Podejmowanie decyzji w warunkach niepełnej informacji

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

Niepełna informacja
Stany natury
Macierz wypłat
Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka
Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności
Reguła maksymalizacji oczekiwanej korzyści
Decydent z awersją do ryzyka
Decydent ze skłonnością do ryzyka
Użyteczność
Funkcja użyteczności
Reguła maksymalizacji oczekiwanej użyteczności
Decyzje jednoetapowe
Decyzje wieloetapowe
Drzewo decyzyjne

Słowa kluczowe (c.d.)

Reguły decyzyjne w warunkach niepewności
Regułą max-min, min-max, max-max
Współczynnik ostrożności
Reguła minimalnego żalu
Teoria gier
Gra dwuosobowa o sumie zero
Strategia
Strategia optymalna
Strategia zdominowana
Strategia dominująca
Punkt siodłowy
Strategia mieszana

5.2.1. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje jednoetapowe (1/4)

Przykład 5.1

Cena hurtowa:	80 gr/szt,
Cena sprzedaży:	1,10 zł/szt,
Liczba gazet w paczce:	40 szt,
Dzień „słaby”:	popyt 50 szt, częstotliwość 26%
Dzień „przeciętny”:	popyt 100 szt, częstotliwość 40%
Dzień „dobry”:	popyt 150 szt, częstotliwość 34%

Decyzja	Zysk gazeciarza przy popycie wynoszącym:		
	n=50	n=100	n=150
x=1	12	12	12
x=2	-9	24	24
x=3	-41	14	36
x=4	-73	-18	37

5.2.1. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje jednoetapowe (2/4)

Reguła maksymalizacji oczekiwanej korzyści

Posługując się rozkładem prawdopodobieństwa zaistnienia kolejnych stanów natury obliczamy oczekiwane korzyści dla poszczególnych decyzji. Decyzją rekomendowaną jest ta, dla której oczekiwana korzyść jest maksymalna.

$$\mathrm{EK}(x=1) = 12 \cdot 0{,}26 + 12 \cdot 0{,}4 + 12 \cdot 0{,}34 = 12$$

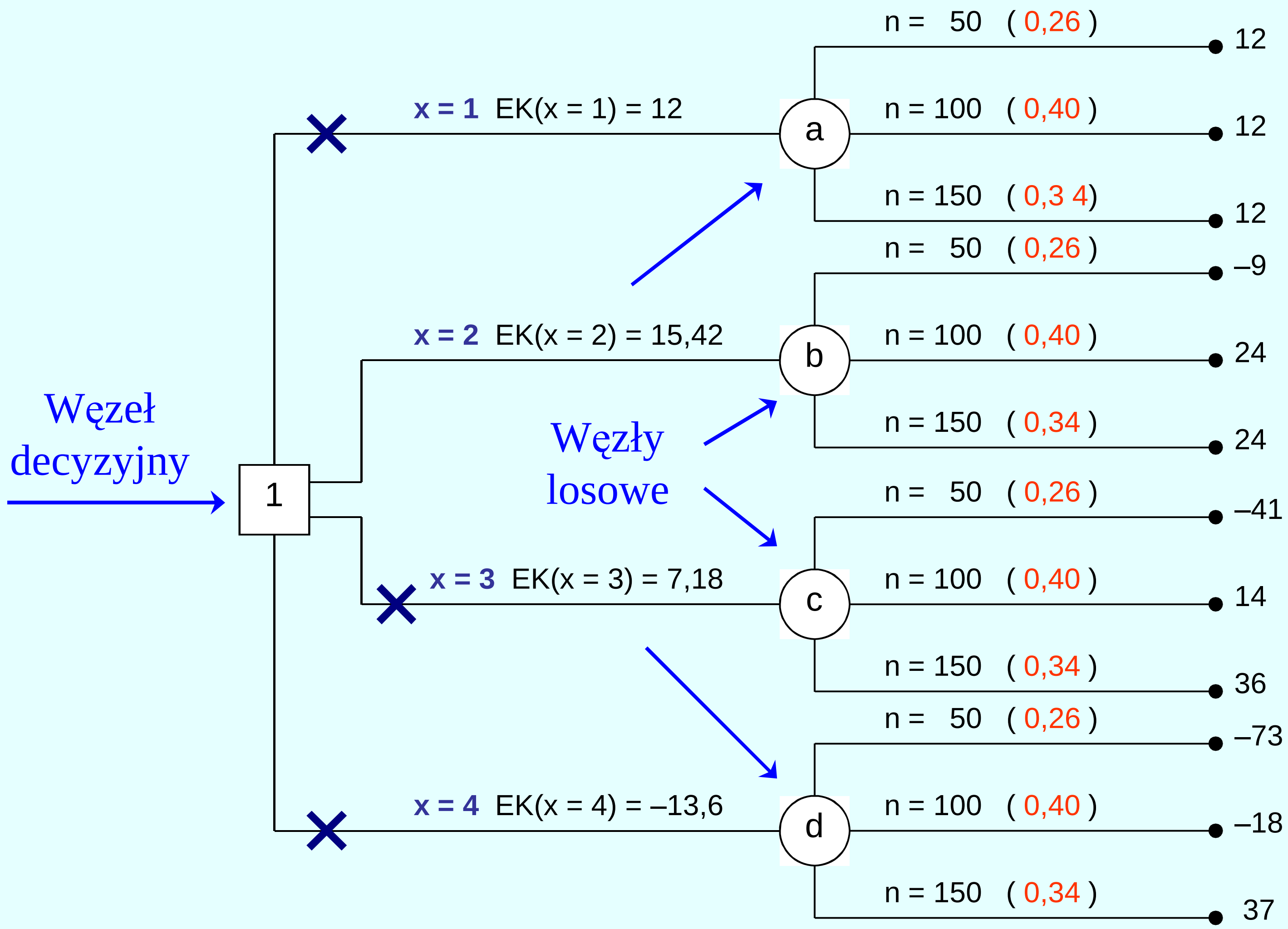
$$\mathrm{EK}(x=2) = (-9) \cdot 0{,}26 + 24 \cdot 0{,}4 + 24 \cdot 0{,}34 = 15{,}42$$

