

Optymalizacja wypukła i kwadratowa

Tadeusz Trzaskalik

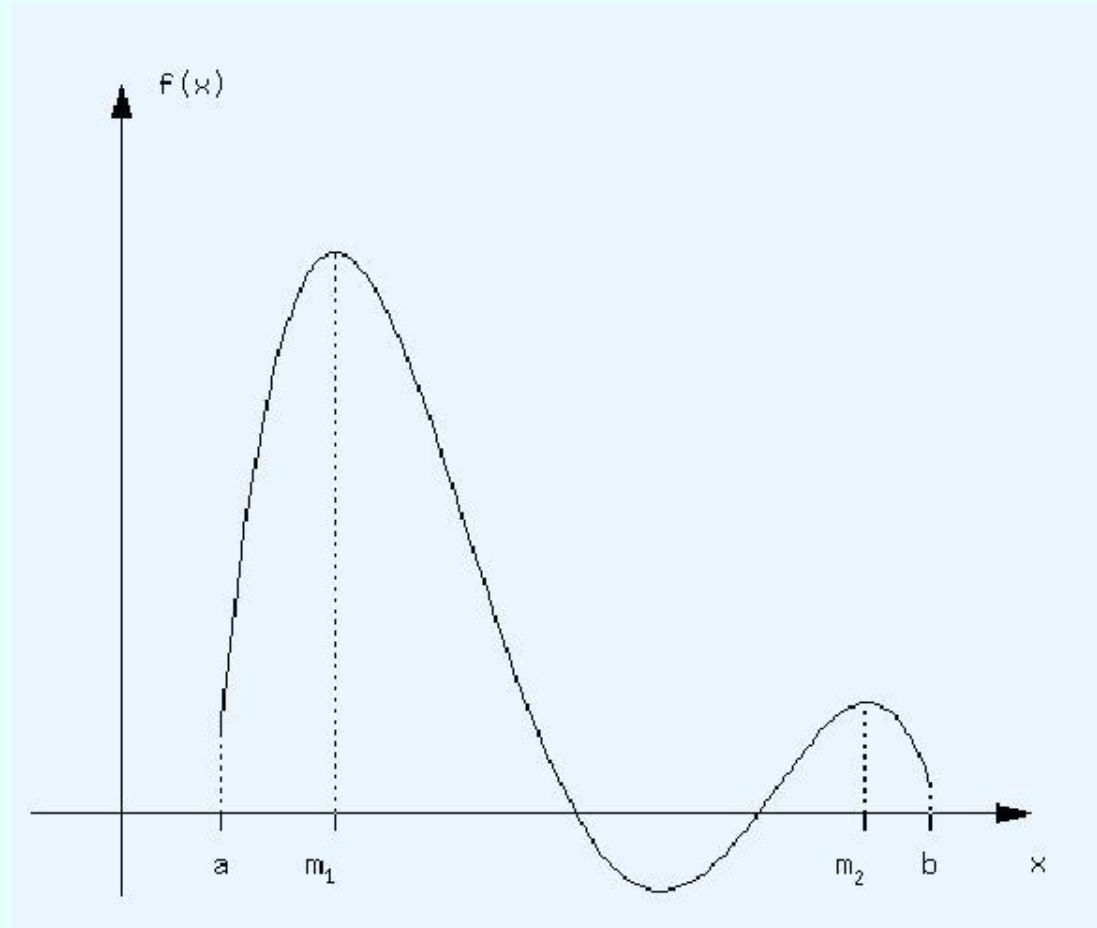
Słowa kluczowe

- **Zadanie programowania nieliniowego**
- **Ekstrema globalne i lokalne**
- **Zbiory wypukłe**
- **Funkcje wklęsłe i wypukłe**
- **Zadanie programowania wypukłego**
- **Funkcja Lagrange'a**
- **Warunki Kuhna - Tuckera**
- **Zadanie programowania kwadratowego**
- **Zadanie zastępcze**
- **Zmienne sztuczne typu w i v**
- **Algorytm Wolfe'a**
- **Optymalny portfel akcji**
- **Zadanie Markowitza**

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe (1/5)

