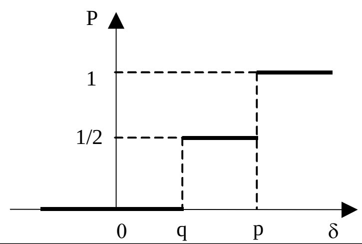
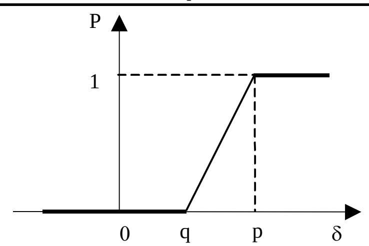
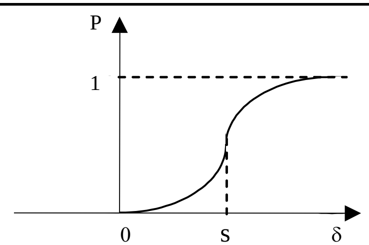
$$\delta_i((a, b) = f_i(a) - f_i(b)$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 1		$P_1(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le 0 \\ 1 & \delta > 0 \end{cases}$
Typ 2		$P_2(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le q \\ 1 & \delta > q \end{cases}$
Typ 3		$P_3(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le 0 \\ \dfrac{\delta}{p} & 0 < \delta \le p \\ 1 & \delta > p \end{cases}$

4.6.2. Metoda Promethee (2/15)

Promethee – funkcje preferencji (c.d.)

$$\delta_i((a, b) = f_i(a,) - f_i(b)$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 4		$P_4(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le q \\ 1/2 & q < \delta \le p \\ 1 & \delta > p \end{cases}$
Typ 5		$P_5(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le q \\ \dfrac{\delta - q}{p - q} & q < \delta \le p \\ 1 & \delta > p \end{cases}$
Typ 6		$P_6(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le 0 \\ 1 - \exp(-\dfrac{\delta^2}{2s^2}) & \delta > 0 \end{cases}$

4.6.2. Metoda Promethee (3/15)

Przykład 4.15

Wagi kryteriów

$$w_1 = 0{,}2,\ w_2 = 0{,}1,\ w_3 = 0{,}3,\ w_4 = 0{,}1,\ w_5 = 0{,}1,\ w_6 = 0{,}2$$

Oceny

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
a	6	10	23	99	1.25	250
b	4	11	22	105	3,5	248
c	4	13	25	95	2,5	249
d	5	12	20	74	1,75	252

Kryterium o numerze *i* jest typu *i*.

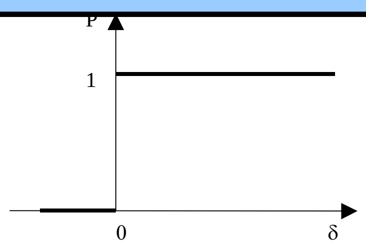
4.6.2. Metoda Promethee (4/15)

Wartości funkcji preferencji

Kryterium f_1 (typ 1)

$$\delta_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_1(\mathbf{a}) - f_1(\mathbf{b}) = 6 - 4 = 2$$

$$\delta_1(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = f_1(\mathbf{b}) - f_1(\mathbf{a}) = 4 - 6 = -2$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 1		$P_1(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le 0 \\ 1 & \delta > 0 \end{cases}$

Ponieważ $\delta_1(\mathbf{a, b}) > 0$ oraz $\delta_1(\mathbf{b, a}) < 0$, więc

$P_1[\delta_1(\mathbf{a, b})] = 1$ i $P_1[\delta_1(\mathbf{b, a})] = 0$

4.6.2. Metoda Promethee (5/15)

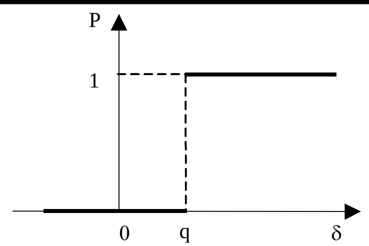
Wartości funkcji preferencji (c.d.)

Kryterium f_2 (typ 2)

Decydent ustalił wartość q = 2

$$\delta_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_2(\mathbf{a}) - f_2(\mathbf{b}) = 10 - 11 = -1$$

$$\delta_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b}) - f_2(\mathbf{a}) = 11 - 10 = 1$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 2		$P_2(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \leq q \\ 1 & \delta > q \end{cases}$

Ponieważ $\delta_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1 < 2$ oraz $\delta_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 1 < 2$, więc

$P_2[\delta_2(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = 0$ i $P_2[\delta_2(\mathbf{b}, \mathbf{a})] = 0$

4.6.2. Metoda Promethee (6/15)

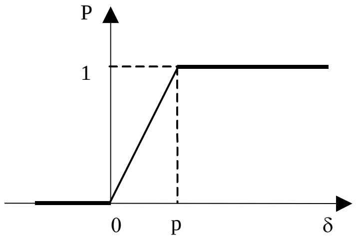
Wartości funkcji preferencji (c.d.)