$$\mathrm{EK}(x=3) = (-41) \cdot 0{,}26 + 14 \cdot 0{,}4 + 36 \cdot 0{,}34 = 7{,}18$$

$$\mathrm{EK}(x=4) = (-73) \cdot 0{,}26 + (-18) \cdot 0{,}4 + 37 \cdot 0{,}34 = -13{,}6$$

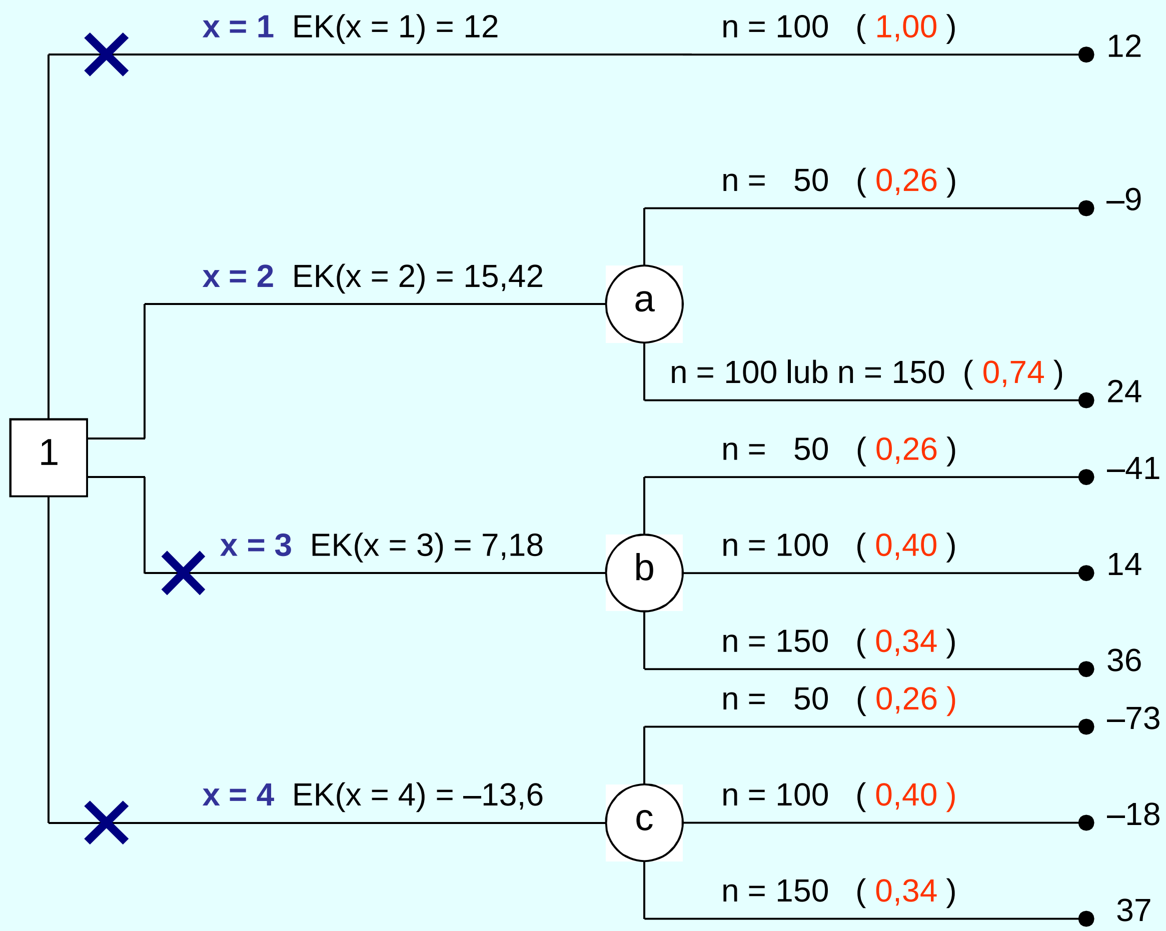
5.2.1. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje jednoetapowe (3/4)

Jednoetapowe drzewo decyzyjne



5.2.1. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje jednoetapowe (4/4)

Jednoetapowe drzewo decyzyjne (c.d.)



5.2.2. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje wieloetapowe (1/4)

Przykład 5.2

Kapitał gazeciarza na początku pierwszego dnia = 75

Decyzje dopuszczalne

Dzień pierwszy	Dzień drugi		
$x_1(75) = 1$	$x_2(87) = 1$	$x_2(66) = 1$	$x_2(99) = 1$
$x_1(75) = 2$	$x_2(87) = 2$	$x_2(66) = 2$	$x_2(99) = 2$
			$x_2(99) = 3$

Strategia - funkcja przyporządkowująca każdemu węzłowi decyzyjnemu pewną decyzję

Strategia optymalna - przyporządkowuje każdemu stanowi decyzję optymalną z punktu widzenia przyjętej reguły decyzyjnej

5.2.2. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje wieloetapowe (2/4)