Ekstrema globalne i lokalne



6.2. Zadanie programowania wypukłego

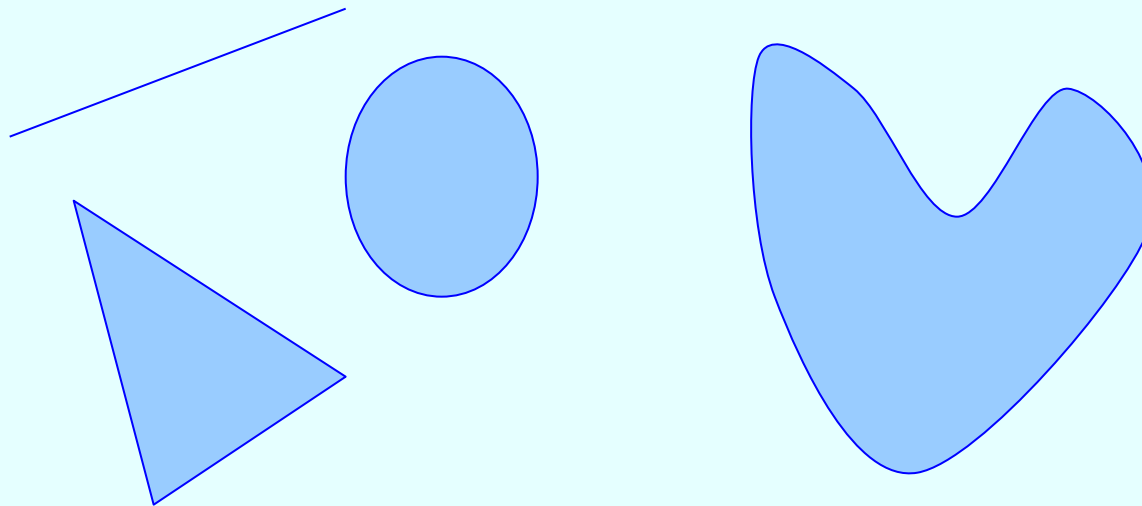
6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe (2/5)

Przykłady zbiorów wypukłych i niewypukłych

$$\forall x, y \in C$$

$$\forall \lambda \in [0,1]$$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$



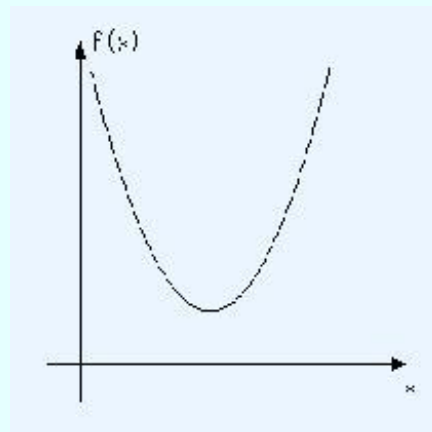
Zbiory wypukłe

Zbiór niewypukły

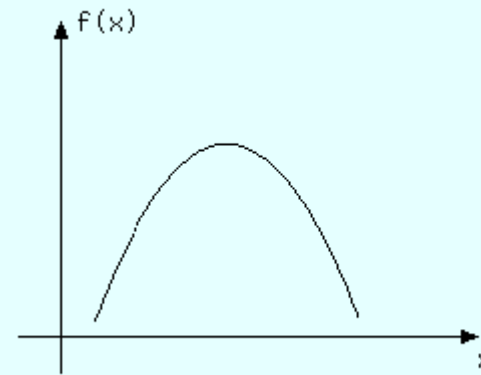
6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe (3/5)

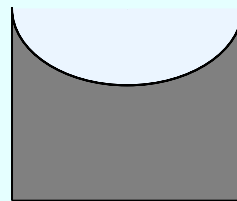
Funkcje wypukłe a kształty wypukłe



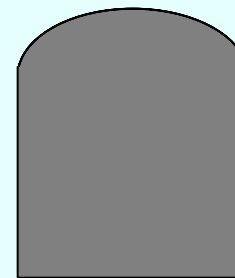
funkcja wypukła



funkcja wklęsła



kształt
wklęsły



kształt
wypukły

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe (4/5)

Definicje

Funkcja wypukła:

$$\forall x, y \in W, \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Funkcja wklęsła:

$$f \text{ wklęsła} \Leftrightarrow -f \text{ wypukła}$$

Funkcja liniowa:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{x} + q = \sum_{j=1}^n p_j x_j + q$$

Forma kwadratowa:

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j$$

Funkcja kwadratowa:

$$H(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$$

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe (5/5)

Twierdzenia

Twierdzenie 6.1:

Funkcja liniowa jest jednocześnie funkcją wypukłą i wklęsłą.

Twierdzenie 6.2:

Forma kwadratowa jest funkcją wypukłą (wklęsłą) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz formy C jest nieujemnie (niedodatnio) określona.

