Многокритериальное программирование

Т. Тжаскалик

Введение в исследование операций

с применением компьютера

Задача векторной максимизации (1)

Пример 4.1.

Ресурс	P_1	P_2	Объем
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
	2	3	

Спланировать производство так, чтобы одновременно максимизировать доход и совокупный объем продукции.

Задача векторной максимизации (2)

Решающие переменные

x_1 - планируемый объем выпуска изделия P_1

x_2 - планируемый объем выпуска изделия P_2

Целевые функции

$f_1(x_1,x_2)$ - функция, описывающая доход

$f_2(x_1,x_2)$ - функция, описывающая совокупный объем продукции

Векторная критериальная функция

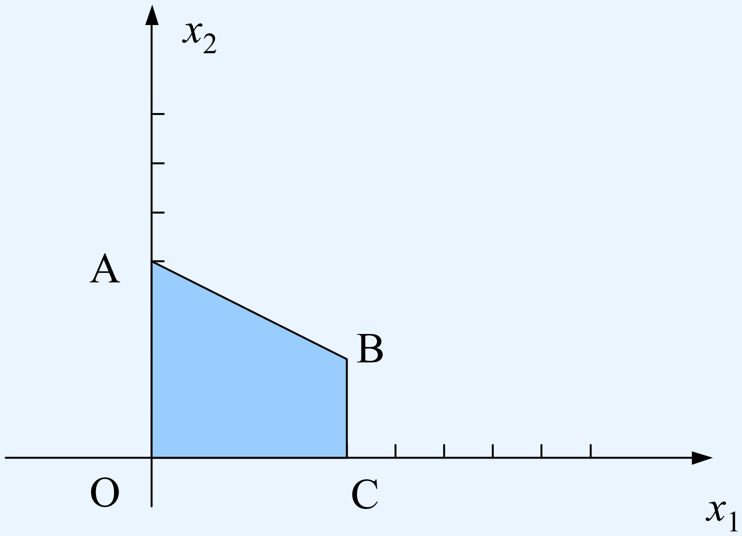
$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Задача векторной максимизации (3)

Ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \phantom{{}+2x_2} &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Множество допустимых решений в пространстве решений



Задача векторной максимизации (4)

Теорема 4.1

Множество допустимых решений многокритериальной задачи линейного программирования в пространстве критериев является выпуклым многогранником. Каждая вершина этого многогранника является отображением некоторой вершины множества допустимых решений в пространстве решений, тогда как остальные точки представляют собой множество комбинаций выпуклых вершинных точек.

Задача векторной максимизации (5)

Множество допустимых решений в пространстве критериев

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

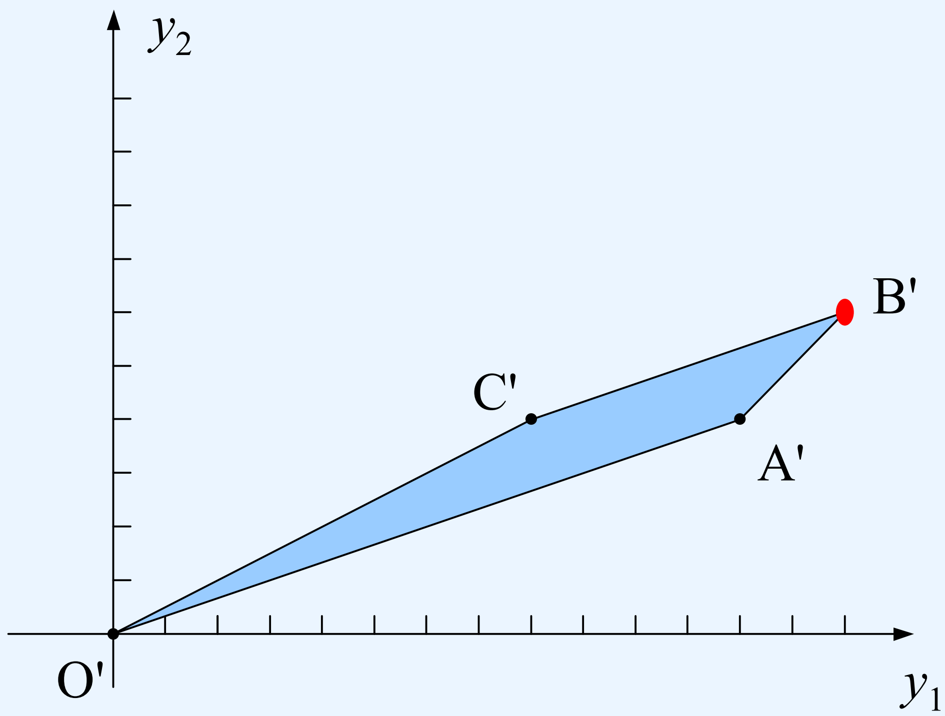
$$F(O) = F([0,0]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = O' \qquad F(A) = F([0,4]) = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = A'$$

$$F(B) = F([4,2]) = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \end{bmatrix} = B' \qquad F(C) = F([4,0]) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = C'$$

$$Y = \left\{ \begin{array}{c} Y : Y = \lambda_1 O' + \lambda_2 A' + \lambda_3 B' + \lambda_4 C', \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Задача векторной максимизации (6)

Доминирующее решение



B’ доминирует над всеми допустимыми решениями в пространстве критериев

Задача векторной максимизации (7)

Пример 4.2

Спланировать выпуск продукции так, чтобы одновременно максимизировать доход и минимизировать использование дефицитного ресурса S_1.

Математическая модель

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
\varphi_2(x_1, x_2) &= 2x_1 + 2x_2 \to \min
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 + \quad\quad &\le 16
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&\boxed{f_2(x_1, x_2) = -2x_1 - 2x_2 \to \max}
\end{aligned}
$$

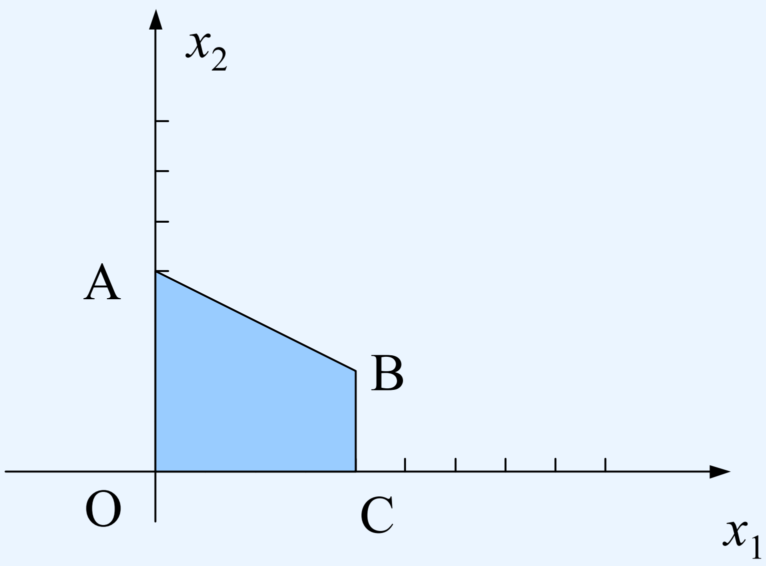
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 + \quad\quad &\le 16
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

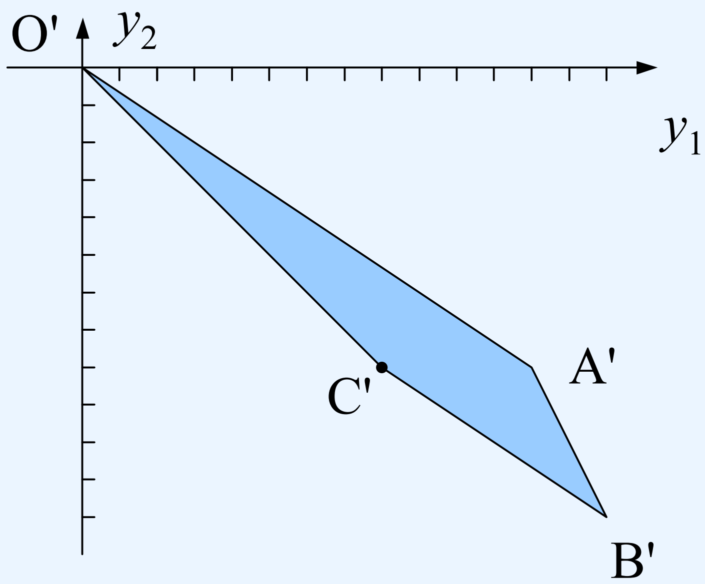
Задача векторной максимизации (8)

