Programowanie wypukłe i kwadratowe

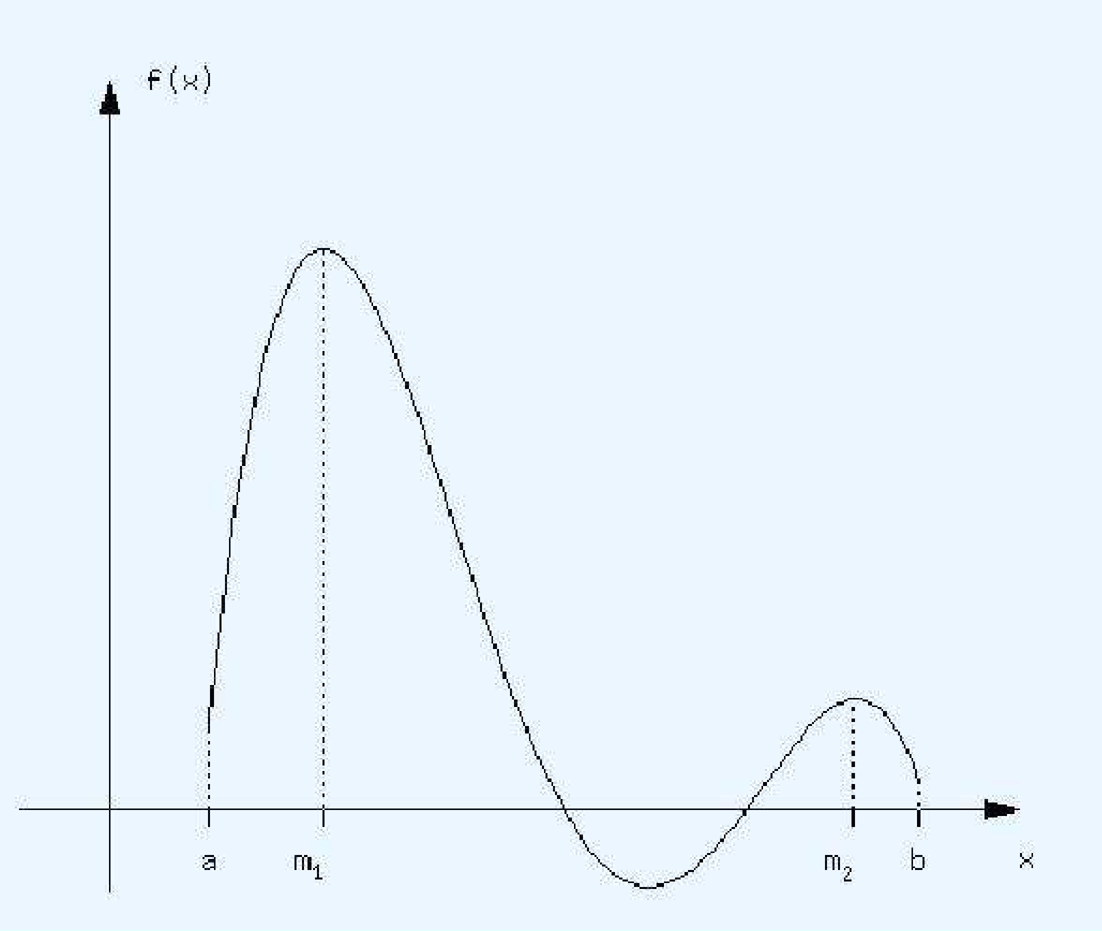
Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- **Zadanie programowania nieliniowego**
- **Ekstrema globalne i lokalne**
- **Zbiory wypukłe**
- **Funkcje wklęsłe i wypukłe**
- **Zadanie programowania wypukłego**
- **Funkcja Lagrange'a**
- **Warunki Kuhna - Tuckera**
- **Zadanie programowania kwadratowego**
- **Zadanie zastępcze**
- **Zmienne sztuczne typu *w* i *u***
- **Algorytm Wolfe'a**
- **Optymalny portfel akcji**
- **Zadanie Markowitza**

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukle (1/5)

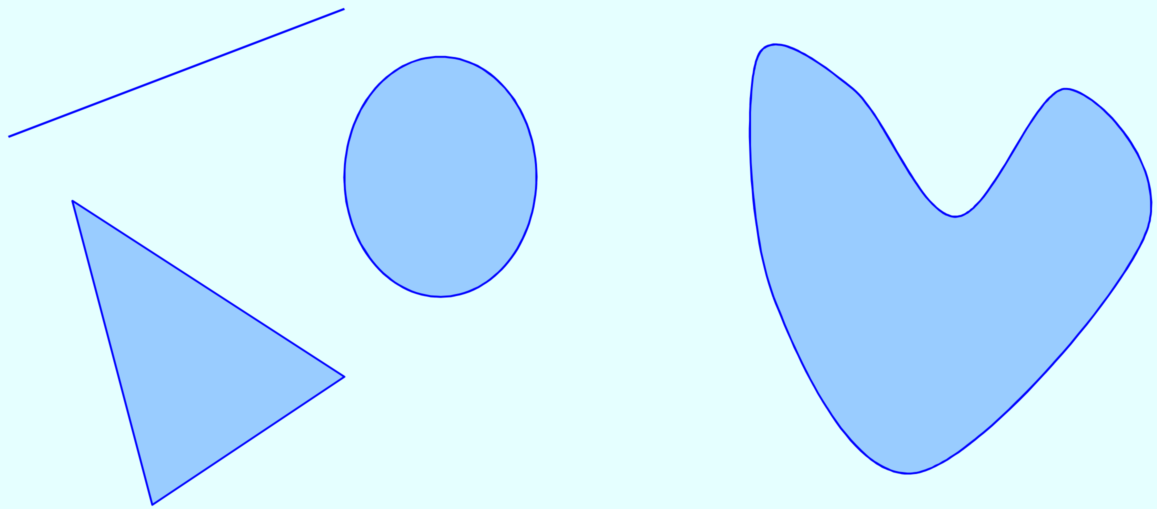
Ekstrema globalne i lokalne



6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukle (2/5)