Zadanie dwuetapowe

Etap 2

$EK(x_2(87)=1) = 99$

$EK(x_2(87)=2) = 78 \cdot 0,26 + 111 \cdot 0,74 = 102,42$

$EK(x_2(66)=1) = 78$

$EK(x_2(66)=2) = 57 \cdot 0,26 + 90 \cdot 0,74 = 81,42$

$EK(x_2(99)=1) = 111$

$EK(x_2(99)=2) = 90 \cdot 0,26 + 123 \cdot 0,74 = 114,42$

$EK(x_2(99)=3) = 58 \cdot 0,26 + 113 \cdot 0,4 + 135 \cdot 0,34 = 106,18$

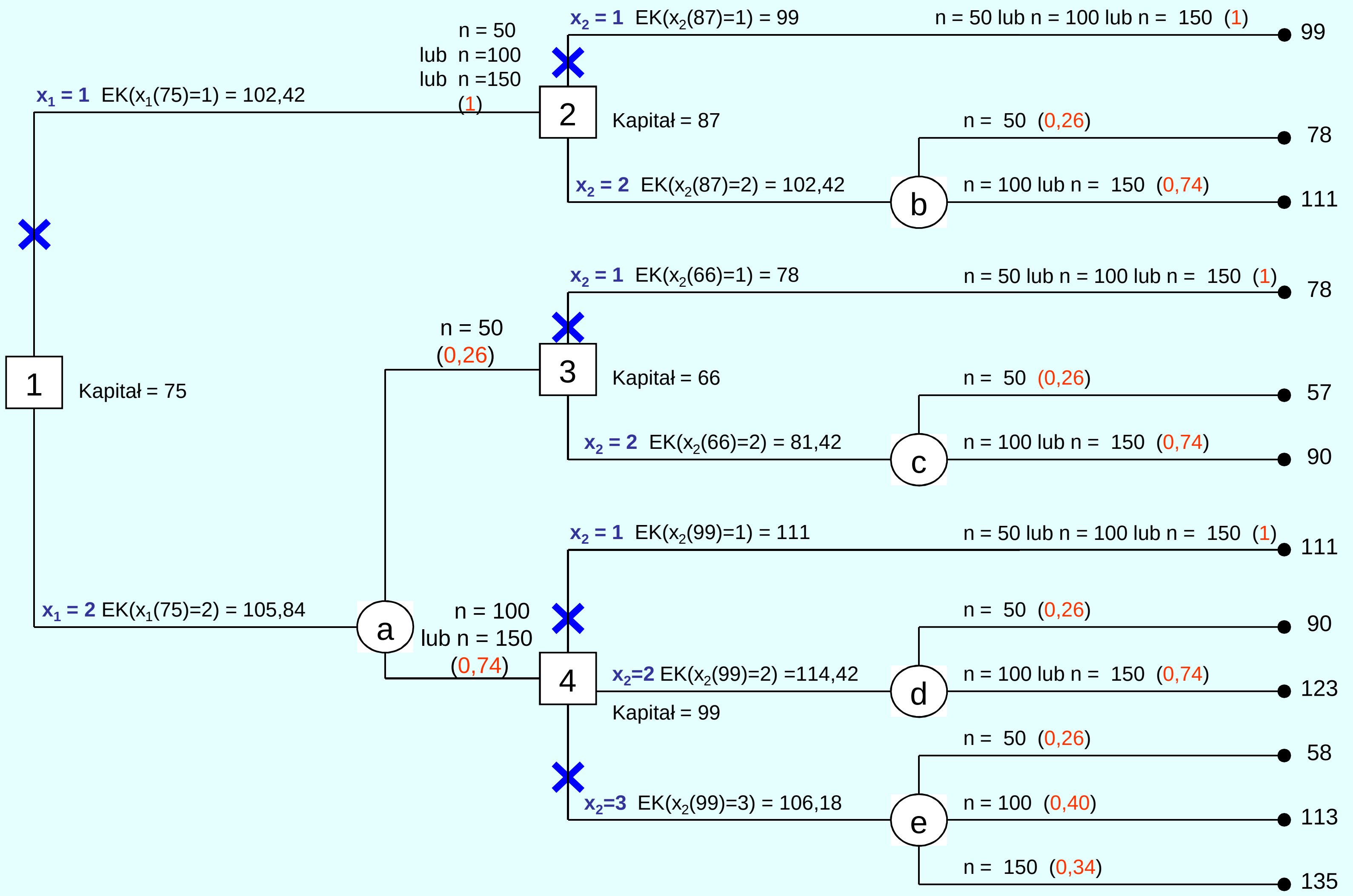
Etap 1

$EK(x_1(75)=1) = 102,42$

$EK(x_1(75)=2) = 81,42 \cdot 0,26 + 114,42 \cdot 0,74 = 105,84$

5.2.2. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje wieloetapowe (3/4)