Множества допустимых решений

в пространстве решений



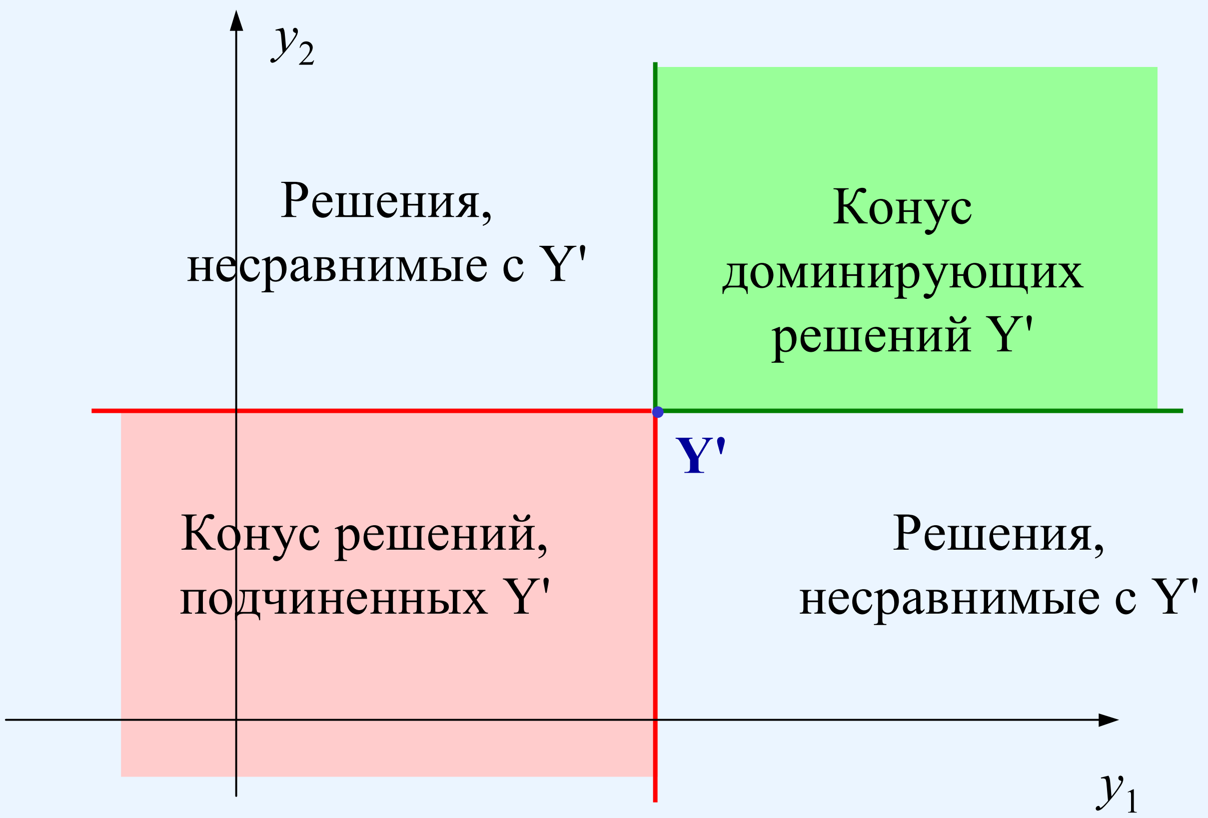
в пространстве критериев



Отсутствие доминирующего решения

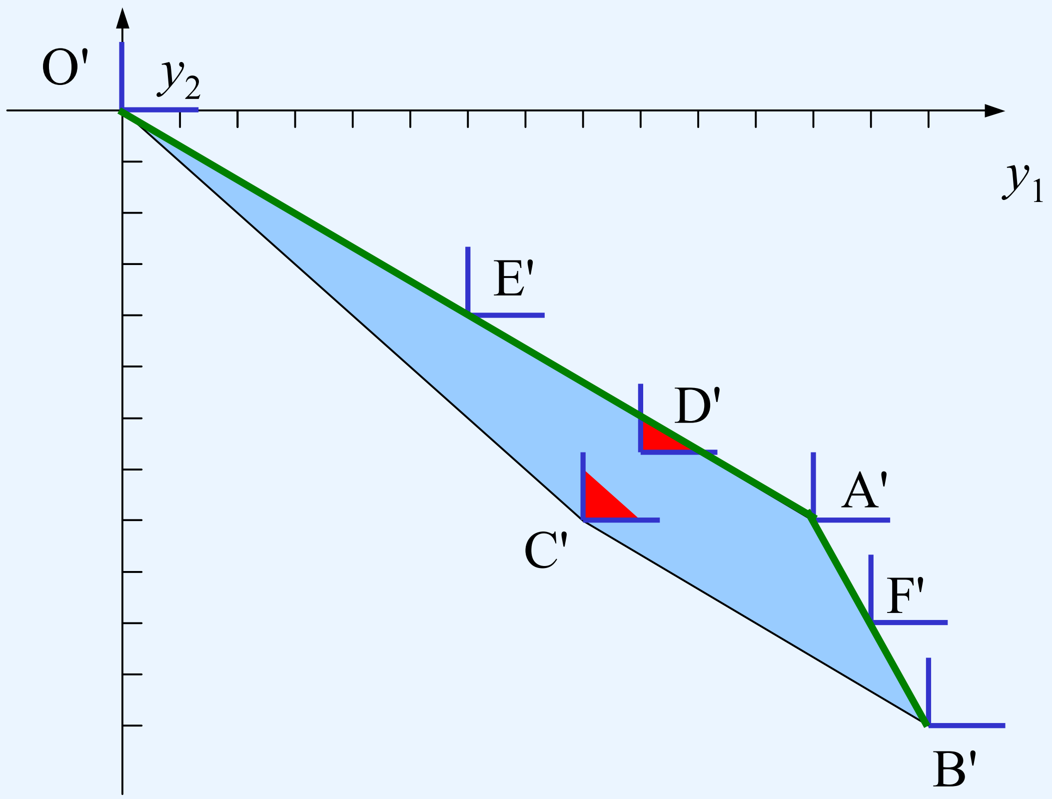
Задача векторной максимизации (9)

Конусы доминирующих решений и решений, подчиненных Y’



Задача векторной максимизации (10)

Недоминируемые и подчиненные решения



Недоминируемые решения: O’, A’, B’, $\overline{\text{O’A’}}$, $\overline{\text{A’B’}}$

Решения в пространстве решений, соответствующие недоминируемым решениям, называются **корректными решениями**.

Скаляризация многокритериальной задачи

Некоторые методы генерации корректных решений:

Корректное решение можно получить при помощи:

- единственной целевой функции,
- метода удовлетворительного уровня значений критериев,
- метода взвешенной суммы,
- путем иерархии критериев,
- с использованием идеальной точки,
- интерактивного метода.

Генерация корректных решений при помощи единственной целевой функции

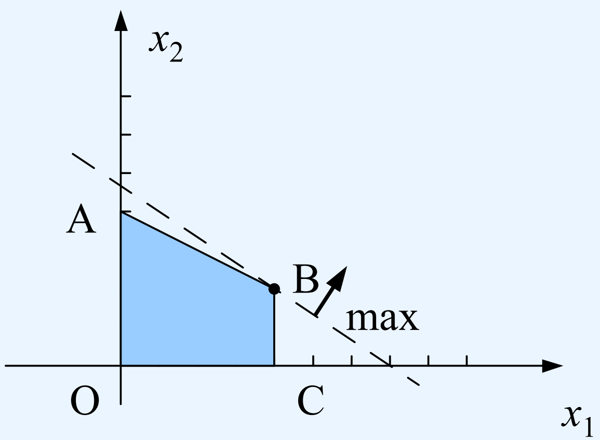
Пример 4.3

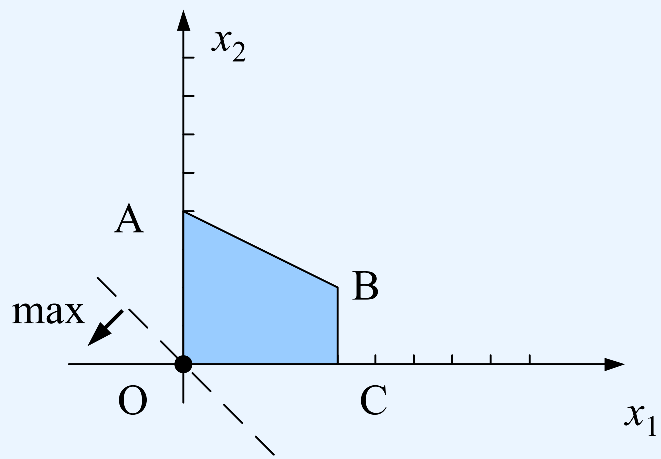
Задача P_1

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 &\le 16 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Задача P_2

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 &\le 16 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

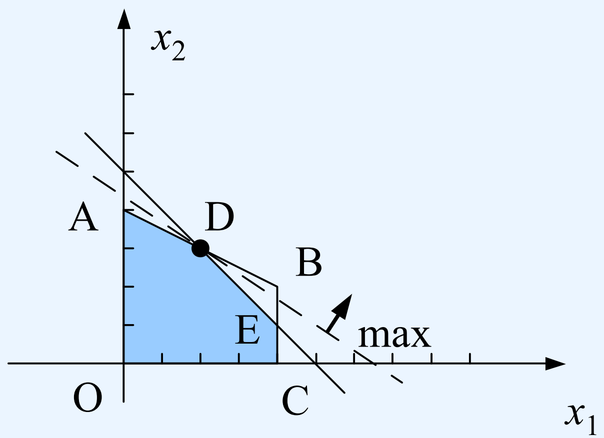


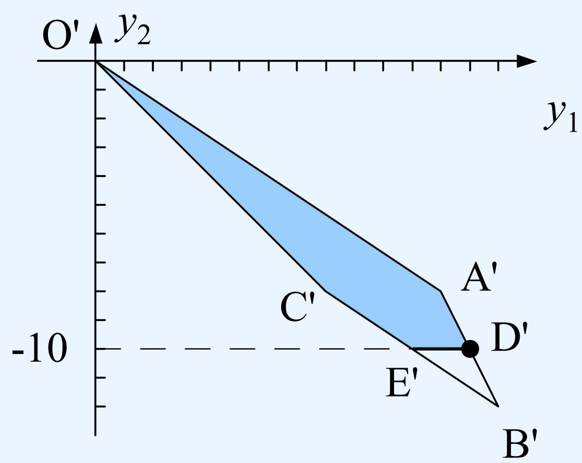


Метод удовлетворительного уровня критериев

Пример 4.4

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 &\le 16 \\
\boxed{-2x_1 - 2x_2 \ge -10} \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$