Przykłady zbiorów wypukłych i niewypukłych

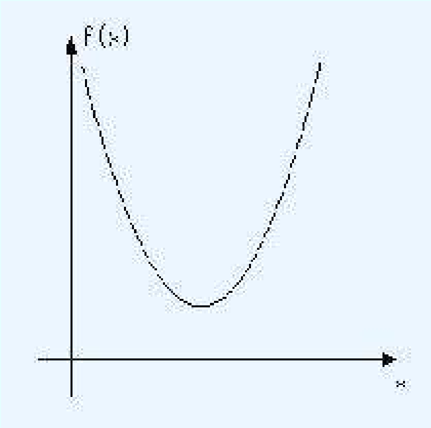
$$\forall x, y \in C \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$



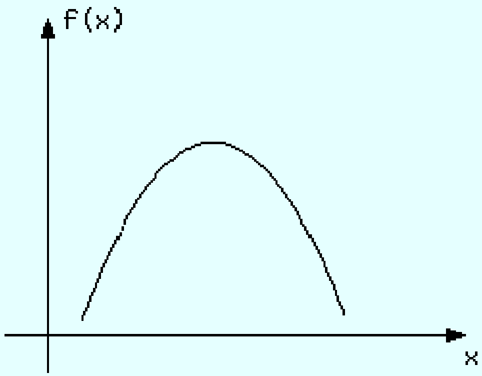
Zbiory wypukłe **Zbiór niewypukły**

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukle (3/5)

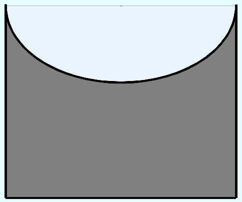
Funkcje wypukłe a kształty wypukle



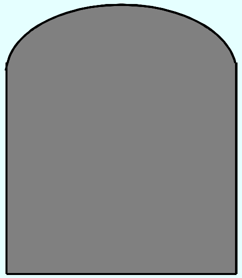
funkcja wypukła



funkcja wklęsła



kształt
wklęsły



kształt
wypukły

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukle (4/5)

Definicje

Funkcja wypukła:

$$\forall x, y \in W, \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Funkcja wklęsła:

$$f \text{ wklęsła} \Leftrightarrow -f \text{ wypukła}$$

Funkcja liniowa:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{x} + q = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + q$$

Forma kwadratowa:

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

Funkcja kwadratowa:

$$H(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$$

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukle (5/5)

Twierdzenia

Twierdzenie 6.1:

Funkcja liniowa jest jednocześnie funkcją wypukłą i wklęsłą.

Twierdzenie 6.2:

Forma kwadratowa jest funkcja wypukłą (wklęsłą) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz formy C jest nieujemnie (niedodatnio) określona.

6.2.2. Sformułowanie zadania programowania wypukłego (1/3)

Sformułowanie zadania

$$
\begin{gathered}
f(x) \to \max \\
g_1(x) \geq 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
g_m(x) \geq 0
\end{gathered}
\qquad\qquad
\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ g_m(x) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{gathered}
f(x) \to \max \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0
\end{gathered}
$$

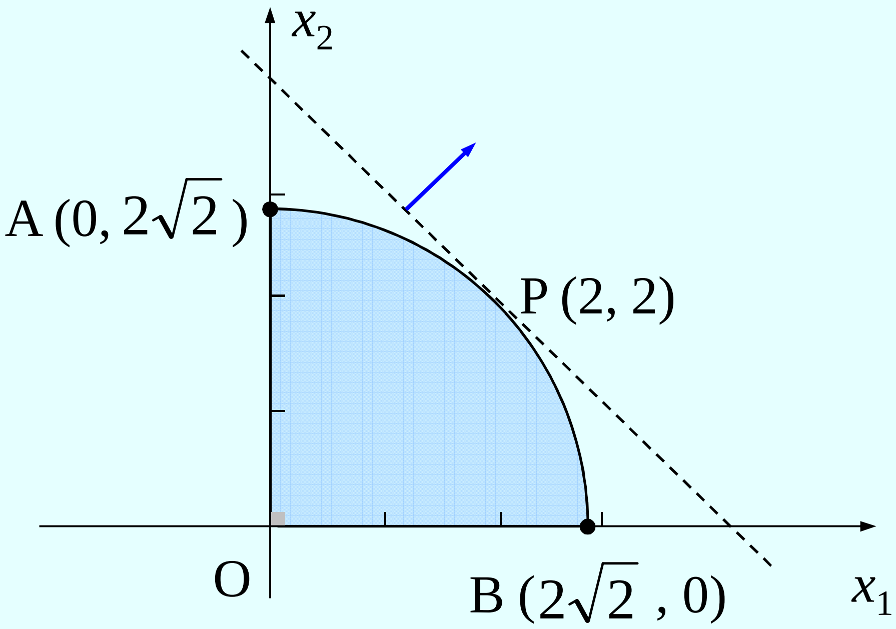
Powyższe zadanie jest zadaniem programowania wypukłego jeżeli f i wszystkie g_i są funkcjami **wklęsłymi**.