Kryterium f_3 (typ 3)

Decydent ustalił wartość p = 4

$$\delta_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_3(\mathbf{a}) - f_3(\mathbf{b}) = 23 - 22 = 1$$

$$\delta_3(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = f_3(\mathbf{b}) - f_3(\mathbf{a}) = 22 - 23 = -1$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 3		$P_3(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le 0 \\ \frac{\delta}{p} & 0 < \delta \le p \\ 1 & \delta > p \end{cases}$

Ponieważ $0 \le \delta_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \le 4$ oraz $\delta_3(\mathbf{b}, \mathbf{a}) < 0$, więc

$$P_3[\delta_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = {}^1/_4 \qquad \text{i} \qquad P_3[\delta_3(\mathbf{b}, \mathbf{a})] = 0$$

4.6.2. Metoda Promethee (7/15)

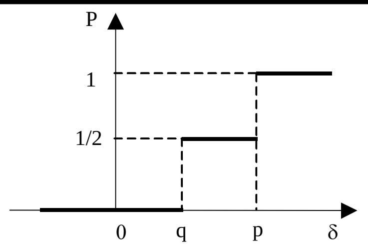
Wartości funkcji preferencji (c.d.)

Kryterium f_4 (typ 4)

Decydent ustalił wartość q = 5 i p = 10

$$\delta_4(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_4(\mathbf{a}) - f_4(\mathbf{b}) = 99 - 105 = -6$$

$$\delta_4(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = f_4(\mathbf{b}) - f_4(\mathbf{a}) = 105 - 99 = 6$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 4		$P_4(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le q \\ \frac{1}{2} & q < \delta \le p \\ 1 & \delta > p \end{cases}$

Ponieważ $\delta_4(\mathbf{a, b}) < 0$ oraz $\mathbf{5} < \delta_4(\mathbf{b, a}) < 10$, więc

$P_4[\delta_4(\mathbf{a, b})] = 0$ i $P_4[\delta_4(\mathbf{b, a})] = {}^1/_2$

4.6.2. Metoda Promethee (8/15)

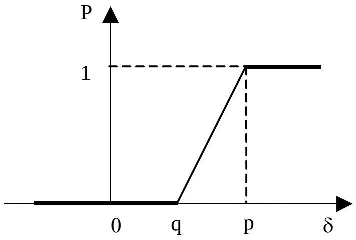
Wartości funkcji preferencji (c.d.)

Kryterium f_5 (typ 5)

Decydent ustalił wartość q = 1 i p = 2

$$\delta_5(\mathbf{a},\mathbf{b}) = f_5(\mathbf{a}) - f_5(\mathbf{b}) = 1{,}25 - 3{,}5 = -2{,}25$$

$$\delta_5(\mathbf{b},\mathbf{a}) = f_5(\mathbf{b}) - f_5(\mathbf{a}) = 3{,}5 - 1{,}25 = 2{,}25$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 5		$P_5(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le q \\ \dfrac{\delta - q}{p - q} & q < \delta \le p \\ 1 & \delta > p \end{cases}$

Ponieważ $\delta_5(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0$ oraz $\delta_5(\mathbf{b},\mathbf{a}) > 2$, więc

$P_5[\delta_5(\mathbf{a},\mathbf{b})] = 0$ i $P_5[\delta_5(\mathbf{b},\mathbf{a})] = 1$

4.6.2. Metoda Promethee (9/15)

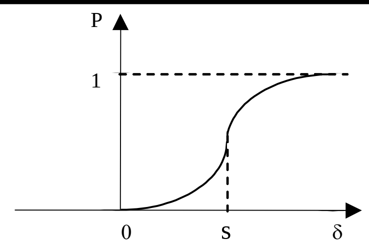
Wartości funkcji preferencji (c.d.)

Kryterium f_6 (typ 6)

Decydent ustalił wartość s = 1

$$\delta_6(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f_6(\mathbf{a}) - f_6(\mathbf{b}) = 250 - 248 = 2$$

$$\delta_6(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = f_6(\mathbf{b}) - f_6(\mathbf{a}) = 248 - 250 = -2$$

Typ	Funkcja preferencji	Definicja
Typ 6		$P_6(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \le 0 \\ 1 - \exp(-\dfrac{\delta^2}{2s^2}) & \delta > 0 \end{cases}$

Ponieważ $\delta_6(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$ oraz $\delta_6(\mathbf{b}, \mathbf{a}) < 0$, więc

$$P_6[\delta_6(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = 0{,}865 \quad \text{i} \quad P_6[\delta_6(\mathbf{b}, \mathbf{a})] = 0$$

4.6.2. Metoda Promethee (10/15)

Wartości funkcji preferencji (c.d.)

δ_1	a	b	c	d	δ_2	a	b	c	d	δ_3	a	b	c	d
a	0	2	2	1	**a**	0	– 1	– 3	– 2	**a**	0	1	– 2	3
b	– 2	0	0	– 1	**b**	1	0	– 2	– 1	**b**	– 1	0	– 3	2
c	– 2	0	0	– 1	**c**	3	2	0	1	**c**	2	3	0	5
d	– 1	1	1	0	**d**	2	1	– 1	0	**d**	– 3	– 2	– 5	0

δ_4	a	b	c	d	δ_5	a	b	c	d	δ_6	a	b	c	d
a	0	– 6	4	25	**a**	0	–2,25	–1,25	–0,5	**a**	0	2	1	– 2
b	6	0	10	31	**b**	2,25	0	1	1,75	**b**	– 2	0	– 1	– 2
c	– 4	–10	0	21	**c**	1,25	– 1	0	0,75	**c**	– 1	1	0	– 3
d	–25	–31	–21	0	**d**	0,5	0,75	–0,75	0	**d**	2	4	3	0

4.6.2. Metoda Promethee (11/15)

Wartości funkcji preferencji (c.d.)