Метод взвешенной суммы

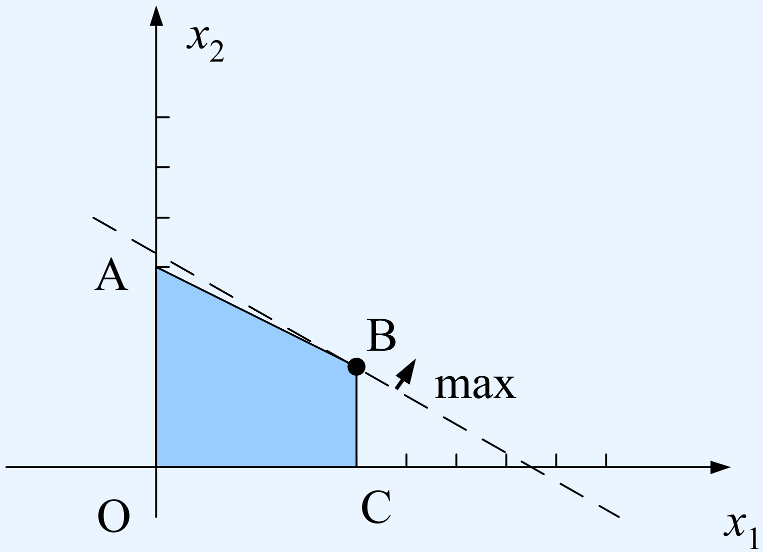
Пример 4.5

ЛПР установил относительную важность первого и второго критерия в отношении 3 : 1

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2$$
$$y_2 = -2x_1 - 2x_2$$

$$y = 3y_1 + y_2 = 3(2x_1 + 3x_2) + (-2x_1 - 2x_2) = 4x_1 + 7x_2$$

$$4x_1 + 7x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$4x_1 \le 16$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Иерархия критериев

Пример 4.6

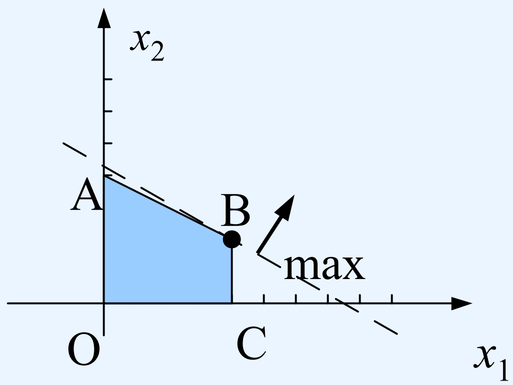
Важнейшей считается первая цель, на следующем уровне – вторая цель.

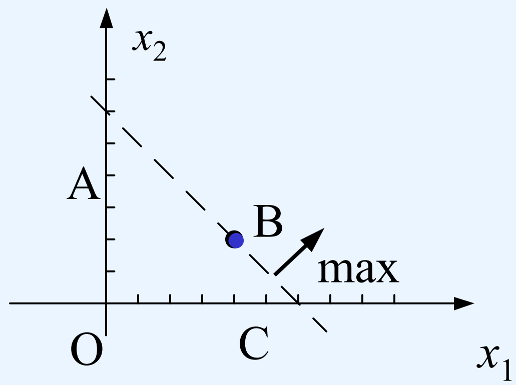
Первый уровень иерархии

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad\quad &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Второй уровень иерархии

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad\quad &\le 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 14 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$





Квази-иерархия критериев

Пример 4.7

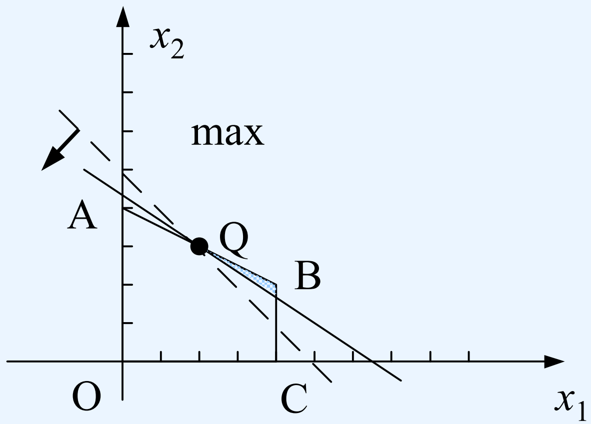
Разность между оптимальным значением для первого критерия и фактическим значением в рассматриваемом решении не превышает 1.

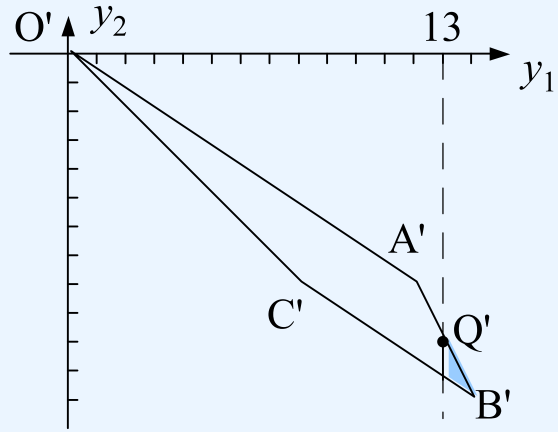
Первый уровень иерархии

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$4x_1 \le 16$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Второй уровень иерархии

$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$4x_1 \le 16$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 13$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



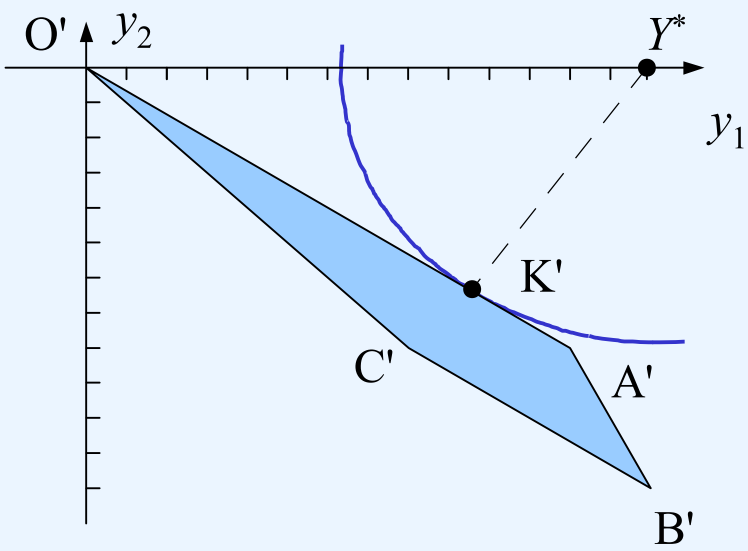


Идеальная точка

Пример 4.8

В качестве способа измерения расстояния в пространстве критериев используется евклидова метрика.

Идеальная точка $Y^*(14, 0)$



Интерактивный метод (1)

Пример 4.9

$$f_1(x_1, x_2) = \ \ 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$4x_1 \qquad \le 16$$

$$x_1, x_2 \ge \ 0$$

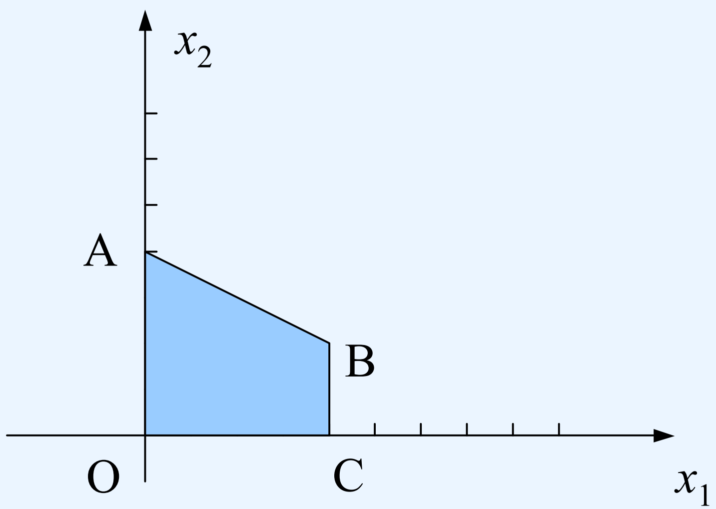
Интерактивный метод (2)

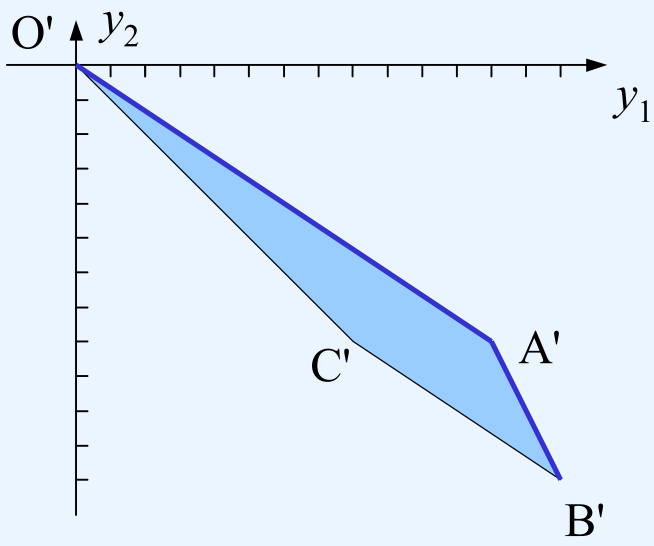
Задача P_{01}

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
&x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&4x_1 \le 16 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Задача P_{02}

$$
\begin{aligned}
&-2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max \\
&x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&4x_1 \le 16 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$