Dwuetapowe drzewo decyzyjne



5.2.2. Maksymalizacja oczekiwanej korzyści – decyzje wieloetapowe (4/4)

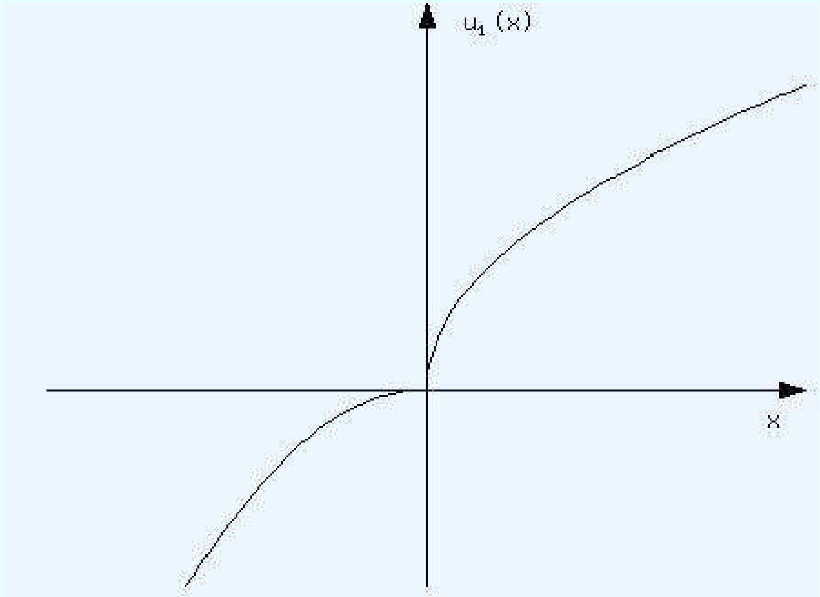
Strategia optymalna

Etap	Węzeł decyzyjny	Decyzja optymalna
1	1	$x_1 = 2$
2	2	$x_2 = 2$
2	3	$x_2 = 2$
2	4	$x_2 = 2$

5.2.3. Maksymalizacja oczekiwanej użyteczności (1/4)

Funkcja użyteczności przy awersji do ryzyka

$$u_1(x) = \begin{cases} 10\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2}{10}, & x < 0 \end{cases}$$



Decyzja	Wartości funkcji użyteczności u_1 przy popycie wynoszącym:		
	n = 50	n = 100	n = 150
x = 1	34,64	34,64	34,64
x = 2	–8,1	48,99	48,99
x = 3	–168,1	37,42	60
x = 4	–532,9	–32,4	60,83

5.2.3. Maksymalizacja oczekiwanej użyteczności (2/4)

Zastosowanie reguły maksymalizacji oczekiwanej użyteczności

Posługując się rozkładem prawdopodobieństwa zaistnienia kolejnych stanów natury obliczamy oczekiwane użyteczności dla poszczególnych decyzji. Decyzją rekomendowaną jest ta, dla której oczekiwana użyteczność jest maksymalna.

$Eu_1(x=1) = 34{,}64 \cdot 0{,}26 + 34{,}64 \cdot 0{,}4 + 34{,}64 \cdot 0{,}34 = 34{,}64$

$Eu_1\ (x=2) = (-8{,}1) \cdot 0{,}26 + 48{,}99 \cdot 0{,}4 + 48{,}99 \cdot 0{,}34 = 34{,}15$

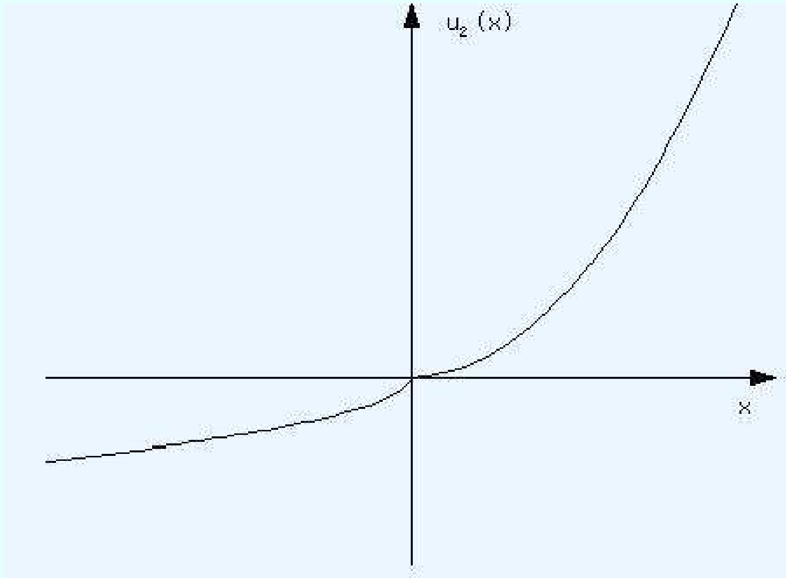
$Eu_1\ (x=3) = (-168{,}1) \cdot 0{,}26 + 37{,}42 \cdot 0{,}4 + 60 \cdot 0{,}34 = -8{,}34$

$Eu_1\ (x=4) = (-532{,}9) \cdot 0{,}26 + (-32{,}4) \cdot 0{,}4 + 60{,}83 \cdot 0{,}34 = -130{,}83$

5.2.3. Maksymalizacja oczekiwanej użyteczności (3/4)

Funkcja użyteczności przy skłonności do ryzyka

$$u_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{10}, & x \geq 0 \\ -10\sqrt{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$



Decyzja	Wartości funkcji użyteczności u_2 przy popycie wynoszącym:		
	n = 50	n = 100	n = 150
x = 1	14,4	14,4	14,4
x = 2	–30	57,6	57,6
x = 3	–64,03	19,6	129,6
x = 4	–85,44	–42,43	136,9

5.2.3. Maksymalizacja oczekiwanej użyteczności (4/4)

Zastosowanie reguły maksymalizacji oczekiwanej użyteczności

Posługując się rozkładem prawdopodobieństwa zaistnienia kolejnych stanów natury obliczamy oczekiwane użyteczności dla poszczególnych decyzji. Decyzją rekomendowaną jest ta, dla której oczekiwana użyteczność jest maksymalna.