6.2.2. Sformułowanie zadania programowania wypukłego (2/3)

Przykład 6.1

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$



6.2.2. Sformułowanie zadania programowania wypukłego (3/3)

Zadanie programowania kwadratowego

$$\mathbf{p}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \max$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$\mathbf{C}$ – macierz nieujemnie określona

6.2.3. Warunki Kuhna-Tuckera (1/2)

Funkcja Lagrange'a

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \max$$
$$g(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}g(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]$$

$$L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

6.2.3. Warunki Kuhna-Tuckera (2/2)

Sformułowanie warunków

Warunek 1 $\nabla_x L(x,y) = 0 \qquad \nabla_x L(x,y) = \left[\frac{\partial L(x,y)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L(x,y)}{\partial x_n} \right]$

Warunek 2 $yg(x) = 0$

Warunek 3 $g(x) \geq 0$

Warunek 4 $y \geq 0$

Warunek Slatera

Twierdzenie 6.3:

Problem programowania wypukłego i problem Kuhna-Tuckera opisane warunkami 1 - 4 są sobie równoważne.

Przykład 6.1 (c.d.)

$$f(x) = x_1 + x_2$$
$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1 + x_2 + y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2 x_1 + y_3 x_2$$

Warunek 1:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1 x_1 + y_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1 x_2 + y_3 = 0$$

Warunek 2:

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2 x_1 + y_3 x_2 = 0$$

Warunek 3:

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

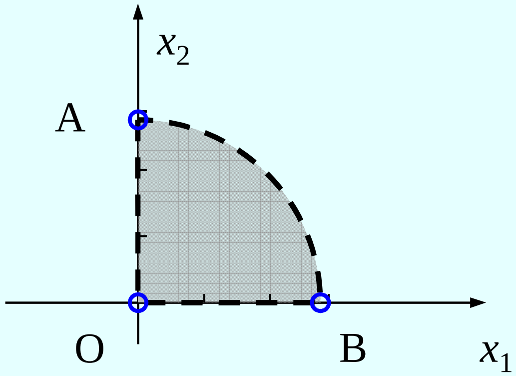
Warunek 4:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Podział zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podzbiory

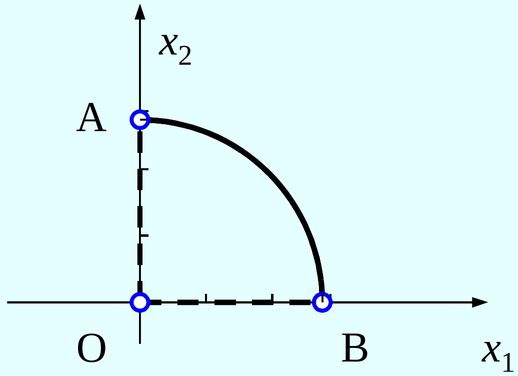
Podzbiór 1

$$g_1 > 0$$
$$g_2 > 0$$
$$g_3 > 0$$



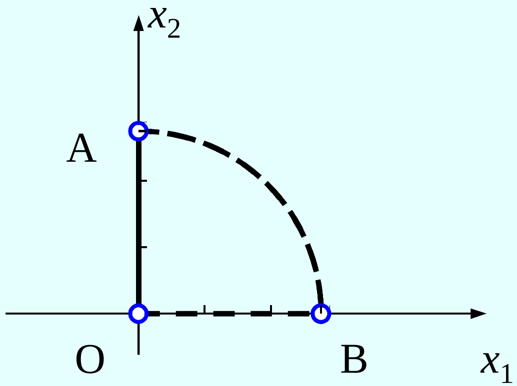
Podzbiór 2

$$g_1 = 0$$
$$g_2 > 0$$
$$g_3 > 0$$



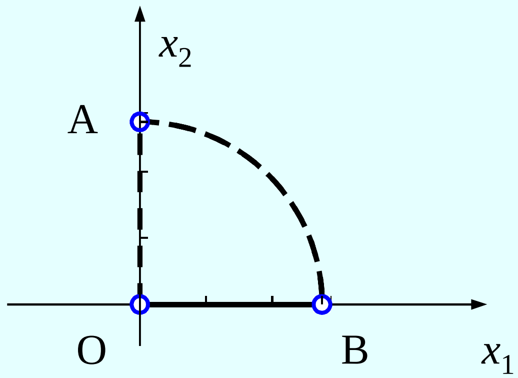
Podzbiór 3

$$g_1 > 0$$
$$g_2 = 0$$
$$g_3 > 0$$



Podzbiór 4

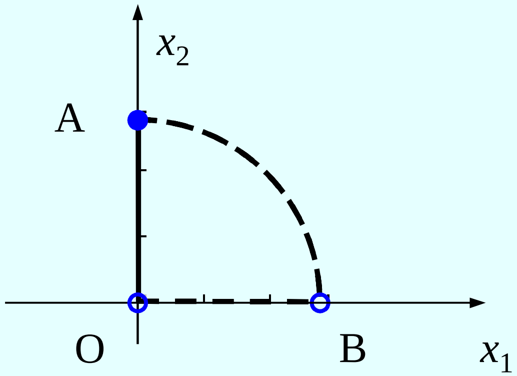
$$g_1 > 0$$
$$g_2 > 0$$
$$g_3 = 0$$



Podział zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podzbiory (c.d.)