Интерактивный метод (3)

Решение \ Критерий	f_1	f_2
R_{01}	14	-12
R_{02}	0	0

Значение \ Критерий	f_1	f_2
Пессимистическое	0	-12
Оптимистическое	14	0

Задача P_{11}

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Задача P_{12}

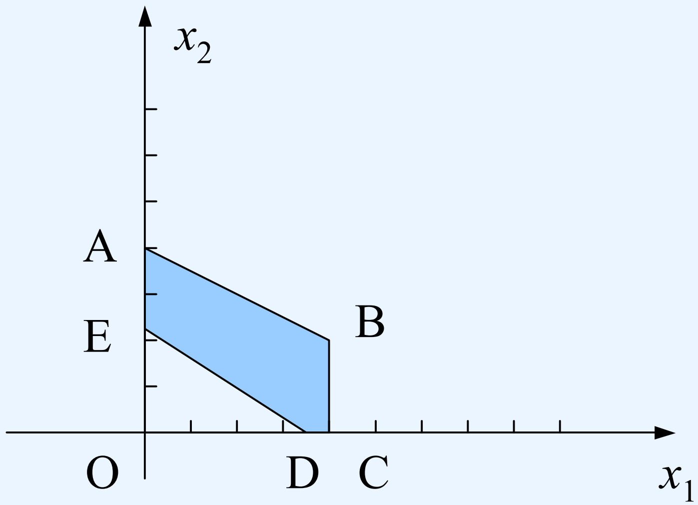
$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$

Ограничения

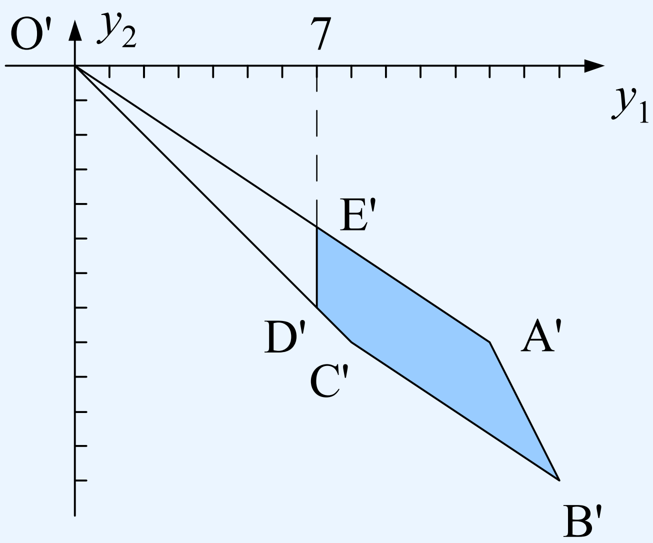
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$4x_1 \le 16$$
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\mathbf{\ge 7} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\mathbf{\ge -12} \end{aligned}}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Интерактивный метод (4)

Пространство решений



Пространство критериев



Интерактивный метод (5)

Решение \ Критерий	f_1	f_2
R_{11}	14	-12
R_{12}	7	$-^{14}/_3$

Значение \ Критерий	f_1	f_2
Пессимистическое	7	-12
Оптимистическое	14	$-^{14}/_3$

Задача P_{21}

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Задача P_{22}

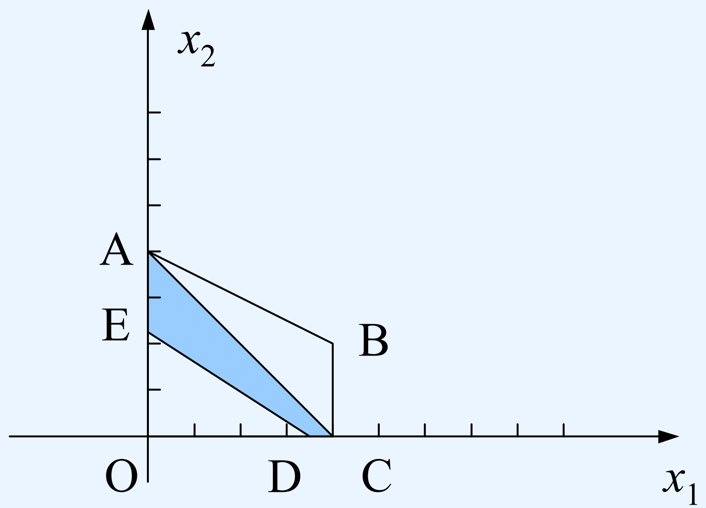
$$-2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

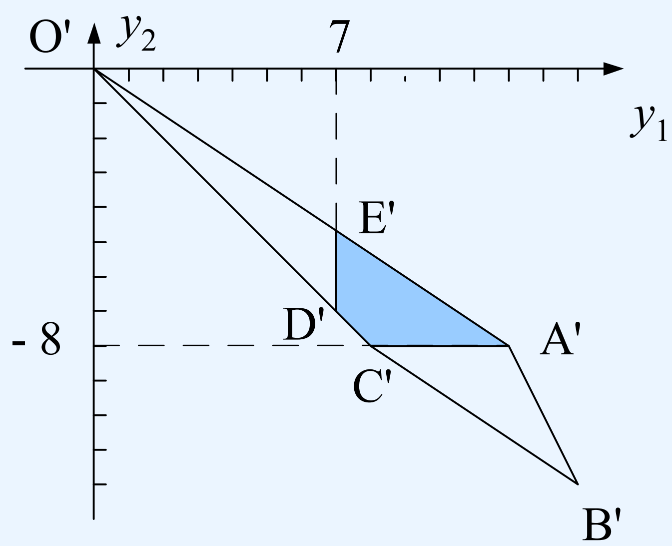
Ограничения

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{7} \\ \mathbf{-2x_1 - 3x_2} &\ge \mathbf{-8} \end{aligned}} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Интерактивный метод (6)

Пространство решений | **Пространство критериев**





Интерактивный метод (7)

Пример 4.10

Критерии:

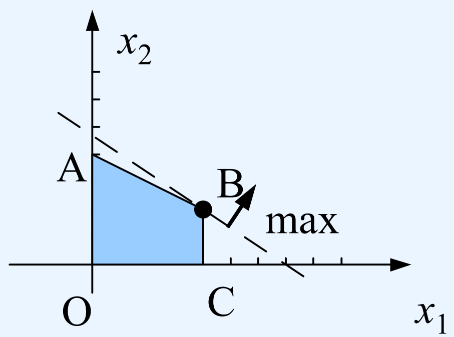
- максимизация дохода,
- минимизация использования ресурса S_1,
- максимизация выпуска изделия P_1.

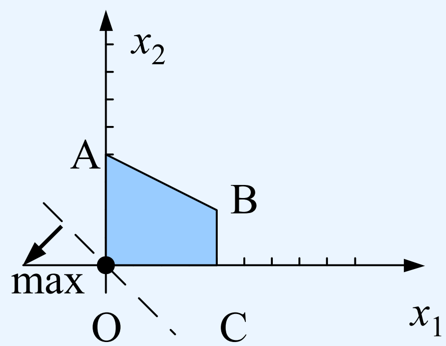
$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
f_2(x_1, x_2) &= -2x_1 - 2x_2 \to \max \\
f_3(x_1, x_2) &= x_2 \to \max
\end{aligned}
$$

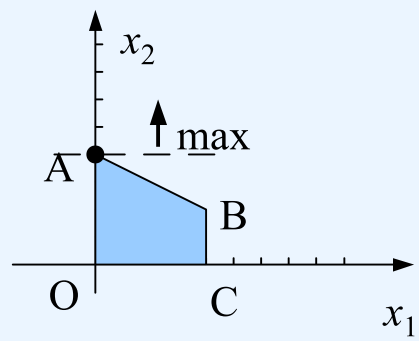
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 &\le 16 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Интерактивный метод (8)

Задача P_{01}	Задача P_{02}	Задача P_{03}
$2x_1 + 3x_2 \to \max$	$-2x_1 - 2x_2 \to \max$	$x_2 \to \max$
$x_1 + 2x_2 \le 8$	$x_1 + 2x_2 \le 8$	$x_1 + 2x_2 \le 8$
$4x_1 \le 16$	$4x_1 \le 16$	$4x_1 \le 16$
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$







Интерактивный метод (9)

Критерий / Решение	f_1	f_2	f_3
R_{01}	14	-12	0
R_{02}	0	0	0
R_{03}	12	-8	4

Критерий / Значение	f_1	f_2	f_3
Пессимистическое	0	-12	0
Оптимистическое	14	0	4

Задача P_{11}

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-12} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача P_{12}