P_1	a	b	c	d	P_2	a	b	c	d	P_3	a	b	c	d
a	0	1	1	1	**a**	0	0	0	0	**a**	0	0,25	0	0,75
b	0	0	0	0	**b**	0	0	0	0	**b**	0	0	0	0,5
c	0	0	0	0	**c**	1	0	0	0	**c**	0,5	0,75	0	1
d	0	1	1	0	**d**	0	0	0	0	**d**	0	0	0	0
P_4	**a**	**b**	**c**	**d**	P_5	**a**	**b**	**c**	**d**	P_6	**a**	**b**	**c**	**d**
a	0	0	0	1	**a**	0	0	0	0	**a**	0	0,865	0,393	0
b	0,5	0	0,5	1	**b**	1	0	0	0,75	**b**	0	0	0	0
c	0	0	0	1	**c**	0,25	0	0	0	**c**	0	0,393	0	0
d	0	0	0	0	**d**	0	0	0	0	**d**	0,865	0,999	0,989	0

4.6.2. Metoda Promethee (12/15)

Zagregowane indeksy preferencji

$$\Pi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{k} w_j P_j(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$\Pi(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} w_j P_j(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

$$\Pi(a, b) = 0,2 \cdot 1 + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,865 = 0,448$$

$$\Pi(b, a) = 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 = 0,15$$

$\Pi(a, a) = 0$	$\Pi(a, b) = 0,448$	$\Pi(a, c) = 0,279$	$\Pi(a, d) = 0,525$
$\Pi(b, a) = 0,15$	$\Pi(b, b) = 0$	$\Pi(b, c) = 0,05$	$\Pi(b, d) = 0,325$
$\Pi(c, a) = 0,275$	$\Pi(c, b) = 0,304$	$\Pi(c, c) = 0$	$\Pi(c, d) = 0,4$
$\Pi(d, a) = 0,173$	$\Pi(d, b) = 0,4$	$\Pi(d, c) = 0,398$	$\Pi(d, d) = 0$

4.6.2. Metoda Promethee (13/15)

Przepływy preferencji

Dodatni przepływ preferencji:

$$\Phi^{+}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1}\sum_{\mathbf{y}\in A}\Pi(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$\Phi^{+}(a) = 0{,}333\,[\Pi(a, b) + \Pi(a, c) + \Pi(a, d)] =$
$= 0{,}333\,(0{,}448 + 0{,}279 + 0{,}525) = 0{,}417$

$\Phi^{+}(b) = 0{,}333\,[\Pi(b, a) + \Pi(b, c) + \Pi(b, d)] =$
$= 0{,}333\,(0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}325) = 0{,}175$

$\Phi^{+}(c) = 0{,}333\,[\Pi(c, a) + \Pi(c, b) + \Pi(c, d)] =$
$= 0{,}333\,(0{,}275 + 0{,}304 + 0{,}4) = 0{,}326$

$\Phi^{+}(d) = 0{,}333\,[\Pi(d, a) + \Pi(d, b) + \Pi(d, c)] =$
$= 0{,}333\,(0{,}173 + 0{,}4 + 0{,}398) = 0{,}324$

4.6.2. Metoda Promethee (14/15)

Przepływy preferencji (c.d.)

Ujemny przepływ preferencji:

$$\Phi^{-}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1}\sum_{\mathbf{y}\in A}\Pi(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

$\Phi^{-}(\mathbf{a}) = 0{,}333\,[\Pi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \Pi(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + \Pi(\mathbf{d}, \mathbf{a})] =$
$= 0{,}333\,(0{,}15 + 0{,}275 + 0{,}173) = 0{,}199$

$\Phi^{-}(\mathbf{b}) = 0{,}333\,[\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \Pi(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + \Pi(\mathbf{d}, \mathbf{b})] =$
$= 0{,}333\,(0{,}448 + 0{,}304 + 0{,}4) = 0{,}384$

$\Phi^{-}(\mathbf{c}) = 0{,}333\,[\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \Pi(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \Pi(\mathbf{d}, \mathbf{c})] =$
$= 0{,}333\,(0{,}279 + 0{,}05 + 0{,}398) = 0{,}242$

$\Phi^{-}(\mathbf{d}) = 0{,}333\,[\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + \Pi(\mathbf{b}, \mathbf{d}) + \Pi(\mathbf{c}, \mathbf{d})] =$
$= 0{,}333\,(0{,}525 + 0{,}325 + 0{,}4) = 0{,}417$

4.6.2. Metoda Promethee (15/15)

Przepływy preferencji (c.d.)

Przepływ netto:

$$\Phi(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)$$

$$\Phi(a) = \Phi^{+}(a) - \Phi^{-}(a) = 0{,}417 - 0{,}199 = 0{,}218 \qquad (1)$$

$$\Phi(b) = \Phi^{+}(b) - \Phi^{-}(b) = 0{,}175 - 0{,}384 = -0{,}209 \qquad (4)$$

$$\Phi(c) = \Phi^{+}(c) - \Phi^{-}(c) = 0{,}326 - 0{,}242 = 0{,}084 \qquad (2)$$

$$\Phi(d) = \Phi^{+}(d) - \Phi^{-}(d) = 0{,}324 - 0{,}417 = -0{,}093 \qquad (3)$$

4.6.3. Metoda Electre I (1/15)

Wagi kryterialne

Wskaźnik przewyższania

$$\varphi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mathrm{f}_{\mathrm{i}}(\mathbf{x}) \geq \mathrm{f}_{\mathrm{i}}(\mathbf{y}) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Współczynnik zgodności

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \varphi_i(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Warunek zgodności – współczynnik zgodności jest nie mniejszy niż wartość podanego przez decydenta progu zgodności $s \in [0,5;\ 1]$

Warunek braku niezgodności – należy wyeliminować sytuacje, w których spełniony jest warunek zgodności, lecz przynajmniej jedno z kryteriów przeważającego wariantu **x** ma niekorzystną wartość. Zwykrycie takiego przypadku możliwe jest dzięki zastosowaniu **progu weta,** którego poziom zadany jest przez decydenta.