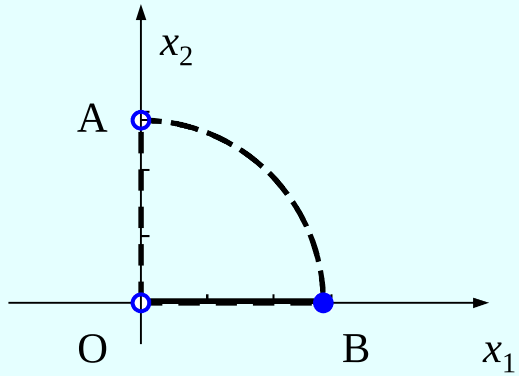
Podzbiór 5

$$g_1 = 0$$
$$g_2 = 0$$
$$g_3 > 0$$



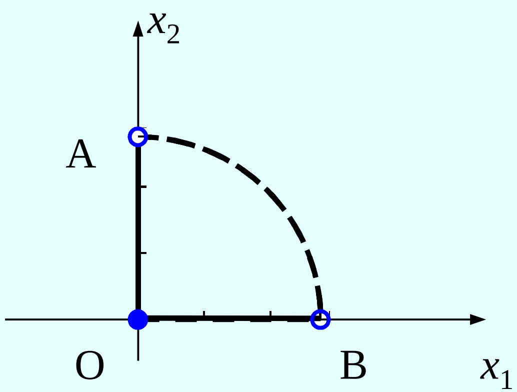
Podzbiór 6

$$g_1 = 0$$
$$g_2 > 0$$
$$g_3 = 0$$



Podzbiór 7

$$g_1 > 0$$
$$g_2 = 0$$
$$g_3 = 0$$



Podzbiór 8

$$g_1 = 0$$
$$g_2 = 0$$
$$g_3 = 0$$

Zbiór pusty

6.2.4. Wykorzystanie warunków K-T do rozwiązywania zadań programowania wypukłego (4/5)

Podzbiór 1

Warunek 1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Warunek 2

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Warunek 3

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Warunek 4

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Podzbiór 1

$$g_1 > 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$

z warunku 2 wynika, że

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$$

Wstawiamy te wartości do warunku 1

$$1 - 2 \cdot 0 \cdot x_1 + 0 = 0$$

$$1 - 2 \cdot 0 \cdot x_2 + 0 = 0$$

czyli: 1 = 0 - **sprzeczność**

Podzbiór 2

Warunek 1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Warunek 2

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Warunek 3

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Warunek 4

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Podzbiór 2

$$g_1 = 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$

z warunku 2 wynika, że

$$y_2 = 0, y_3 = 0$$

Wstawiamy te wartości do warunku 1

$$1 - 2y_1x_1 + 0 = 0$$

$$1 - 2y_1x_2 + 0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2y_1}, x_2 = \frac{1}{2y_1}$$

$$8 - \frac{1}{(2y_1)^2} - \frac{1}{(2y_1)^2} = 0$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ y_1 = 0{,}25,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0$$

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (1/3)

Przykład 6.2

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 &\rightarrow \max \\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
x_1 + x_2 &\leq 9 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$p^T x - x^T Cx \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

C − macierz nieujemnie określona

$$p = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (2/3)

Przekształcenia warunków ograniczających

$$f(x) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{lcl}
x_1 + 2x_2 \le 10 & \rightarrow & g_1(x_1, x_2) = 10 - x_1 - 2x_2 \ge 0 \\
x_1 + x_2 \le 9 & \rightarrow & g_2(x_1, x_2) = 9 - x_1 - x_2 \ge 0 \\
x_1 \ge 0 & \rightarrow & g_3(x_1, x_2) = x_1 \ge 0 \\
x_2 \ge 0 & \rightarrow & g_4(x_1, x_2) = x_2 \ge 0
\end{array}$$

$$y = \left[y_1, y_2, y_1^d, y_2^d\right]$$

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d) = \; & 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + \\
& + y_1(10 - x_1 - 2x_2) + y_2(9 - x_1 - x_2) + y_1^d x_1 + y_2^d x_2
\end{aligned}$$

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (3/3)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 1 $\nabla_x L(x,y) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10 - 20x_1 - 4x_2 - y_1 - y_2 + y_1^d = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 25 - 4x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + y_2^d = 0$$

Przenosimy wyrazy wolne na prawą stronę

$$-20x_1 - 4x_2 - y_1 - y_2 + y_1^d = -10$$

$$-4x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + y_2^d = -25$$

Mnożymy obie strony równań przez (-1)

$$20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1^d = 10$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d = 25$$

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (3/3)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 2 $$yg(x) = 0$$

$$y_1(10 - x_1 - 2x_2) + y_2(9 - x_1 - x_2) + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

Bilansowanie ograniczeń

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_1^d = 10$$

$$x_1^d = 10 - x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 9 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_2^d = 9$$

$$x_2^d = 9 - x_1 - x_2$$

Po podstawieniu x_1^d i x_2^d Warunek 2 ma postać

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (3/3)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 3 $g(x) \geq 0$

Warunek ten stanowi powtórzenie ograniczeń rozpatrywanego zadania

$g_1(x_1, x_2) = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0$ $g_2(x_1, x_2) = 9 - x_1 - x_2 \geq 0$

$g_3(x_1, x_2) = x_1 \geq 0$ $g_4(x_1, x_2) = x_2 \geq 0$

Uwzględniając zmienne bilansujące x_1^d i x_2^d, mamy:

$10 - x_1 - x_2 - x_1^d = 0$ $9 - x_1 - x_2 - x_2^d = 0$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

Przenosimy wyrazy wolne na prawa stronę i mnożymy przez (-1):

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_1^d \quad\quad &= 10 \\
x_1 + \ x_2 \quad\quad + x_2^d &= \ 9 \\
x_1 \geq 0 & \\
x_2 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (3/3)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 4 $y \geq 0$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_1^d \geq 0, \quad y_2^d \geq 0$$

Zestawienie warunków w wykorzystywanej dalej kolejności:

$$x_1 + 2x_2 + x_1^d = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_2^d = 9$$

$$20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1^d = 10$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d = 25$$

$$x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d \geq 0$$

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

6.3.2. Sformułowanie zadania zastępczego (1/1)

Zadanie zastępcze

$$w_1 + w_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_1^d &= 10 \\
x_1 + x_2 + x_2^d &= 9 \\
20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1^d + w_1 &= 10 \\
4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d + w_2 &= 25
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, w_1, w_2 \geq 0$$

Pominięty warunek:

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

Pary zmiennych komplementarnych:

y_1 i x_1^d $\qquad$ y_2 i x_2^d

y_1^d i x_1 $\qquad$ y_2^d i x_2

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (1/5)

Przebieg obliczeń

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
x_1^d	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	10
x_2^d	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9
w_1	1	20	4	0	0	1	1	-1	0	1	0	10
w_2	1	4	2	0	0	2	1	0	-1	0	1	25
$c_j - z_j$		-24	-6	0	0	-3	-2	1	1	0	0	

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (2/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
x_1^d	0	0	1,8	1	0	-0,05	-0,05	0,05	0	-0,05	0	9,5
x_2^d	0	0	0,8	0	1	-0,05	-0,05	0,05	0	-0,05	0	8,5
x_1	0	1	0,2	0	0	0,05	0,05	-0,05	0	0,05	0	0,5
w_2	1	0	1,2	0	0	1,8	0,8	0,2	-1	-0,2	1	23
$c_j - z_j$		0	-1,2	0	0	-1,8	-0,8	-0,2	1	1,2	0	

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (3/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
x_1^d	0	-9	0	1	0	-0,5	-0,5	0,5	0	-0,25	0	5
x_2^d	0	-4	0	0	1	-0,25	-0,25	0,25	0	-0,25	0	6,5
x_2	0	5	1	0	0	0,25	0,25	-0,25	0	0,25	0	2,5
w_2	1	-6	0	0	0	1,5	0,5	0,5	-1	-0,5	1	20
$c_j - z_j$		6	0	0	0	-1,5	-0,5	-0,5	1	1,5	0	

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (4/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$cx \rightarrow \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
y_1^d	0	-18	0	2	0	-1	-1	1	0	-1	0	10
x_2^d	0	0,5	0	-0,5	1	0	0	0	0	0	0	4
x_2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
w_2	1	3	0	-1	0	2	1	0	-1	0	1	15
$c_j - z_j$		-3	0	1	0	-2	-1	0	1	1	0	

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (5/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$cx \to min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
y_1^d	0	-16,5	0	1,5	0	0	-0,5	1	-0,5	-1	0,5	17,5
x_2^d	0	0,5	0	-0,5	1	0	0	0	0	0	0	4
x_2	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	5
y_2	1	1,5	0	-0,5	0	1	0,5	0	-0,5	0	0,5	7,5
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Z twierdzenia Kuhna-Tuckera:

$x_1 = 0,\ \ x_2 = 5$ - rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania programowania kwadratowego

6.3.4. Przypadek ogólny (1/5)

Przykład 6.3

$$f(x_1,x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ -x_1 - x_2 &\leq -9 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zadanie zastępcze

$$v_1 + w_1 + w_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_1^d = 10 \\ x_1 + x_2 - x_2^d + v_1 = 9 \\ 20x_1 + 4x_2 + y_1 - y_2 - y_1^d + w_1 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2y_1 - y_2 - y_2^d + w_2 = 25 \\ x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, v_1, w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

6.3.4. Przypadek ogólny (2/5)

Iteracja 5

$cx \rightarrow \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	v_1	w_1	w_2	
x_2	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
y_1	0	1,5	0	-0,5	0	1	-0,5	0	-0,5	0	0	0,5	7,5
y_1^d	0	-16,5	0	1,5	0	0	0,5	1	-0,5	0	-1	0,5	17,5
v_1	1	0,5	0	-0,5	-1	0	0	0	0	1	0	0	4
$c_j - z_j$		-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1	1	

6.3.4. Przypadek ogólny (3/5)

Iteracja 6

cx→min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	v_1	w_1	w_2	
x_2	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
y_1	0	-15	0	1	0	1	0	1	-1	0	-1	1	25
y_2	0	-33	0	3	0	0	1	2	-1	0	-2	1	35
v_1	1	0,5	0	-0,5	-1	0	0	0	0	1	0	0	4
$c_j - z_j$		-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1	1	

6.3.4. Przypadek ogólny (4/5)

Iteracja 7

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	v_1	w_1	w_2	
x_2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	1
y_1	0	0	0	-14	-30	1	0	1	-1	30	-1	1	145
y_2	0	0	0	-30	-66	0	1	2	-1	66	-2	1	299
x_1	0	1	0	-1	-2	0	0	0	0	2	0	0	8
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Z twierdzenia Kuhna-Tuckera:

$x_1 = 8, \; x_2 = 1$ - rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania programowania kwadratowego

6.3.4. Przypadek ogólny (5/5)

Przykład 6.4

$$f(x_1,x_2) = 10x_1 - 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ -x_1 - x_2 &\le -9 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Zadanie zastępcze

$$v_1 + w_1 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_1^d &= 10 \\ x_1 + x_2 - x_2^d + v_1 &= 9 \\ 20x_1 + 4x_2 + y_1 - y_2 - y_1^d + w_1 &= 10 \\ -4x_1 - 2x_2 - 2y_1 + y_2 + y_2^d &= 25 \\ x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, v_1, w_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

6.3.5. Reguły postępowania w metodzie Wolfe'a (1/1)

Algorytm

1. Zapisanie warunków Kuhna-Tuckera.

2. Zapisanie zadania zastępczego:

a) zmienne sztuczne typu *w*,

b) zmienne sztuczne typu *v*.

3. Rozwiązanie zadania zastępczego:

a) wybór zmiennej kandydującej do bazy,

b) sprawdzenie, czy wybór zmiennej kandydującej był właściwy,

c) wybór zmiennej usuwanej z bazy,

d) badanie niesprzeczności zadania.

4. Odczytanie rozwiązania zadania wyjściowego.

6.4.1. Oczekiwana stopa zysku i ryzyko portfela (1/2)

Podstawowe pojęcia

Określić taki skład portfela, złożonego z akcji *n* spółek, by zminimalizować ryzyko portfela, przy założonym z góry poziomie oczekiwanego zysku.

Stopa zysku z *i*-tej akcji w okresie *t* (*t* = 1, ..., *T*)

$$R_i(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}$$

Oczekiwana stopa zysku z *i*-tej akcji

$$R_i = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} R_i(t)$$

Udziały akcji w portfelu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad x_i \geq 0$$

Oczekiwana stopa zysku portfela akcji

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$$

6.4.1. Oczekiwana stopa zysku i ryzyko portfela (2/2)

Podstawowe pojęcia (c.d.)

Ryzyko (wariancja) portfela

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j S_i S_j r_{ij}$$

Odchylenie standardowe stopy zysku

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(R_i(t) - \overline{R}_i\right)^2}$$

Współczynnik korelacji

$$r_{ij} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(R_i(t) - \overline{R}_i\right)\left(R_j(t) - \overline{R}_j\right)}{S_i S_j} = \frac{\operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right)}{S_i S_j}$$

Zmodyfikowany wzór na wariancję portfela

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (1/7)

Sformułowanie zadania

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j v_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i x_i \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\mathbf{O}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x} \to \max$$

$$\mathbf{R}\mathbf{x} \geq \mathbf{R_O}$$

$$\mathbf{1}^T\mathbf{x} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$x_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{V}$ – macierz wariancji i kowariancji ($V = [\mathrm{cov}(R_i, R_j)]$),

$$\mathbf{R} = [R_1, \ldots, R_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (2/7)

Przykład 6.4

Notowania				
Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
53.60	15.20	273.00	26.90	67.50
52.00	15.75	283.00	27.20	66.00
51.00	15.50	275.50	27.80	66.50
52.30	15.50	270.00	29.30	65.70
54.60	15.25	274.50	31.40	68.00
58.30	15.20	290.00	29.80	69.00
61.00	15.50	283.50	28.70	70.00
61.90	15.50	281.00	29.00	69.00
61.90	16.00	286.00	28.90	68.30
59.40	16.00	286.00	29.80	68.10
64.20	16.50	285.00	33.00	68.80
66.60	16.90	272.00	32.70	71.50
65.70	17.70	270.50	34.30	75.30
64.30	17.20	265.00	34.50	73.90
64.30	17.30	267.00	34.00	74.00
66.20	17.20	263.50	33.30	72.30
67.60	18.60	265.00	32.90	72.40
67.10	18.50	268.00	32.80	72.20
65.10	17.95	270.00	31.30	71.40
65.00	18.50	269.50	29.10	72.10
64.00	19.15	270.50	31.00	73.50

Oczekiwane stopy zysku z akcji w okresie t w %				
Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
-2.99	3.62	3.66	1.12	-2.22
-1.92	-1.59	-2.65	2.21	0.76
2.55	0.00	-2.00	5.40	-1.20
4.40	-1.61	1.67	7.17	3.50
6.78	-0.33	5.65	-5.10	1.47
4.63	1.97	-2.24	-3.69	1.45
1.48	0.00	-0.88	1.05	-1.43
0.00	3.23	1.78	-0.34	-1.01
-4.04	0.00	0.00	3.11	-0.29
8.08	3.13	-0.35	10.74	1.03
3.74	2.42	-4.56	-0.91	3.92
-1.35	4.73	-0.55	4.89	5.31
-2.13	-2.82	-2.03	0.58	-1.86
0.00	0.58	0.75	-1.45	0.14
2.95	-0.58	-1.31	-2.06	-2.30
2.11	8.14	0.57	-1.20	0.14
-0.74	-0.54	1.13	-0.30	-0.28
-2.98	-2.97	0.75	-4.57	-1.11
-0.15	3.06	-0.19	-7.03	0.98
-1.54	3.51	0.37	6.53	1.94

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (3/7)

Obliczenia pomocnicze

Oczekiwane stopy zysku z akcji w %					
	Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
R_i	0.94	1.20	-0.02	0.81	0.45

Macierz wariancji-kowariancji stóp zysku					
	Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
Spółka 1	11.4312	1.1701	0.1232	1.6619	2.0254
Spółka 2	1.1701	7.7723	0.4983	1.1374	1.7056
Spółka 3	0.1232	0.4983	5.1598	-1.3094	-0.6307
Spółka 4	1.6619	1.1374	-1.3094	20.2858	2.2824
Spółka 5	2.0254	1.7056	-0.6307	2.2824	4.3189

Model matematyczny

Cel

Znalezienie portfela akcji minimalizującego ryzyko o zadanej oczekiwanej stopie zysku.