$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$

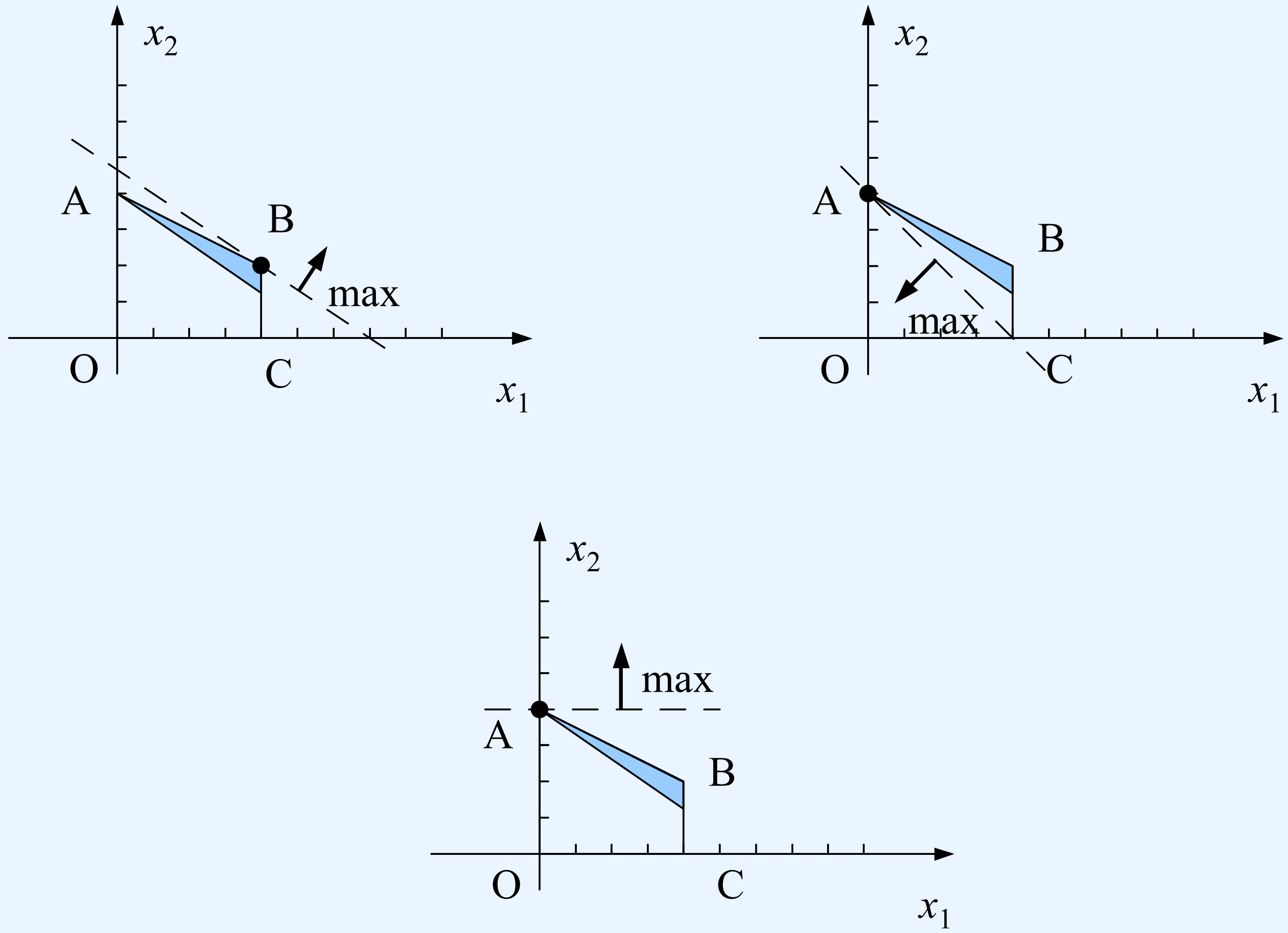
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-12} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача P_{13}

$$x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-12} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Интерактивный метод (10)



Интерактивный метод (11)

Решение \ Критерий	f_1	f_2	f_3
R_{11}	14	-12	2
R_{12}	12	-8	4
R_{13}	12	-8	4

Значение \ Критерий	f_1	f_2	f_3
Пессимистическое	12	-12	2
Оптимистическое	14	0	4

Задача P_{21}

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad\quad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-9} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{2} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача P_{22}

$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$

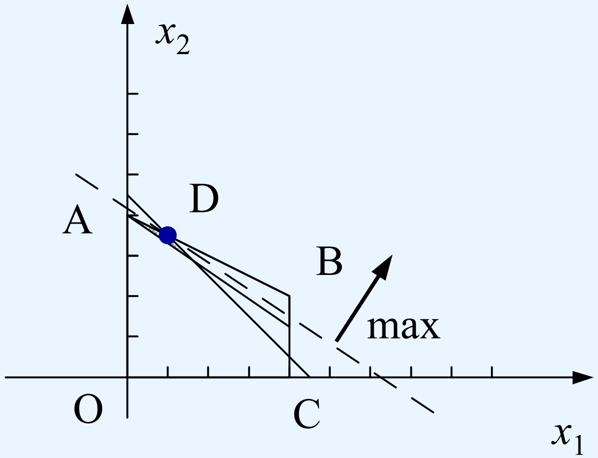
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad\quad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-9} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{2} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

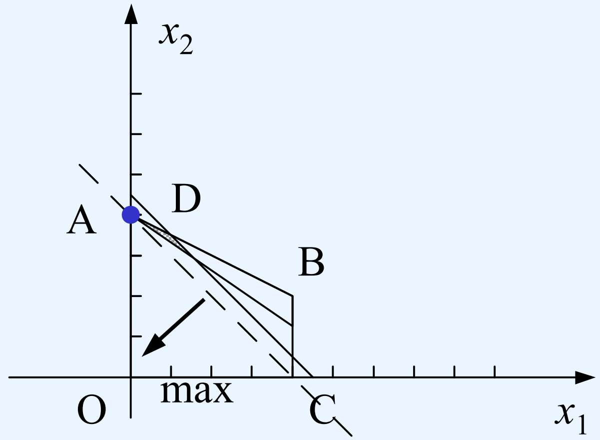
Задача P_{23}

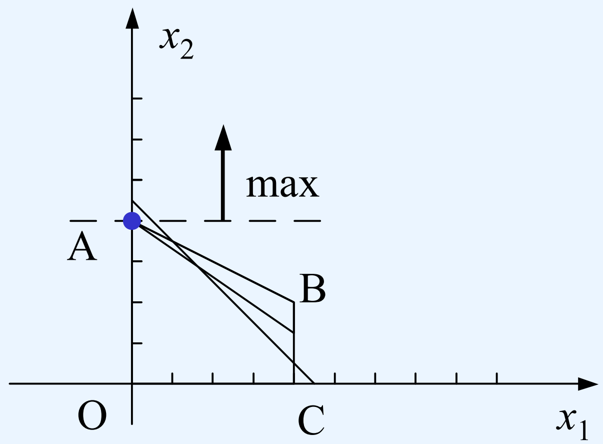
$$x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad\quad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-9} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{2} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Интерактивный метод (12)







Интерактивный метод (13)

Решение \ Критерий	f_1	f_2	f_3
R_{21}	12,5	-9	3,5
R_{22}	12	-8	4
R_{23}	12	-8	4

Значение \ Критерий	f_1	f_2	f_3
Пессимистическое	12	-9	3,5
Оптимистическое	12,5	-8	4

Задача P_{31}

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad &\le 16 \\ \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\mathbf{\ge 12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\mathbf{\ge -9} \\ \mathbf{x_2} &\mathbf{\ge 4} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача P_{32}

$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$

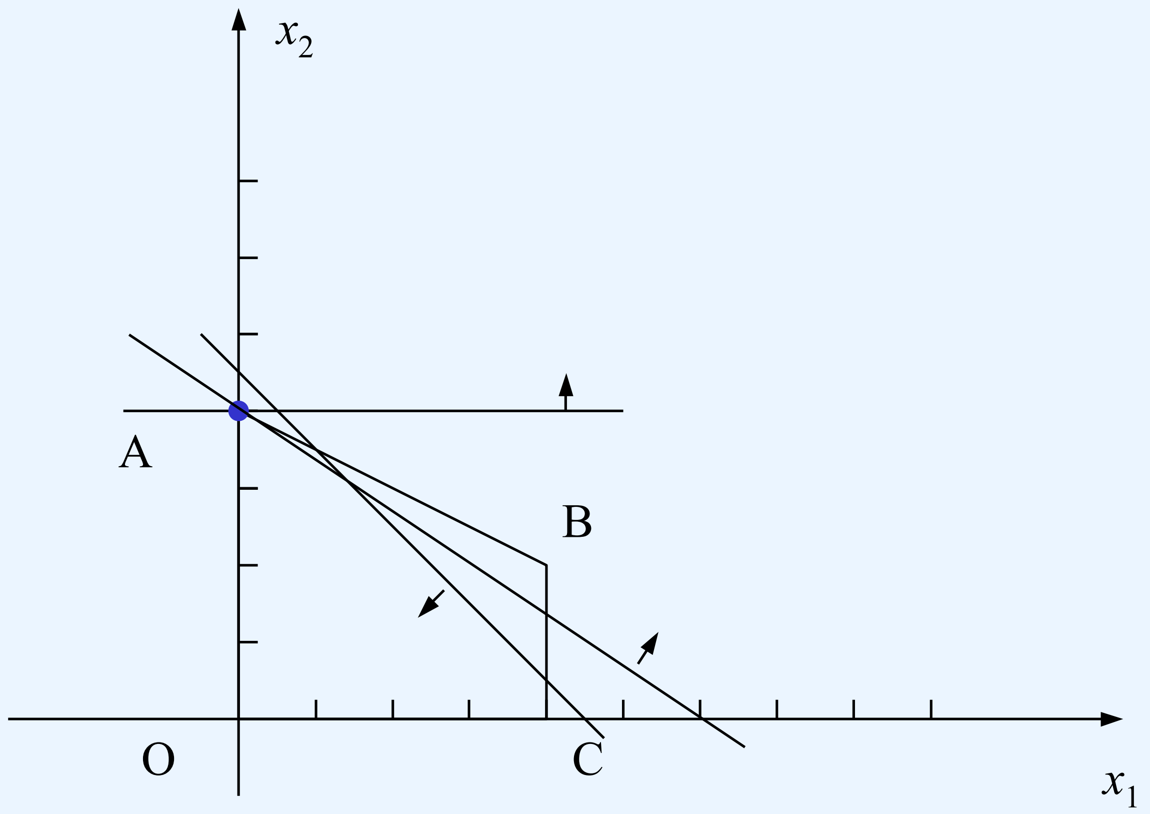
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad &\le 16 \\ \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\mathbf{\ge 12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\mathbf{\ge -9} \\ \mathbf{x_2} &\mathbf{\ge 4} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача P_{33}

$$x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad &\le 16 \\ \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\mathbf{\ge 12} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\mathbf{\ge -9} \\ \mathbf{x_2} &\mathbf{\ge 4} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Интерактивный метод (14)