4.6.3. Metoda Electre I (2/15)

Reguły postępowania w metodzie Electre I

1. Wyznaczenie zbioru zgodności C_s.
2. Znalezienie **zbioru niezgodności** D_V.
3. Określenie **relacji przewyższania**

$$S(s,v) = C_S \cap \overline{D}_V$$

4. Konstrukcja grafu zależności między wariantami.

4.6.3. Metoda Electre I (3/15)

Przykład 4.16

Warianty	Kryteria			
	f_1	f_2	f_3	f_4
$\mathbf{a}^1$	3	6	7	8
$\mathbf{a}^2$	5	4	7	9
$\mathbf{a}^3$	10	2	5	4
$\mathbf{a}^4$	4	8	5	2
$\mathbf{a}^5$	2	5	11	1
$\mathbf{a}^6$	9	6	3	6
$\mathbf{a}^7$	4	9	7	6
$\mathbf{a}^8$	1	7	9	10
$\mathbf{a}^9$	5	3	6	4

Progi weta:

$$v_1 = 5,\ v_2 = 7,\ v_3 = 6,\ v_4 = 5,$$

Współczynniki wagowe:

$$w_1 = 0{,}08,\ w_2 = 0{,}33,\ w_3 = 0{,}17,\ w_4 = 0{,}42.$$

Próg zgodności:

$$s = 0{,}83.$$

4.6.3. Metoda Electre I (4/15)

Wskaźniki przewyższania - wyznaczeniu zbioru zgodności

$\mathbf{a}^1$	**3**
$\mathbf{a}^2$	**5**
$\mathbf{a}^3$	10
$\mathbf{a}^4$	4
$\mathbf{a}^5$	2
$\mathbf{a}^6$	9
$\mathbf{a}^7$	4
$\mathbf{a}^8$	**1**
$\mathbf{a}^9$	**5**

$f_1(\mathbf{a}^1) \geq f_1(\mathbf{a}^1) \;\Rightarrow\; \varphi_1(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^1) = 1$ (ponieważ $3 \geq 3$)

$f_1(\mathbf{a}^1) < f_1(\mathbf{a}^2) \;\Rightarrow\; \varphi_1(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) = 0$ (ponieważ $3 < 5$)

…………………………………..

$f_1(\mathbf{a}^9) \geq f_1(\mathbf{a}^8) \;\Rightarrow\; \varphi_1(\mathbf{a}^9, \mathbf{a}^8) = 1$ (ponieważ $5 \geq 1$)

$f_1(\mathbf{a}^9) \geq f_1(\mathbf{a}^9) \;\Rightarrow\; \varphi_1(\mathbf{a}^9, \mathbf{a}^9) = 1$ (ponieważ $5 \geq 5$)

4.6.3. Metoda Electre I (5/15)

Wyznaczeniu zbioru zgodności

Kryterium 1

Φ_1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
a^2	1	1	0	1	1	0	1	1	1
a^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^4	1	0	0	1	1	0	1	1	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	1	0
a^6	1	1	0	1	1	1	1	1	1
a^7	1	0	0	1	1	0	1	1	0
a^8	0	0	0	0	0	0	0	1	0
a^9	1	1	0	1	1	0	1	1	1

Kryterium 2

Φ_2	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	1	1	1	1	1	1	0	1	1
a^5	0	1	1	0	1	0	0	0	1
a^6	1	1	1	0	1	1	0	0	1
a^7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^8	1	1	1	0	1	1	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

4.6.3. Metoda Electre I (6/15)

Wyznaczeniu zbioru zgodności (c.d.)

Kryterium 3

Φ_3	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
a^2	1	1	1	1	0	1	1	0	1
a^3	0	0	1	1	0	1	0	0	0
a^4	0	0	1	1	0	1	0	0	0
a^5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^6	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a^7	1	1	1	1	0	1	1	0	1
a^8	1	1	1	1	0	1	1	1	1
a^9	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Kryterium 4

Φ_4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
a^2	1	1	1	1	1	1	1	0	1
a^3	0	0	1	1	1	0	0	0	1
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^7	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^9	0	0	1	1	1	0	0	0	1

4.6.3. Metoda Electre I (7/15)

Obliczenie zbioru zgodności (s=0,83)

$$c(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) = w_1\varphi_1(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) + w_2\varphi_2(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) + w_3\varphi_3(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) + w_4\varphi_4(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$$

$$= 0{,}08 \cdot 0 + 0{,}33 \cdot 1 + 0{,}17 \cdot 1 + 0{,}42 \cdot 0 = \mathbf{0{,}50}$$

$$\boldsymbol{C} = w_1\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{w}_2\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{w}_3\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{w}_4\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{4}}$$