Zmienne decyzyjne

x_1 – udział w portfelu akcji spółki 1,

x_2 – udział w portfelu akcji spółki 2,

x_3 – udział w portfelu akcji spółki 3,

x_4 – udział w portfelu akcji spółki 4,

x_5 – udział w portfelu akcji spółki 5,

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (5/7)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \cdot \boldsymbol{V} \cdot [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \rightarrow \min$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 11.4312 & 1.1701 & 0.1232 & 1.6619 & 2.0254 \\ 1.1701 & 7.7723 & 0.4983 & 1.1374 & 1.7056 \\ 0.1232 & 0.4983 & 5.1598 & -1.3094 & -0.6307 \\ 1.6619 & 1.1374 & -1.3094 & 20.2858 & 2.2824 \\ 2.0254 & 1.7056 & -0.6307 & 2.2824 & 4.3189 \end{bmatrix}$$

Ograniczenia

oczekiwany zysk z portfela ma być większy od 1%, czyli:

$$0,94x_1 + 1,20x_2 - 0,02x_3 + 0,81x_4 + 0,45x_5 \geq 1$$

udziały akcji w portfelu sumują się do jedności:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

warunki nieujemności:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (6/7)

Rozwinięta postać zadania

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11{,}4312 & 1{,}1701 & 0{,}1232 & 1{,}6619 & 2{,}0254 \\ 1{,}1701 & 7{,}7723 & 0{,}4983 & 1{,}1374 & 1{,}7056 \\ 0{,}1232 & 0{,}4983 & 5{,}1598 & -1{,}3094 & -0{,}6307 \\ 1{,}6619 & 1{,}1374 & -1{,}3094 & 20{,}2858 & 2{,}2824 \\ 2{,}0254 & 1{,}7056 & -0{,}6307 & 2{,}2824 & 4{,}3189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to \max$$

przy warunkach ograniczających:

$$-0{,}94x_1 - 1{,}20x_2 + 0{,}02\,x_3 - 0{,}81x_4 - 0{,}45x_5 \le -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \le -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (7/7)

Rozwiązanie i interpretacja

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 0{,}2468 \quad x_2 = 0{,}5391 \quad x_3 = 0{,}0285 \quad x_4 = 0{,}1060 \quad x_5 = 0{,}0797$$

Interpretacja rozwiązania

Optymalny portfel, dla którego stopa oczekiwanego zysku jest nie mniejsza niż 1% będzie się składał (w ujęciu wartościowym) w 24,68% z akcji spółki 1, w 53,91% z akcji spółki 2, w 2,85% z akcji spółki 3, w 10,6% z akcji spółki 4 i w 7,97% akcji spółki 5. Ryzyko takiego portfela wynosi $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (1/5)

Przykład 6.4

Cel

Szukamy takiego portfela akcji, dla którego ryzyko jest minimalne, a oczekiwany zysk portfela – maksymalny.

Zmienne decyzyjne

x_1 – udział w portfelu akcji spółki 1,

x_2 – udział w portfelu akcji spółki 2,

x_3 – udział w portfelu akcji spółki 3,

x_4 – udział w portfelu akcji spółki 4,

x_5 – udział w portfelu akcji spółki 5,

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (2/5)

Model matematyczny

Funkcje celu

Minimalizacja ryzyka portfela

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\begin{bmatrix} 11{,}4312 & 1{,}1701 & 0{,}1232 & 1{,}6619 & 2{,}0254 \\ 1{,}1701 & 7{,}7723 & 0{,}4983 & 1{,}1374 & 1{,}7056 \\ 0{,}1232 & 0{,}4983 & 5{,}1598 & -1{,}3094 & -0{,}6307 \\ 1{,}6619 & 1{,}1374 & -1{,}3094 & 20{,}2858 & 2{,}2824 \\ 2{,}0254 & 1{,}7056 & -0{,}6307 & 2{,}2824 & 4{,}3189 \end{bmatrix}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \to \min$$

Maksymalizacja oczekiwanej stopy zysku portfela:

$$0{,}94x_1 + 1{,}2x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}81x_4 + 0{,}45x_5 \to \max$$

Ograniczenia

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (3/5)

Metoda satysfakcjonującego poziomu kryteriów

Funkcja celu

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\begin{bmatrix} 11{,}4312 & 1{,}1701 & 0{,}1232 & 1{,}6619 & 2{,}0254 \\ 1{,}1701 & 7{,}7723 & 0{,}4983 & 1{,}1374 & 1{,}7056 \\ 0{,}1232 & 0{,}4983 & 5{,}1598 & -1{,}3094 & -0{,}6307 \\ 1{,}6619 & 1{,}1374 & -1{,}3094 & 20{,}2858 & 2{,}2824 \\ 2{,}0254 & 1{,}7056 & -0{,}6307 & 2{,}2824 & 4{,}3189 \end{bmatrix}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \to \min$$

Ograniczenia

$$-0{,}94x_1 - 1{,}20x_2 + 0{,}02x_3 - 0{,}81x_4 - 0{,}45x_5 \le -R_0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \le -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