Интерактивный метод (15)

Пример 4.11

Критерии:

- величина дохода не может быть меньше 9,
- использование ресурса S_1 не должно превысить 6 единиц,
- объем производства изделия P_2 не может быть меньше 2.

Задача P_{11}

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

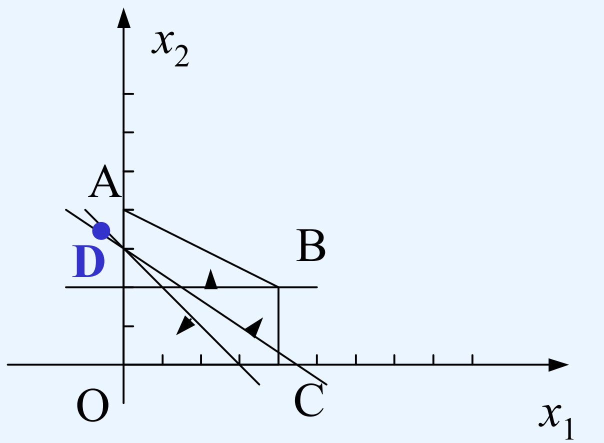
Задача P_{12}

$$-2x_1 - 2x_2 \to \max$$

Задача P_{13}

$$x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad &\le 16 \\ \boxed{\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2} &\ge \mathbf{9} \\ \mathbf{-2x_1 - 2x_2} &\ge \mathbf{-6} \\ \mathbf{x_2} &\ge \mathbf{2} \end{aligned}} \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$



Целевое программирование (1)

Пример 4.12

Цель 1: Доход не менее 12 единиц

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \geq 12$$

Цель 2: Использование трудовых ресурсов в объеме 10 единиц

$$\varphi_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 2\,x_2 = 10$$

Целевое программирование (2)

Балансирование целей

Цель 1:

$$y_1^+ = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 12 & \text{при } f_1(x_1, x_2) \geq 12 \\ 0 & \text{при } f_1(x_1, x_2) < 12 \end{cases}$$

$$y_1^- = \begin{cases} 0 & \text{при } f_1(x_1, x_2) \geq 12 \\ 12 - 2x_1 - 3x_2 & \text{при } f_1(x_1, x_2) < 12 \end{cases}$$

Балансовое уравнение для цели 1

$$2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 12$$

Целевое программирование (3)

Балансирование целей (продолжение)

Цель 2:

$$y_2^+ = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 10 & \text{при } \varphi_2(x_1, x_2) \geq 10 \\ 0 & \text{при } \varphi_2(x_1, x_2) < 10 \end{cases}$$

$$y_2^- = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_2(x_1, x_2) \geq 10 \\ 10 - 2x_1 - 2x_2 & \text{при } \varphi_2(x_1, x_2) < 10 \end{cases}$$

Балансовое уравнение для цели 2

$$2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$$

Целевое программирование (4)

<u>Задача первого уровня иерархии</u>

$$y_1^- \to \min$$

Цель 1: $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 12$

Цель 2: $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

Ограничения

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$4x_1 \le 16$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \ge 0$$

Существует оптимальное решение этой задачи, в котором $y_1^- = 0$

Целевое программирование (5)

Задача второго уровня иерархии

$$\boldsymbol{y_2^+ + y_2^- \to \min}$$

Цель 1: $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 12$

Цель 2: $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

$$y_1^- = 0$$

Ограничения

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \ge 0$$

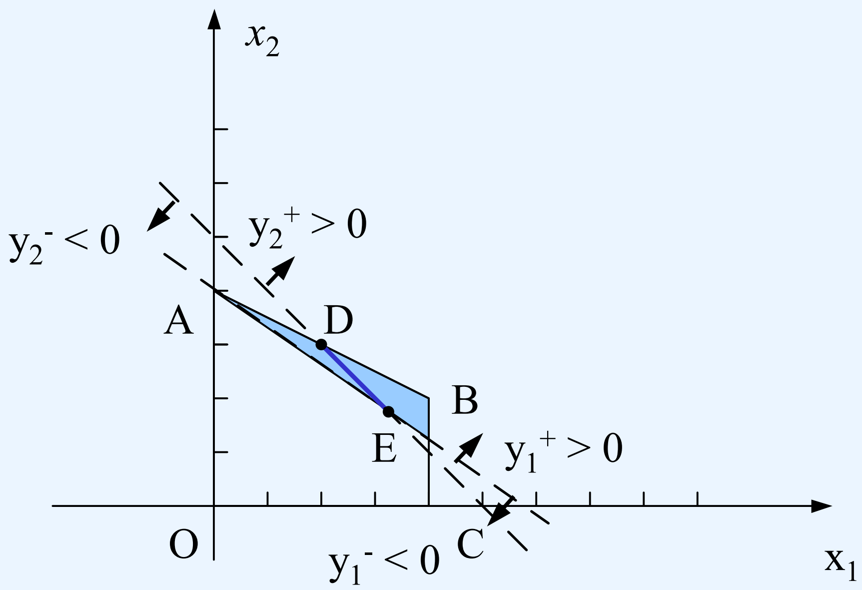
Решение

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ y_1^+ = 1,\ y_1^- = 0,\ y_2^+ = 0,\ y_2^- = 0$$

Графическое решение в пространстве решений (1)

Цель 1: $y_1 = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$

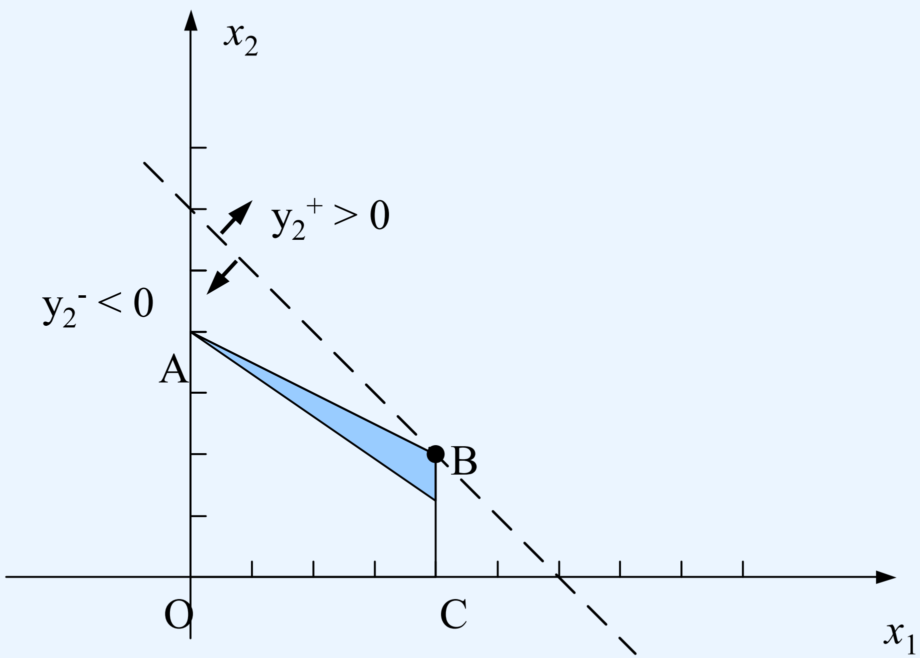
Цель 2: $y_2 = \underline{2x_1 + 2\,x_2 = 10}$



Графическое решение в пространстве решений (2)