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1,00	**0,50**	0,92	0,59	0,83	0,92	0,59	0,08	0,92
a^2	0,67	1,00	0,92	0,67	0,50	0,59	0,67	0,08	1,00
a^3	0,08	0,08	1,00	0,67	0,50	0,25	0,08	0,08	0,50
a^4	0,41	0,33	0,50	1,00	0,83	0,50	0,08	0,41	0,33
a^5	0,17	0,50	0,50	0,17	1,00	0,17	0,17	0,25	0,50
a^6	0,41	0,41	0,75	0,50	0,83	1,00	0,50	0,08	0,83
a^7	0,58	0,50	0,92	1,00	0,83	0,92	1,00	0,41	0,92
a^8	0,92	0,92	0,92	0,59	0,75	0,92	0,59	1,00	0,92
a^9	0,08	0,08	0,92	0,67	0,50	0,17	0,50	0,08	1,00

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	1	1	0	0	1
a^7	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	1	0	0	1	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

4.6.3. Metoda Electre I (8/15)

Wyznaczenie zbioru niezgodności

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1,00	0,50	0,92	0,59	0,83	0,92	0,59	0,08	0,92
a^2	0,67	1,00	0,92	0,67	0,50	0,59	0,67	0,08	1,00
a^3	0,08	0,08	1,00	0,67	0,50	0,25	0,08	0,08	0,50
a^4	0,41	0,33	0,50	1,00	0,83	0,50	0,08	0,41	0,33
a^5	0,17	0,50	0,50	0,17	1,00	0,17	0,17	0,25	0,50
a^6	0,41	0,41	0,75	0,50	0,83	1,00	0,50	0,08	0,83
a^7	0,58	0,50	0,92	1,00	0,83	0,92	1,00	0,41	0,92
a^8	0,92	0,92	0,92	0,59	0,75	0,92	0,59	1,00	0,92
a^9	0,08	0,08	0,92	0,67	0,50	0,17	0,50	0,08	1,00

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	1	1	0	0	1
a^7	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	1	0	0	1	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

$C_{0,83}$ = { $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3)$, $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^5)$, $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^6)$, $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^9)$, $(\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$, $(\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^9)$, $(\mathbf{a}^4, \mathbf{a}^5)$, $(\mathbf{a}^6, \mathbf{a}^5)$, $(\mathbf{a}^6, \mathbf{a}^9)$, $(\mathbf{a}^7, \mathbf{a}^3)$, $(\mathbf{a}^7, \mathbf{a}^4)$, $(\mathbf{a}^7, \mathbf{a}^5)$, $(\mathbf{a}^7, \mathbf{a}^6)$, $(\mathbf{a}^7, \mathbf{a}^9)$, $(\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^1)$, $(\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^2)$, $(\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^3)$, $(\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^6)$, $(\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^9)$, $(\mathbf{a}^9, \mathbf{a}^3)$ }

$v_1 = 5$

	$f_1(\mathbf{a})$
$\mathbf{a}^1$	3
$\mathbf{a}^2$	5
$\mathbf{a}^3$	10
$\mathbf{a}^4$	4
$\mathbf{a}^5$	2
$\mathbf{a}^6$	9
$\mathbf{a}^7$	4
$\mathbf{a}^8$	1
$\mathbf{a}^9$	5

$(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3)$: $f_1(\mathbf{a}^1) + v_1 < f_1(\mathbf{a}^3)$ $(3 + 5 < 10)$ niezgodność

$(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^5)$: $f_1(\mathbf{a}^1) + v_1 \geq f_1(\mathbf{a}^5)$ $(3 + 5 \geq 2)$ brak niezgodności

....

$(\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^9)$: $f_1(\mathbf{a}^8) + v_1 \geq f_1(\mathbf{a}^9)$ $(1 + 5 \geq 5)$ brak niezgodności

$(\mathbf{a}^9, \mathbf{a}^3)$: $f_1(\mathbf{a}^9) + v_1 \geq f_1(\mathbf{a}^3)$ $(5 + 5 \geq 10)$ brak niezgodności

4.6.3. Metoda Electre I (9/15)

Wyznaczenie zbioru niezgodności (c.d.)

f_1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	*	*	1	*	0	1	*	*	0
a^2	*	*	0	*	*	*	*	*	0
a^3	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^4	*	*	*	*	0	*	*	*	*
a^5	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^6	*	*	*	*	0	*	*	*	0
a^7	*	*	1	0	0	0	*	*	0
a^8	0	0	1	*	*	1	*	*	0
a^9	*	*	0	*	*	*	*	*	*

f_2	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	*	*	0	*	0	0	*	*	0
a^2	*	*	0	*	*	*	*	*	0
a^3	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^4	*	*	*	*	0	*	*	*	*
a^5	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^6	*	*	*	*	0	*	*	*	0
a^7	*	*	0	0	0	0	*	*	0
a^8	0	0	0	*	*	0	*	*	0
a^9	*	*	0	*	*	*	*	*	*

4.6.3. Metoda Electre I (10/15)

Wyznaczenie zbioru niezgodności (c.d.)

f_3	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	*	*	0	*	0	0	*	*	0
a^2	*	*	0	*	*	*	*	*	0
a^3	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^4	*	*	*	*	0	*	*	*	*
a^5	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^6	*	*	*	*	1	*	*	*	0
a^7	*	*	0	0	0	0	*	*	0
a^8	0	0	0	*	*	0	*	*	0
a^9	*	*	0	*	*	*	*	*	*

f_4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	*	*	0	*	0	0	*	*	0
a^2	*	*	0	*	*	*	*	*	0
a^3	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^4	*	*	*	*	0	*	*	*	*
a^5	*	*	*	*	*	*	*	*	*
a^6	*	*	*	*	0	*	*	*	0
a^7	*	*	0	0	0	0	*	*	0
a^8	0	0	0	*	*	0	*	*	0
a^9	*	*	0	*	*	*	*	*	*