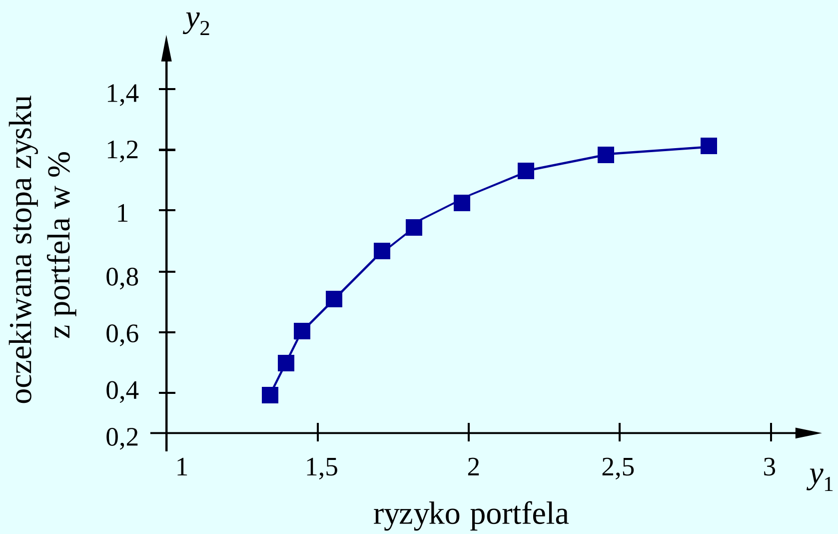
6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (4/5)

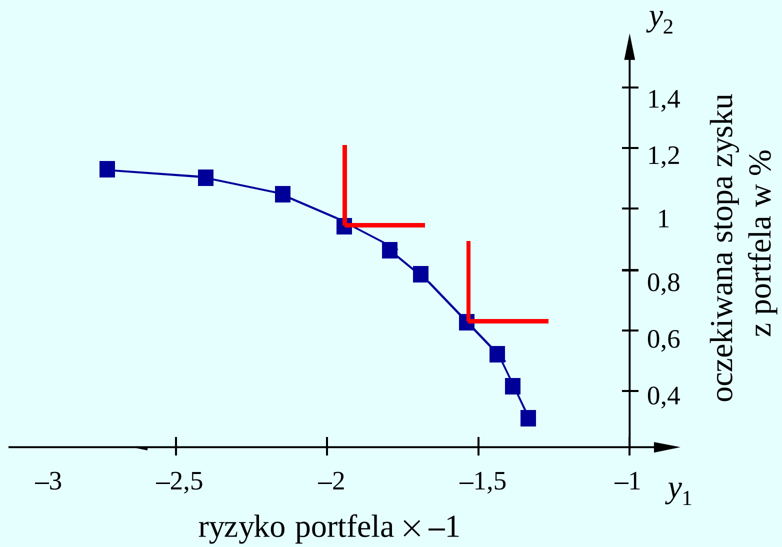
Wyniki obliczeń

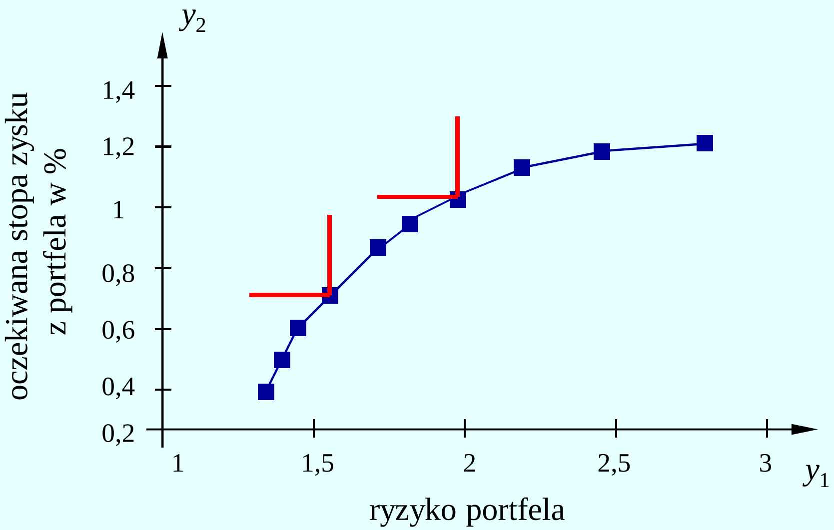
Parametry portfeli wyznaczonych dla założonych wartości R_0							
Lp	R_0	V_p	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P_1	1.2	2.79	0	1	0	0	0
P_2	1.15	2.42	0.1841	0.8104	0	0.0054	0
P_3	1.1	2.20	0.2527	0.6594	0	0.0879	0
P_4	1.0	2.00	0.2468	0.5391	0.0285	0.1060	0.0797
P_5	0.9	1.83	0.2171	0.4671	0.0897	0.0986	0.1275
P_6	0.8	1.67	0.1874	0.3951	0.1510	0.0911	0.1754
P_7	0.7	1.53	0.1577	0.3231	0.2122	0.0837	0.2233
P_8	0.6	1.43	0.1280	0.2511	0.2734	0.0763	0.2711
P_9	0.5	1.36	0.0984	0.1791	0.3347	0.0689	0.3190
P_{10}	0.4	1.34	0.0687	0.1071	0.3959	0.0615	0.3668

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (5/5)

Granica efektywna







Pora na relaks