Цель 1: $y_1 = 2x_1 + 3\, x_2 \geq 12$

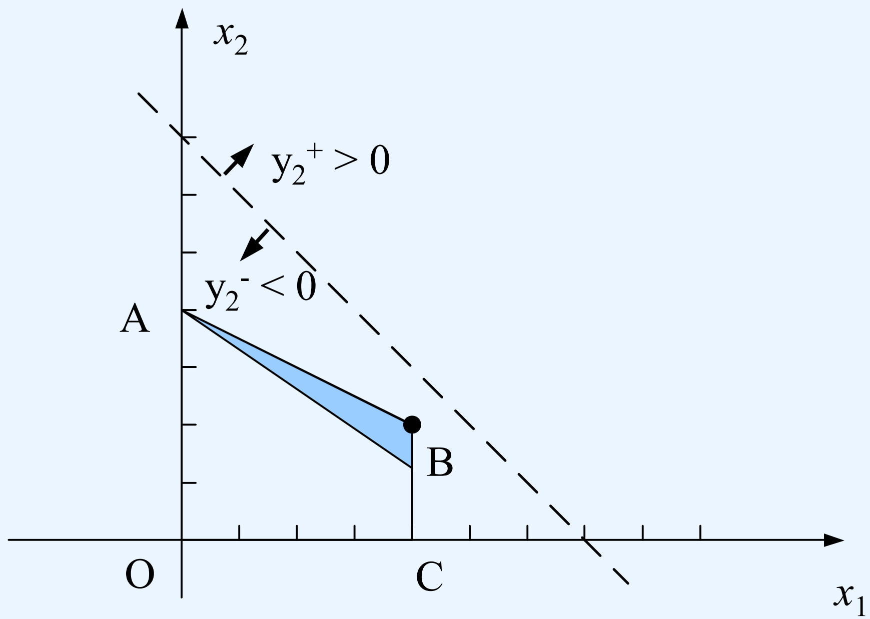
Цель 2: $y_2 = \underline{2x_1 + 2\, x_2 = 12}$



Графическое решение в пространстве решений (3)

Цель 1: $y_1 = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$

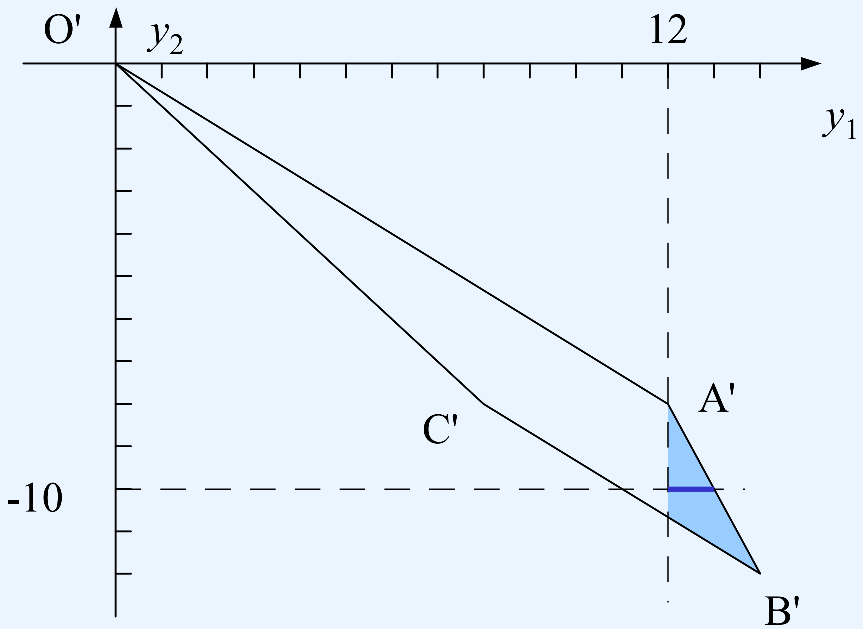
Цель 2: $y_2 = \underline{2x_1 + 2\,x_2 = 14}$



Графическое решение в пространстве критериев (1)

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$$

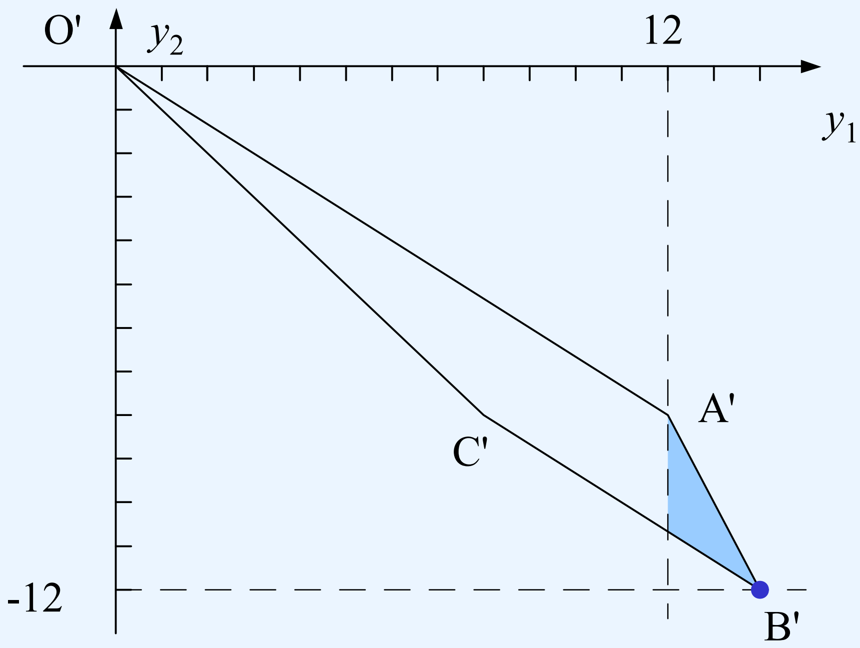
$$y_2 = f_2(x_1, x_2) = -\varphi_2(x_1, x_2) = \underline{-2x_1 - 2\,x_2 = -10}$$



Графическое решение в пространстве критериев (2)

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$$

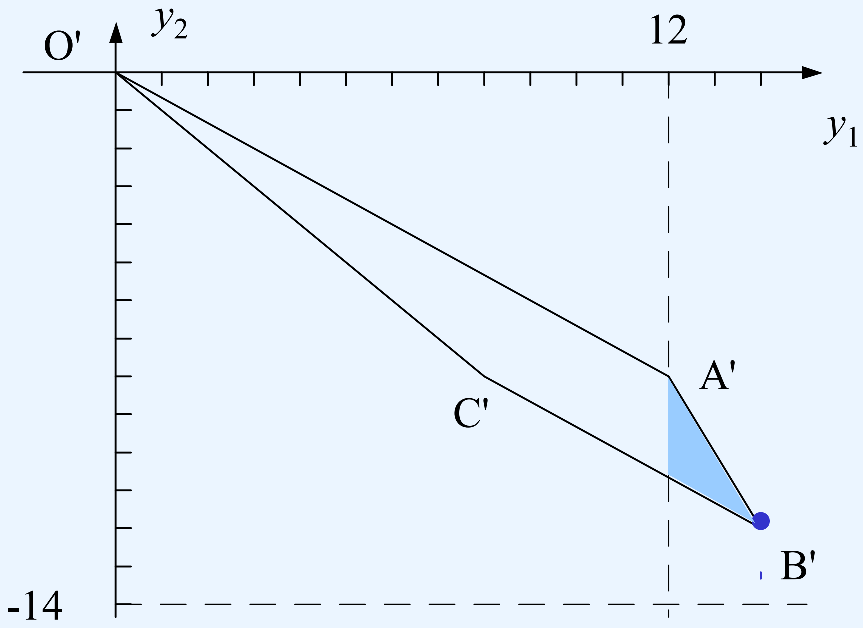
$$y_2 = f_2(x_1, x_2) = -\varphi_2(x_1, x_2) = \underline{-2x_1 - 2\,x_2 = -12}$$



Графическое решение в пространстве критериев (3)

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3\,x_2 \geq 12$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2) = -\varphi_2(x_1, x_2) = \underline{-2x_1 - 2\,x_2 = -14}$$



Весовые коэффициенты

Пример 4.13

Отклонение „in plus” при реализации цели 2 в два раза менее желательно, чем отклонение „in minus”. Для ЛПР реализация обеих целей считается одинаково важной.

Математическая модель

$$y_1^- + 2y_2^+ + y_2^- \to \min$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 12 \\
2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- &= 10 \\
x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
4x_1 &\le 16
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \ge 0$$

Решение

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ y_1^+ = 0,\ y_1^- = 0,\ y_2^+ = 0,\ y_2^- = 0$$

Иерархия целей (1)

Пример 4.14

Цель 1: доход не менее 14 единиц.

Цель 2: занятость на уровне 10 единиц.

Цель 2а: занятость не может превысить 10 единиц.

Цель 2б: занятость не может быть меньше 10 единиц.

Цель 3: объем выпуска P_1 не менее 4 единиц.

I уровень иерархии: цель 1 и цель 2а.
Реализация цели 1 в два раза важнее реализации цели 2а

II уровень иерархии: Важности реализации целей 3 и 2b относятся как 3 : 2

Иерархия целей (2)

Задача 1 (Первый уровень иерархии)

$$2y_1^- + y_2^+ \rightarrow \min$$

Цель 1: $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14$

Цель 2: $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

Цель 3: $x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4$

Ограничения: $x_1 + 2x_2 \le 8$

$4x_1 \le 16$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \ge 0$$

Минимальное значение целевой функции для задачи 1 равно 2

Иерархия целей (3)

Задача 2 (Второй уровень иерархии)

$$2y_2^- + 3y_3^- \to \min$$

Цель 1: $2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 14$

Цель 2: $2x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 10$

Цель 3: $x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4$

$$2y_1^- + y_2^- = 2$$

Ограничения: $x_1 + 2x_2 \le 8$

$$4x_1 \le 16$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \ge 0$$

Решение

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ y_1^+ = 0,\ y_1^- = 1,\ y_2^+ = 0,\ y_2^- = 0\ ,\ y_3^+ = 0,\ y_3^- = 1$$

Иерархия целей (4)

Применение штрафных коэффициентов

Позиции в иерархии	Название цели	Уровень достижения цели	Штрафной коэффициент
1	Доход	≥ 14	2 M
1	Занятость	≤ 10	M
2	Занятость	≥ 10	2
2	Объем выпуска P_2	≥ 4	3

$$2My_1^- + My_2^+ + 2y_2^- \qquad + 3y_3^- \to \min$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 14 \\
2x_1 + 2x_2 \qquad - y_2^+ + y_2^- &= 10 \\
x_2 \qquad - y_3^+ + y_3^- &= 4 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
4x_1 &\leq 16
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Рекламная кампания (1)

Пример 4.15

Еженедельники: A, B, C, D, E.
Тираж и количество читателей каждого издания.
Эффект престижа (диапазон от 1 до 10).