$\mathrm{E}u_2(x=1) = 14{,}4 \cdot 0{,}26 + 14{,}4 \cdot 0{,}4 + 14{,}4 \cdot 0{,}34 = 14{,}4$

$\mathrm{E}u_2(x=2) = (-\,30) \cdot 0{,}26 + 57{,}6 \cdot 0{,}4 + 57{,}6 \cdot 0{,}34 = 34{,}82$

$\mathrm{E}u_2(x=3) = (-64{,}03) \cdot 0{,}26 + 19{,}6 \cdot 0{,}4 + 129{,}6 \cdot 0{,}34 = 35{,}26$

$\mathrm{E}u_2(x=4) = (-85{,}44) \cdot 0{,}26 + (-42{,}43) \cdot 0{,}4 + 136{,}9 \cdot 0{,}34 = 7{,}36$

5.3.1. Reguły min-max, max-min i max-max (1/4)

Przykład 5.3

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe		
	Susze	Normalne	Deszcze
1	8	10	12
2	10	11	7
3	9	13	8
4	11	10	6
5	10	10	9

Jaką decyzję powinien podjąć rolnik nie znając prawdopodobieństw wystąpienia możliwych stanów natury?

5.3.1. Reguły min-max, max-min i max-max (2/4)

Reguła max-min

Wykorzystując kolejne wiersze macierzy wypłat znajdujemy dla każdej decyzji minimalną korzyść, którą możemy uzyskać biorąc pod uwagę możliwość realizacji kolejnych stanów natury. Wybieramy tę decyzję, dla której minimalna korzyść jest największa.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			min
	Susze	Normalne	Deszcze	
1	8	10	12	**8**
2	10	11	7	**7**
3	9	13	8	**8**
4	11	10	6	**6**
5	10	10	9	**9**

max

5.3.1. Reguły min-max, max-min i max-max (3/4)

Reguła min-max

Wykorzystując kolejne wiersze macierzy wypłat znajdujemy dla każdej decyzji maksymalną stratę, którą możemy ponieść biorąc pod uwagę możliwość realizacji kolejnych stanów natury. Wybieramy tę decyzję, dla której maksymalna strata jest najmniejsza

5.3.1. Reguły min-max, max-min i max-max (4/4)

Reguła max-max

Wykorzystując kolejne wiersze macierzy wypłat znajdujemy dla każdej decyzji maksymalną korzyść, którą możemy uzyskać biorąc pod uwagę możliwość realizacji kolejnych stanów natury. Wybieramy tę decyzję, dla której maksymalna korzyść jest największa.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			max
	Susze	Normalne	Deszcze	
1	8	10	12	**12**
2	10	11	7	**11**
3	9	13	8	**13**
4	11	10	6	**11**
5	10	10	9	**10**

max

5.3.2. Współczynnik ostrożności (1/5)

Współczynnik ostrożności

a_i - minimalna wypłata dla decyzji i,

A_i - maksymalna wypłata dla decyzji i,

$$H_i(\gamma) = a_i \cdot \gamma + A_i \cdot (1 - \gamma)$$

$\gamma \in [0, 1]$ - współczynnik ostrożności

Wartość 1 charakteryzuje skrajną awersję do ryzyka, wartość 0 skrajną skłonność do ryzyka.

5.3.2. Współczynnik ostrożności (2/5)

Reguła Hurwicza

Wykorzystując kolejne wiersze macierzy wypłat znajdujemy dla każdej decyzji o numerze i wartości: a_i, A_i oraz $H_i(\gamma)$. Wybieramy tę decyzję, dla której wartość $H_i(\gamma)$ jest największa.

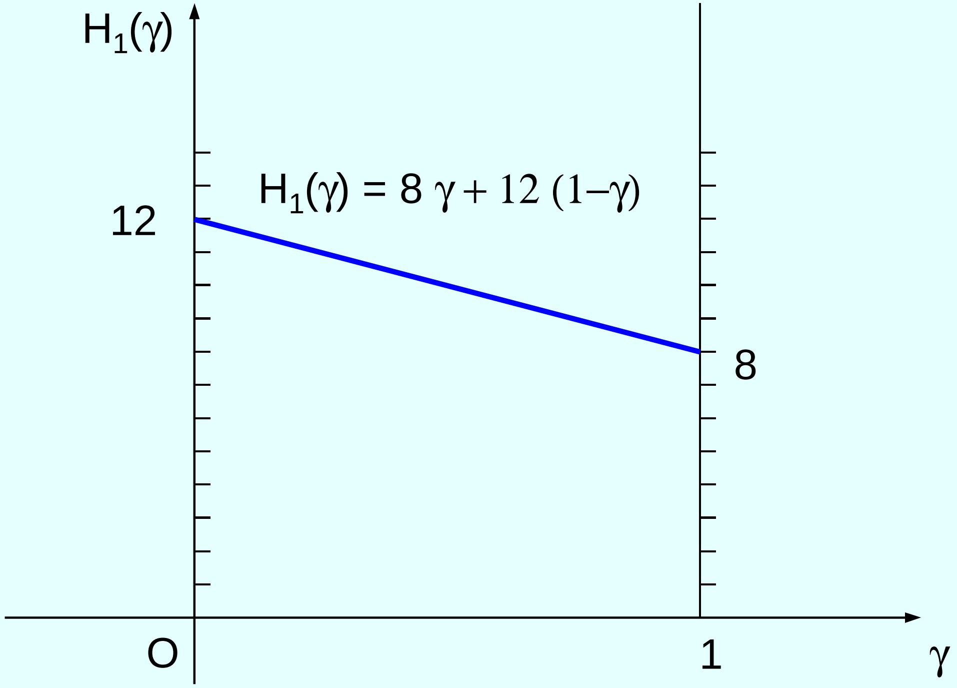
Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			min	max	$H_i(\gamma\text{-}=0,5)$
	Susze	Normalne	Deszcze			
1	8	10	12	**8**	**12**	**10**
2	10	11	7	**7**	**11**	**9**
3	9	13	8	**8**	**13**	**10,5**
4	11	10	6	**6**	**11**	**8,5**
5	10	10	9	**9**	**10**	**9,5**