4.6.3. Metoda Electre I (11/15)

Zbiór niezgodności

$$D_v = \{ (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3), (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^6), (\mathbf{a}^6, \mathbf{a}^5), (\mathbf{a}^7, \mathbf{a}^3), (\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^3), (\mathbf{a}^8, \mathbf{a}^6) \}$$

Zbiór D_v

	$\mathbf{a}^1$	$\mathbf{a}^2$	$\mathbf{a}^3$	$\mathbf{a}^4$	$\mathbf{a}^5$	$\mathbf{a}^6$	$\mathbf{a}^7$	$\mathbf{a}^8$	$\mathbf{a}^9$
$\mathbf{a}^1$	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0
$\mathbf{a}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{a}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{a}^4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{a}^5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{a}^6$	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
$\mathbf{a}^7$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{a}^8$	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0
$\mathbf{a}^9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Zbiór $\overline{D}_v$

	$\mathbf{a}^1$	$\mathbf{a}^2$	$\mathbf{a}^3$	$\mathbf{a}^4$	$\mathbf{a}^5$	$\mathbf{a}^6$	$\mathbf{a}^7$	$\mathbf{a}^8$	$\mathbf{a}^9$
$\mathbf{a}^1$	1	1	**0**	1	1	**0**	1	1	1
$\mathbf{a}^2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}^3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}^4$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}^5$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}^6$	1	1	1	1	**0**	1	1	1	1
$\mathbf{a}^7$	1	1	**0**	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}^8$	1	1	**0**	1	1	**0**	1	1	1
$\mathbf{a}^9$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.6.3. Metoda Electre I (12/15)

Wyznaczenie relacji przewyższania

Zbiór zgodności C

C	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
a^2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a^3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	1	1	0	0	1
a^7	0	0	1	1	1	1	1	0	1
a^8	1	1	1	0	0	1	0	1	1
a^9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Dopełnienie zbioru niezgodności

Zbiór $\overline{D}_v$

	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	1	1	**0**	1	1	**0**	1	1	1
a^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^6	1	1	1	1	**0**	1	1	1	1
a^7	1	1	**0**	1	1	1	1	1	1
a^8	1	1	**0**	1	1	**0**	1	1	1
a^9	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.6.3. Metoda Electre I (13/15)

Wyznaczenie relacji przewyższania

$$S(s,v) = C_s \cap \overline{D}_v = \{(a^1, a^5), (a^1, a^9), (a^2, a^3), (a^2, a^9), (a^4, a^5), (a^6, a^9), (a^7, a^4), (a^7, a^5), (a^7, a^6), (a^7, a^9), (a^8, a^1), (a^8, a^2), (a^8, a^9), (a^9, a^3)\}$$

S	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^1	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**
a^2	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	**1**
a^3	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
a^4	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0
a^5	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
a^6	0	0	0	0	0	**1**	0	0	**1**
a^7	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**	0	**1**
a^8	**1**	**1**	0	0	0	0	0	**1**	**1**
a^9	0	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**

4.6. Wielokryterialne metody dyskretne

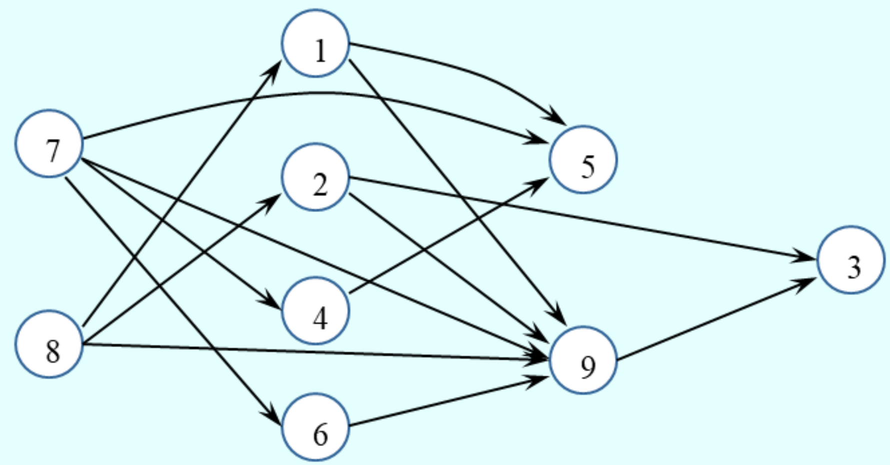
4.6.3. Metoda Electre I (14/15)

Porządkowanie grafu od wariantu najlepszego do najgorszego

S	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
a_2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	1	0	0	1
a_7	0	0	0	1	1	1	1	0	1
a_8	1	1	0	0	0	0	0	1	1
a_9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

S	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6			a_9
a_1	1	0	0	0	1	0			1
a_2	0	1	1	0	0	0			1
a_3	0	0	1	0	0	0			0
a_4	0	0	0	1	1	0			0
a_5	0	0	0	0	1	0			0
a_6	0	0	0	0	0	1			1
a_9	0	0	1	0	0	0			1