Еженедельник	A	B	C	D	E
Стоимость одного объявления	30	28	23	19	18
Престиж	2	1	4	5	3
Разовый тираж	7.5	7	5.75	4.75	4.5
Среднее количество читателей	0.16	0.15	0.12	0.10	0.10

Охват рекламой не менее 70% потенциальных потребителей.

Цели: I - минимизация затрат (приоритетная цель)

II - максимизация эффекта престижа

Рекламная кампания (2)

Цель(и)

Цель заключается в выборе наилучшей комбинации СМИ. Строим двухкритериальную иерархическую модель рассматриваемой задачи, в которой:

I. Минимизируются издержки на проведение кампании;

II. Максимизируется совокупный престиж.

Решающие переменные

x_A – количество рекламных объявлений, опубликованных в еженедельнике A

x_B – количество рекламных объявлений, опубликованных в еженедельнике B

x_C – количество рекламных объявлений, опубликованных в еженедельнике C

x_D – количество рекламных объявлений, опубликованных в еженедельнике D

x_E – количество рекламных объявлений, опубликованных в еженедельнике E

Рекламная кампания (3)

Критериальные функции

Функция издержек: $30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E \rightarrow \min$

Функция эффекта престижа : $2x_A + x_B + 4x_C + 4x_D + 3x_E \rightarrow \max$

Ограничения:

Совокупный тираж: $7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E \geq 70$

Совокупное кол-во читателей : $0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E \geq 2$

Ограничения na решающие переменные

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$

x_A, x_B, x_C, x_D, x_E – целочисленные

Строгая иерархия критериев (1)

Целевая функция первого уровня иерархии

$$30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E \rightarrow \min$$

Ограничения:

$$7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E \geq 70$$
$$0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E \geq 2$$

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$

x_A, x_B, x_C, x_D, x_E – целочисленные

Оптимальные решения:

1. $x_A = 3 \quad x_B = 4 \quad x_C = 1 \quad x_D = 4 \quad x_E = 4$
2. $x_A = 4 \quad x_B = 4 \quad x_C = 3 \quad x_D = 0 \quad x_E = 4$

Оптимальное значение функции издержек равно 373.

Строгая иерархия критериев (2)

Целевая функция второго уровня иерархии

$$2x_A + \quad x_B + \quad 4x_C + \quad 4x_D + \; 3x_E \rightarrow \max$$

Множество допустимых решений

1. $x_A = 3 \quad x_B = 4 \quad x_C = 1 \quad x_D = 4 \quad x_E = 4$
2. $x_A = 4 \quad x_B = 4 \quad x_C = 3 \quad x_D = 0 \quad x_E = 4$

Оптимальное решение

В первом из полученных решений значение функции престижа равно 42, а во втором равно 36.

Рекомендуется выбрать первое решение.

Квази-иерархия критериев (1)

Первый уровень иерархии

Такой же, как и в предыдущем случае.

Второй уровень иерархии

ЛПР решает увеличить расходы на рекламу на 10%

Квази-иерархия критериев (2)

Целевая функция второго уровня иерархии

$$f(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = 30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E \rightarrow \min$$

Ограничения

$$\begin{aligned}
7.5x_A + 7x_B + 5.75x_C + 4.75x_D + 4.5x_E &\geq 70 \\
0.16x_A + 0.15x_B + 0.12x_C + 0.1x_D + 0.1x_E &\geq 2 \\
30x_A + 28x_B + 23x_C + 19x_D + 18x_E &\leq 410
\end{aligned}$$

$$0 \leq x_A \leq 4, \quad 0 \leq x_B \leq 4, \quad 0 \leq x_C \leq 4, \quad 0 \leq x_D \leq 4, \quad 0 \leq x_E \leq 4$$

x_A, x_B, x_C, x_D, x_E – целочисленные

Оптимальное решение

Эффект престижа теперь равен 53 (рост на 26,2%)
Издержки возросли до 388 (рост на 4%)

Долгосрочная стратегия фирмы (1)

Пример 4.16

Цель 1: получение долгосрочного дохода в объеме не менее 100 млн. зл.;

Цель 2: поддержание занятости на уровне 3 000 чел.,

Цель 3: инвестиционные вложения не должны превысить 40 млн. зл.

Цель	Приведенный доход			Ожидаемый уровень достижения цели	Штрафные коэффициенты
	P_1	P_2	P_3		
Долгосрочный доход	10	8	13	≥ 100 (млн. зл.)	6(-)
Уровень занятости	4	2	3	= 3000 чел.	2(+), 5(-)
Инвестиционные вложения	5	7	8	≤ 40 (млн. зл.)	4(+)

Необходимо определить такой объем производства, который с учетом заданных штрафных коэффициентов обеспечит достижение выдвинутых целей.

Долгосрочная стратегия фирмы (2)

Решающие переменные

x_1 – планируемый объем выпуска изделия P_1

x_2 – планируемый объем выпуска изделия P_2

x_3 – планируемый объем выпуска изделия P_3

Балансовые переменные

y_1^+ = величина, на которую полученный доход превышает 100 млн. зл.

y_1^- = величина, на которую полученный доход меньше 100 млн. зл.

y_2^+ = величина, на которую занятость превышает 3000 чел.,

y_2^- = величина, на которую занятость меньше 3000 чел.,

y_3^+ = величина, на которую инвестиции превышают 40 млн. зл.,

y_3^- = величина, на которую инвестиции меньше 40 млн. зл.,

Долгосрочная стратегия фирмы (3)

Целевая функция замещающей задачи:

Минимизация взвешенной суммы нежелательных отклонений от заданных уровней достижения целей.

$$6y_1^- + 2y_2^+ + 5y_2^- + 4y_3^+ \rightarrow \min$$

Ограничения:

Балансовое уравнение для первой цели:

$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- = 100$$

Балансовое уравнение для второй цели:

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_2^+ + y_2^- = 30$$

Балансовое уравнение для третьей цели:

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - y_3^+ + y_3^- = 40$$

Долгосрочная стратегия фирмы (4)

Оптимальное решение

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$

$$y_1^+ = 0 \quad y_1^- = 0$$

$$y_2^+ = 10 \quad y_1^- = 0$$

$$y_3^+ = 10 \quad y_1^- = 0$$

Минимальное значение функции, характеризующей отклонения от ожидаемых уровней достижения целей, равно 60.

Интерпретация решения

Одновременно реализовать все три цели невозможно. Первая цель (уровень дохода) будет реализована полностью, однако уровень занятости превысит планируемое значение на 1000 работников, а инвестиционные вложения превысят планируемое значение на 10 млн. злотых. Это решение признано неудовлетворительным, поэтому ЛПР согласился ввести иерархию целей.

Иерархия целей (1)

Первый уровень иерархии:

Цель 2а: непревышение фактического уровня занятости (3000 работников)

Цель 3: удержание инвестиционных вложений на уровне, не превышающем 30 млн. зл .

Второй уровень иерархии:

Цель 1: получение в долгосрочной перспективе дохода, равного 100 млн. зл.,

Цель 2б: удержание достигнутого на настоящий момент уровня занятости.

Иерархия целей (2)

Задача первого уровня иерархии

$$2y_2^+ + 4y_3^+ \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{lllll}
\textbf{Цель 1:} & 10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- & & & = 100 \\
\textbf{Цель 2:} & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & - y_2^+ + y_2^- & & = 30 \\
\textbf{Цель 3:} & 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 & & - y_3^+ + y_3^- & = 40
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Задача второго уровня иерархии

$$6y_1^- + 5y_2^- \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{llll}
10x_1 + 8x_2 + 13x_3 - y_1^+ + y_1^- & & & = 100 \\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & - y_2^+ + y_2^- & & = 30 \\
5x_1 + 7x_2 + 8x_3 & & - y_3^+ + y_3^- & = 40 \\
 & 2y_2^+ + 4y_2^- & & = 30
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Иерархия целей (3)

Оптимальное решение

$$x_1 = 7.06 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0.59$$

$$y_1^+ = 0 \qquad y_1^- = 21,76$$

$$y_2^+ = 0 \qquad y_1^- = 0$$

$$y_3^+ = 0 \qquad y_1^- = 0$$

Резюме (1)

Ключевые слова

- Многокритериальная задача
- Многокритериальная задача линейного программирования
- Пространство решений
- Множество допустимых решений в пространстве решений
- Пространство критериев
- Множество допустимых решений в пространстве критериев
- Задача векторной максимизации
- Доминирующее решение
- Недоминируемое решение
- Корректное решение

Резюме (2)

Ключевые слова (продолжение)

- **Окончательное решение**
- **Метод удовлетворительного уровня значений критериев**
- **Штрафные коэффициенты**
- **Иерархия критериев**
- **Идеальная точка**
- **Интерактивные методы**
- **Целевое программирование**
- **Балансирование целей**
- **Направленные цели**
- **Точечные цели**
- **Интервальные цели**

Можно отдыхать!