max

5.3.2. Współczynnik ostrożności (3/5)

Funkcja H_1

$$H_1(\gamma) = 8 \cdot \gamma + 12 \cdot (1 - \gamma)$$



5.3.2. Współczynnik ostrożności (4/5)

Funkcja $H_1 - H_5$

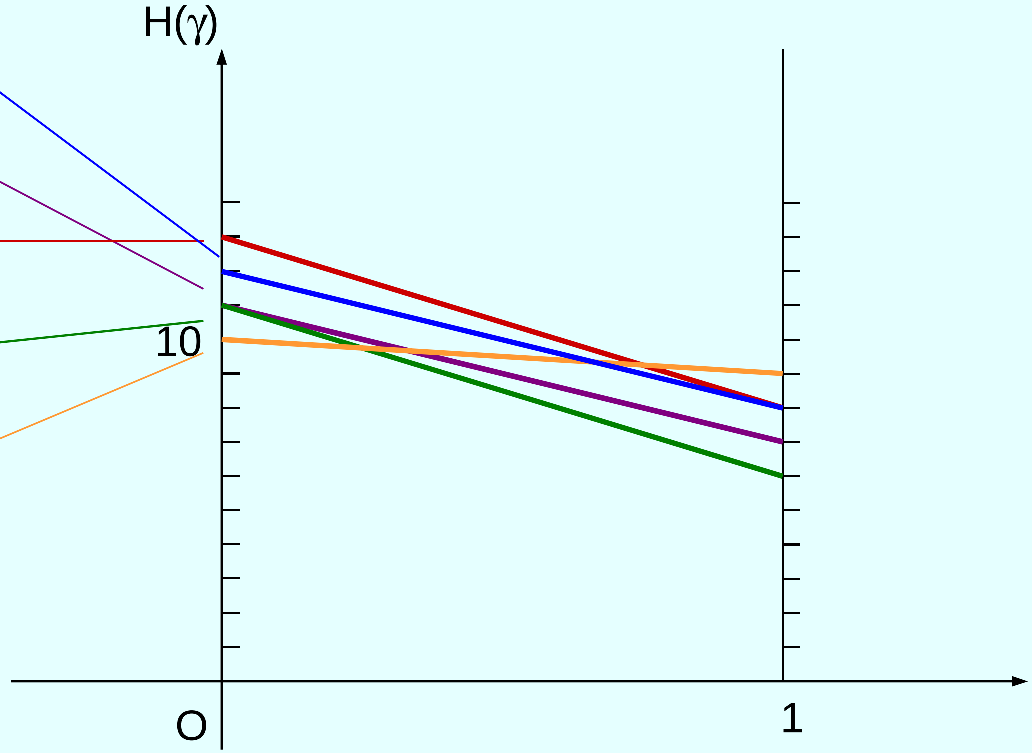
$H_1(\gamma) = 8 \cdot \gamma + 12 \cdot (1 - \gamma)$

$H_2(\gamma) = 7 \cdot \gamma + 11 \cdot (1 - \gamma)$

$H_3(\gamma) = 8 \cdot \gamma + 13 \cdot (1 - \gamma)$

$H_4(\gamma) = 6 \cdot \gamma + 11 \cdot (1 - \gamma)$

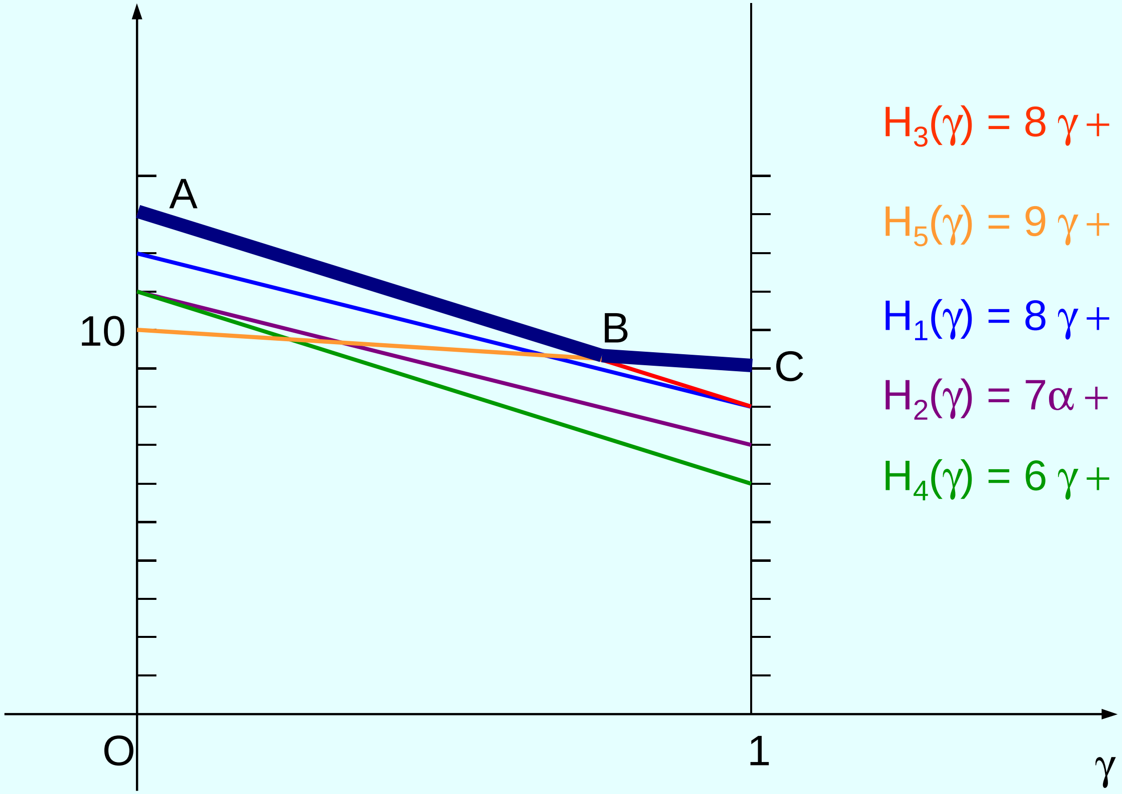
$H_5(\gamma) = 9 \cdot \gamma + 10 \cdot (1 - \gamma)$