S			a_3		a_5				a_9
a_3			1		0				0
a_5			0		1				0
a_9			1		0				1



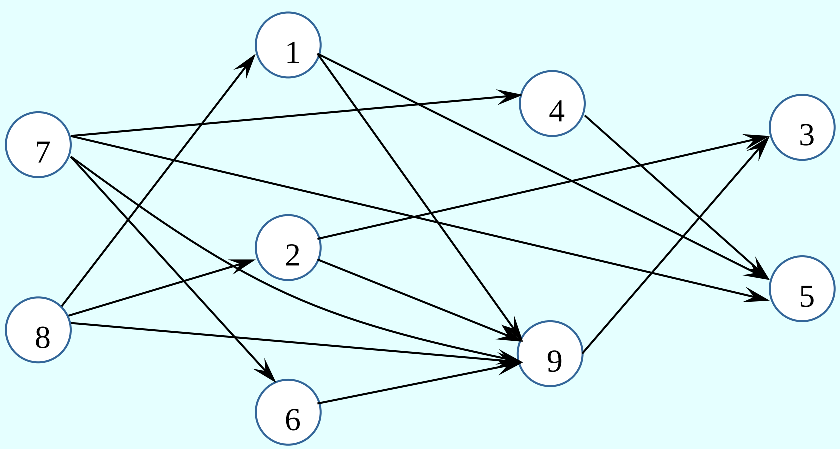
4.6.3. Metoda Electre I (15/15)

Porządkowanie grafu od wariantu najgorszego do najlepsego

s	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
a_2	0	1	1	0	0	0	0	0	1
a_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	1	0	0	1
a_7	0	0	0	1	1	1	1	0	1
a_8	1	1	0	0	0	0	0	1	1
a_9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

s	a_1	a_2		a_4		a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	0		0		0	0	0	1
a_2	0	1		0		0	0	0	1
a_4	0	0		1		0	0	0	0
a_6	0	0		0		1	0	0	1
a_7	0	0		1		1	1	0	1
a_8	1	1		0		0	0	1	1
a_9	0	0		0		0	0	0	1

s	a_1	a_2				a_6	a_7	a_8	
a_1						0	0	0	
a_2						0	0	0	
a_6						1	0	0	
a_7						1	1	0	
a_8						0	0	1	



4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (1/7)

Przykład 4.17

Tygodniki: A, B, C, D, E.
Zasięg i częstotliwość czytelnictwa czasopisma.
Efekt prestiżu (skala od 1 do 10).

Tygodnik	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
cena jednego ogłoszenia	30	28	23	19	18
prestiż	2	1	4	5	3
jednostkowy zasięg	7.5	7	5.75	4.75	4.5
jednostkowa częstotliwość czytelnictwa	0.16	0.15	0.12	0.10	0.10

Zasięg nie mniejszy niż 70% grupy docelowej.
Częstotliwość nie mniejsza niż 2

Cele: I - minimalizacja kosztów (cel priorytetowy)
II - maksymalizacja efektu prestiżu

4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (2/7)

Model matematyczny

Cel(e)

Celem jest określenie najlepszej kompozycji mediów. Zadanie rozpatrujemy jako dwukryterialny problem hierarchiczny, w którym:

I. Minimalizujemy koszt kampanii

II. Maksymalizujemy całkowity prestiż

Zmienne decyzyjne

x_A – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku A

x_B – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku B

x_C – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku C

x_D – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku D

x_E – liczba reklam w trakcie kampanii w tygodniku E

4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (3/7)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcje kryterialne

Funkcja kosztu: $30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E \rightarrow \min$

Funkcja efektu prestiżu: $2x_A + x_B + 4x_C + 5x_D + 3x_E \rightarrow \max$

Ograniczenia:

całkowity zasięg: $7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E \geq 70$

całkowita częstotliwość: $0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E \geq 2$

Ograniczenia na zmienne decyzyjne

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \text{ – całkowite}$$

4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (4/7)

Ścisła hierarchia kryteriów

Funkcja celu pierwszego poziomu hierarchii

$$30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E \rightarrow \min$$

Ograniczenia:

$$7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E \geq 70$$
$$0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E \geq 2$$

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$
$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \text{ – całkowite}$$

Rozwiązania optymalne:

1. $x_A = 3 \quad x_B = 4 \quad x_C = 1 \quad x_D = 4 \quad x_E = 4$
2. $x_A = 4 \quad x_B = 4 \quad x_C = 3 \quad x_D = 0 \quad x_E = 4$

Optymalna wartość funkcji kosztu wynosi 373.

4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (5/7)

Ścisła hierarchia kryteriów (c.d.)

Funkcja celu drugiego poziomu hierarchii

$$2x_A + x_B + 4x_C + 5x_D + 3x_E \rightarrow \max$$

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych

1. $x_A = 3 \quad x_B = 4 \quad x_C = 1 \quad x_D = 4 \quad x_E = 4$
2. $x_A = 4 \quad x_B = 4 \quad x_C = 3 \quad x_D = 0 \quad x_E = 4$

Rozwiązanie optymalne

Dla pierwszego z otrzymanych rozwiązań wartość funkcji prestiżu jest równa 46, a drugiego wynosi 36.

Należy wybrać rozwiązanie pierwsze.

4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (6/7)

Quasi hierarchia kryteriów

Funkcja celu pierwszego poziomu hierarchii

$$30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E \rightarrow \min$$

Ograniczenia:

$$7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E \geq 70$$
$$0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E \geq 2$$

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$
x_A, x_B, x_C, x_D, x_E – całkowite

Rozwiązania optymalne:

1. $x_A = 3 \quad x_B = 4 \quad x_C = 1 \quad x_D = 4 \quad x_E = 4$
2. $x_A = 4 \quad x_B = 4 \quad x_C = 3 \quad x_D = 0 \quad x_E = 4$

Optymalna wartość funkcji kosztu wynosi 373.