5.3.2. Współczynnik ostrożności (5/5)

Rozwiązanie w zależności od wartości współczynnika ostrożności

$$H(\gamma) = \max \{ H_1(\gamma), H_2(\gamma), H_3(\gamma), H_4(\gamma), H_5(\gamma) \}$$



$H_3(\gamma) = 8\gamma + 13(1-\gamma)$

$H_5(\gamma) = 9\gamma + 10(1-\gamma)$

$H_1(\gamma) = 8\gamma + 11(1-\gamma)$

$H_2(\gamma) = 7\alpha + 11(1-\gamma)$

$H_4(\gamma) = 6\gamma + 11(1-\gamma)$

5.3.3. Reguła braku dostatecznej racji (1/1)

Reguła Laplace'a

Wykorzystując kolejne wiersze macierzy wypłat znajdujemy dla każdej decyzji oczekiwaną korzyść, przyjmując, że realizacje kolejnych stanów natury są równie prawdopodobne. Wybieramy tę decyzję, dla której oczekiwana korzyść jest największa.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			Oczekiwana korzyść	
	Susze	Normalne	Deszcze		
1	8	10	12	30/3	max
2	10	11	7	28/3	
3	9	13	8	30/3	max
4	11	10	6	27/3	
5	10	10	9	29/3	

5.3.4. Reguła minimalnego żalu (1/2)

Macierz żalu

Pozwala na określenie utraconych korzyści, związanych z podjęciem decyzji, która okazała się nietrafna w kontekście zrealizowanego stanu natury.

w^*_j - maksymalna wartość w j-tej kolumnie macierzy wypłat,

w_{ij} - korzyści dla decyzji $x=i$ oraz j-tego stanu natury,

z_{ij} - element macierzy żalu: $z_{ij} = w^*_j - w_{ij}$

$$W = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 10 & 11 & 7 \\ 9 & 13 & 8 \\ 11 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & 9 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

w^*_j $\quad \underline{\mathbf{11}} \quad \underline{\mathbf{13}} \quad \underline{\mathbf{12}}$

5.3.4. Reguła minimalnego żalu (2/2)

Reguła Savage'a

Wykorzystując kolejne wiersze macierzy wypłat znajdujemy dla każdego stanu natury wartości maksymalnych korzyści w^*_j i tworzymy macierz żalu Z. Dla kolejnych decyzji znajdujemy maksymalne wartości macierzy Z. Wybieramy decyzję, która minimalizuje największą możliwą stratę.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			Maksymalny żal
	Susze	Normalne	Deszcze	
1	3	3	0	**3**
2	1	2	5	**5**
3	2	0	4	**4**
4	0	3	6	**6**
5	1	3	3	**3**

min

min

5.3.5. Porównanie wyników uzyskanych przy zastosowaniu różnych reguł decyzyjnych (1/1)

Zestawienie reguł

Reguła decyzyjna	**Rekomendowana decyzja**
Max-min	5
Max-max	3
Hurwicza	3
Laplace'a	1, 3
Savage'a	1, 5

5.4.1. Strategie dominujące i zdominowane (1/2)

Przykład 5.4

S_1 – spędzić po jednym dniu w mieście A i mieście B
S_2 – spędzić obydwa dni w A
S_3 – spędzić obydwa dni w B.

Macierze wypłat

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5.4.1. Strategie dominujące i zdominowane (2/2)

Eliminacja strategii zdominowanych

Dominacja strategii

Strategia dominująca

Strategia zdominowana

Strategia niezdominowana

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{4} \\ 1 & 0 & \cancel{5} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

5.4.2. Punkt siodłowy (1/2)

Definicja

w_{I}^* - wypłata gracza I otrzymana przy wykorzystaniu strategii $S_{\mathrm{I}}^{(i^*)}$ wybranej przy pomocy reguły max-min.

w_{II}^* - wypłata gracza II otrzymana przy wykorzystaniu strategii $S_{\mathrm{II}}^{(j^*)}$ wybranej przy pomocy reguły min-max.

Jeżeli

$$w_{\mathrm{I}}^* = w_{\mathrm{II}}^*$$

racjonalne oczekiwania Gracza I spotykają się z racjonalnymi oczekiwaniami Gracza II

$(S_{\mathrm{I}}^{(i^*)}, S_{\mathrm{II}}^{(j^*)})$ - punkt siodłowy

O ile istnieje punkt siodłowy, jest on rozwiązaniem optymalnym gry.

5.4.2. Punkt siodłowy (2/2)

Przykład 5.5

Gracz I	Gracz II					min
	S_{II}^1	S_{II}^2	S_{II}^3	S_{II}^4	S_{II}^5	
S_I^1	180	150	230	170	150	**150**
S_I^2	200	210	200	150	190	**150**
S_I^3	210	230	190	190	200	**190**
S_I^4	150	220	170	180	220	**150**
S_I^5	210	200	160	150	210	**150**
max	**210**	**230**	**230**	**190**	**220**	

max

min

5.4.3. Strategie mieszane (1/7)

Przykład 5.6

	Człowiek	Kogut	Robak	min
Człowiek	0	1	–1	**–1**
Kogut	–1	0	1	**–1**
Robak	1	–1	0	**–1**
max	**1**	**1**	**1**	

5.4.3. Strategie mieszane (2/7)

Definicje

Wektor wierszowy $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ taki, że $0 \leq x_i \leq 1$ oraz $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$ nazywamy **strategią mieszaną gracza I**.

Wektor kolumnowy $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ taki, że $0 \leq y_j \leq 1$ oraz $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$ nazywamy **strategią mieszaną gracza II**.

Strategia czysta jest szczególnym przypadkiem strategii mieszanej, w której ustaloną strategię wybieramy z prawdopodobieństwem 1.

$w_{\mathrm{I}}(x, y)$ oczekiwana wypłata Gracza I, o ile będzie on stosował strategię x, a Gracz II strategię y.

$w_{\mathrm{II}}(x, y)$ oczekiwana wypłata Gracza II, o ile będzie on stosował strategię y, a Gracz I strategię x.

5.4.3. Strategie mieszane (3/7)

Oczekiwana wypłata gracza I

Gracz I stosuje strategię $\boldsymbol{x}^* = [x^*_1, x^*_2, x^*_3]$

Gracz II stosuje strategię $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$

$$\begin{array}{c} S^1_{\mathrm{I}} \\ S^2_{\mathrm{I}} \\ S^3_{\mathrm{I}} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Strategia S_{I}^1 $\quad [0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + (-1) \cdot y_3] \cdot x^*_1$

Strategia S_{I}^2 $\quad [(-1) \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3] \cdot x^*_2$

Strategia S_{I}^3 $\quad [1 \cdot y_1 + (-1) \cdot y_2 + 0 \cdot y_3] \cdot x^*_3$

czyli

$$\boldsymbol{w_{\mathrm{I}}(x^*, y)} = (y_2 - y_3) \cdot x^*_1 + (-y_1 + y_3) \cdot x^*_2 + (y_1 - y_2) \cdot x^*_3$$

5.4.3. Strategie mieszane (4/7)

Oczekiwana wypłata gracza II

Gracz I stosuje strategię $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$

Gracz II stosuje strategię $\boldsymbol{y}^* = [y^*_1, y^*_2, y^*_3]$

$$\begin{array}{ccc} S^1_{\mathrm{II}} & S^2_{\mathrm{II}} & S^3_{\mathrm{II}} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Strategia S_{II}^1 $\quad [0 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3] \cdot y^*_1$

Strategia S_{II}^2 $\quad [1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3] \cdot y^*_2$

Strategia S_{II}^3 $\quad [(-1) \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3] \cdot y^*_3$

czyli

$$w_{\mathrm{II}}(x, y^*) = (-x_2 + x_3) \cdot y^*_1 + (x_1 - x_3) \cdot y^*_2 + (-x_1 + x_2) \cdot y^*_3$$

5.4.3. Strategie mieszane (5/7)

Przypadek ogólny

m – liczba strategii Gracza I

n – liczba strategii Gracza II

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mn} \end{bmatrix}$$

$$w_I(x^*, y) = \sum_{i=1}^{m} (w_{11}y_1 + w_{12}y_2 + \ldots + w_{1n}y_n) \cdot x^*{}_i$$

$$w_{\mathrm{II}}(x, y^*) = \sum_{j=1}^{n} (w_{11}x_1 + w_{21}x_2 + \ldots + w_{m1}x_m) \cdot y^*{}_j$$

5.4.3. Strategie mieszane (6/7)

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1

Dla dowolnej strategii x Gracza I oraz y Gracza II zachodzi związek:

$$w_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq w_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Twierdzenie 2

Istnieje para strategii optymalnych x^* oraz y^* taka, że:

$$w_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = w_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$$

Twierdzenie 3

Wartość v oraz strategie optymalne x^* oraz y^* wyznaczamy przez rozwiązanie następujących zadań programowania liniowego, sformułowanych dla poszczególnych graczy:

Gracz I	Gracz II
$\boldsymbol{v} \rightarrow \max$	$\boldsymbol{v} \rightarrow \min$
$\boldsymbol{xW} \geq \boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{Wy} \leq \boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{x}1 = 1$	$1\boldsymbol{y} = 1$
$\boldsymbol{x} \geq 0$	$\boldsymbol{y} \geq 0$

5.4.3. Strategie mieszane (7/7)

Wyznaczenie optymalnych strategii mieszanych

Gracz I

$$\begin{aligned} x_4 &\to \max \\ -x_2 + x_3 &\geq x_4 \\ x_1 - x_3 &\geq x_4 \\ -x_1 - x_2 &\geq x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gracz II

$$\begin{aligned} y_4 &\to \min \\ y_2 - y_3 &\leq y_4 \\ -y_1 + y_3 &\leq y_4 \\ y_1 - y_2 &\leq y_4 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &\to \max \\ -x_2 + x_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 &\geq 0 \\ -x_1 - x_2 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 &\to \min \\ y_2 - y_3 - y_4 &\leq 0 \\ -y_1 + y_3 - y_4 &\leq 0 \\ y_1 - y_2 - y_4 &\leq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie optymalne

$$x^*{}_1 = \frac{1}{3}, x^*{}_2 = \frac{1}{3}, x^*{}_3 = \frac{1}{3}, x^*{}_4 = 0, \qquad y^*{}_1 = \frac{1}{3}, y^*{}_2 = \frac{1}{3}, y^*{}_3 = \frac{1}{3}, y^*{}_4 = 0,$$

Pora na relaks