Drugi poziom hierarchii

Decydent zgadza się na zwiększenie kwoty przeznaczonej na reklamę o 10%, czyli maksymalnym akceptowalnym kosztem jest wartość 410.

4.7.1. Organizacja kampanii reklamowej (7/7)

Quasi hierarchia kryteriów (c.d.)

Funkcja celu drugiego poziomu hierarchii

$$f(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = 2x_A + x_B + 4x_C + 5x_D + 3x_E \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E &\geq 70 \\ 0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E &\geq 2 \\ 30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E &\leq 410 \end{aligned}$$

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \text{ – całkowite}$$

Rozwiązanie

Efekt prestiżu wynosi teraz 53, koszt zwiększył się do 388.
Dla efektu prestiżu wynik ten jest zdecydowanie lepszy, bo aż o 16,7% od wyniku otrzymanego z uwzględnieniem ścisłej hierarchii. Tak znaczące polepszenie wyniku zostało osiągnięte przez zwiększenie kosztu kampanii jedynie o 4%.

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (1/7)

Przykład 4.18

Cel 1: osiągnięcie zysku długookresowego równego przynajmniej 100 mln zł;

Cel 2: utrzymanie zatrudnienia na poziomie 3 000 osób,

Cel 3: utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie wyższym niż 40 mln zł

Cel	**zysk jednostkowy**			**założony poziom osiągnięcia celu**	**współczynniki kary**
	P_1	P_2	P_3		
zysk długookresowy	10	8	13	≥ 100 (mln zł)	6(-)
poziom zatrudnienia	4	2	3	$= 30$ (setki zatrudnionych)	2(+), 5(-)
nakłady i inwestycje	5	7	8	≤ 40 (mln zł)	4(+)

Należy znaleźć taki poziom produkcji, który najlepiej realizuje przyjęte cele z uwzględnieniem. zadanych współczynników kar.

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (2/7)

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_1
x_2 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_2
x_3 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_3

Zmienne bilansujące cele

y_1^+ = wielkość, o jaką osiągnięty zysk przekracza wartość 100 mln zł
y_1^- = wielkość, o jaką osiągnięty zysk jest mniejszy od 100 mln zł

y_2^+ = wielkość, o jaką zatrudnienie przekracza 30 setek osób,
y_2^- = wielkość, o jaką zatrudnienie jest mniejsze od 30 setek osób,

y_3^+ = wielkość, o jaką nakłady inwestycyjne przekraczają 40 mln zł,
y_3^- = wielkość, o jaką nakłady inwestycyjne są mniejsze od 40 mln zł,

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (3/7)

Zadanie zastępcze

Funkcja celu zadania zastępczego:

Minimalizacja ważonej sumy niekorzystnych odchyleń od ustalonych poziomów realizacji celów.

$$6y_1^- + 2y_2^+ + 5y_2^- + 4y_3^+ \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające:

Równanie bilansujące dla celu pierwszego:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

Równanie bilansujące dla celu drugiego:

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

Równanie bilansujące dla celu trzeciego:

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (4/7)

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$

$$y_1^+ = 0 \quad y_1^- = 0$$

$$y_2^+ = 10 \quad y_2^- = 0$$

$$y_3^+ = 10 \quad y_3^- = 0$$

Minimalna wartość funkcji mierzącej odchylenie od zadanych pomiarów celów jest równa 60.

Interpretacja rozwiązania

Nie jest możliwe jednoczesne zrealizowanie wszystkich trzech celów. Poziom zatrudnienia przekroczy docelową wartość 1000 pracowników, a nakłady inwestycyjne przekroczą docelowe wartości 10 mln zł.

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (5/7)

Hierarchizacja celów

Pierwszy poziom hierarchii:

Cel 2a: nieprzekroczenie aktualnego poziomu zatrudnienia (3000 osób)

Cel 3: utrzymanie nakładów inwestycyjnych na poziomie nie większym niż 30 mln zł

Drugi poziom hierarchii:

Cel 1: osiągnięcie zysku długookresowego na poziomie 100 mln zł,

Cel 2b: utrzymanie dotychczasowego poziomu zatrudnienia i nie obniżanie go.

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (6/7)

Hierarchizacja celów (c.d.)

Zadanie pierwszego poziomu hierarchii

$$2y_2^+ + 4y_3^+ \rightarrow \min$$

Cel 1 $10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$

Cel 2 $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$

Cel 3 $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Zadanie drugiego poziomu hierarchii

$$6y_1^- + 5y_2^- \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- &= 100 \\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- &= 30 \\
5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- &= 40 \\
2y_2^+ + 4y_3^+ &= 30
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

4.7.2. Określenie strategii długookresowej firmy (7/7)

Hierarchizacja celów (c.d.)

Rozwiązanie optymalne

$x_1 = 7.06 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0.59$

$y_1^+ = 0 \qquad y_1^- = 21,76$

$y_2^+ = 0 \qquad y_2^- = 0$

$y_3^+ = 0 \qquad y_3^- = 0$

Interpretacja rozwiązania

Możliwe jest pełne osiągnięcie celów związanych z inwestycjami i zatrudnieniem, natomiast nie ma możliwości osiągnięcia postulowanego poziomu zysku, który będzie mniejszy o 21,76 mln zł od poziomu 100 mln.

Pora na relaks