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.2. Sformułowanie zadania programowania wypukłego (1/3)

Zadanie programowania wypukłego

$$f(x) \rightarrow \max$$

$$g_1(x) \geq 0$$

.....

$$g_m(x) \geq 0$$

$$f(x) \rightarrow \max$$

$$g(x) \geq 0$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \dots \dots \\ g_m(x) \end{bmatrix}$$

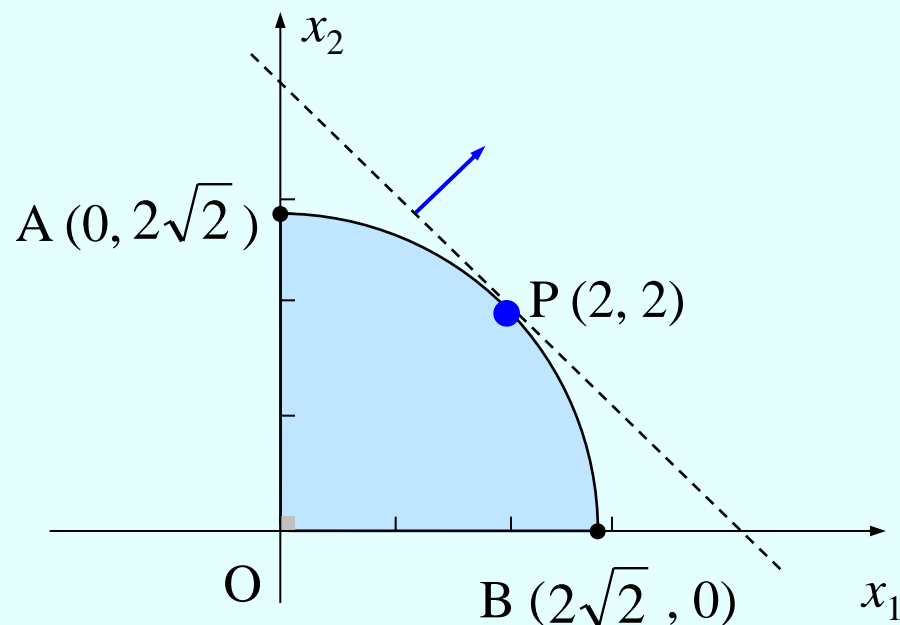
Powyższe zadanie jest zadaniem programowania wypukłego jeżeli f i wszystkie g_i są funkcjami **wklęsłymi**.

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.2. Sformułowanie zadania programowania wypukłego (2/3)

Przykład 6.1

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ g_1(\mathbf{x}) &= 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) &= x_1 \geq 0 \\ g_3(\mathbf{x}) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.2. Sformułowanie zadania programowania wypukłego (3/3)

Przykład 6.2

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$p^T x - x^T Cx \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

C - macierz nieujemnie określona

$$p = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.3. Warunki Kuhna-Tuckera (1/2)

Funkcja Lagrange'a

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \max$$

$$g(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}g(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]$$

$$L(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.3. Warunki Kuhna-Tuckera (2/2)

Sformułowanie warunków

Warunek 1 $\nabla_x L(x, y) = 0$ $\nabla_x L(x, y) = \left[\frac{\partial L(x, y)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L(x, y)}{\partial x_n} \right]$

Warunek 2 $yg(x) = 0$

Warunek 3 $g(x) \geq 0$

Warunek 4 $y \geq 0$

Warunek Slatera

Twierdzenie 6.3:

Problem programowania wypukłego i problem Kuhna-Tuckera opisane warunkami 1 - 4 są sobie równoważne.

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.4. Wykorzystanie warunków K-T do rozwiązywania zadań programowania wypukłego (1/5)

Przykład 6.1 (c.d.)

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1 + x_2 + y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2$$

Warunek 1:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Warunek 2:

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Warunek 3:

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Warunek 4:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.4. Wykorzystanie warunków K-T do rozwiązywania zadań programowania wypukłego (2/5)

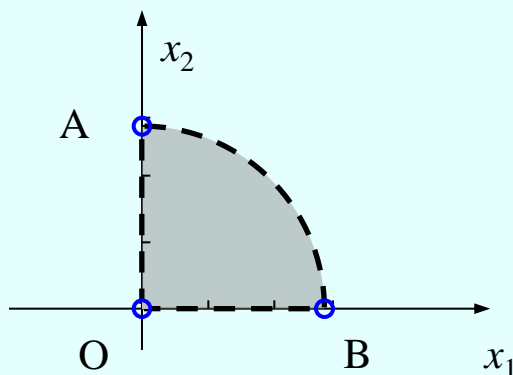
Podział zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podzbiory

Podzbiór 1

$$g_1 > 0$$

$$g_2 > 0$$

$$g_3 > 0$$

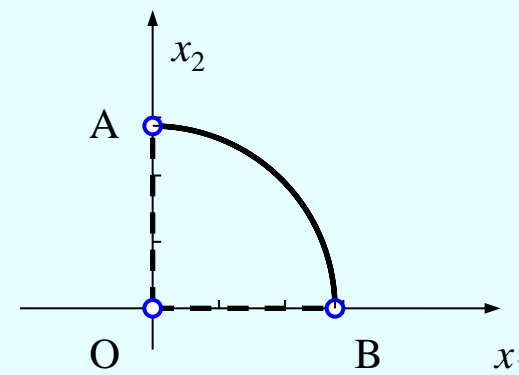


Podzbiór 2

$$g_1 = 0$$

$$g_2 > 0$$

$$g_3 > 0$$

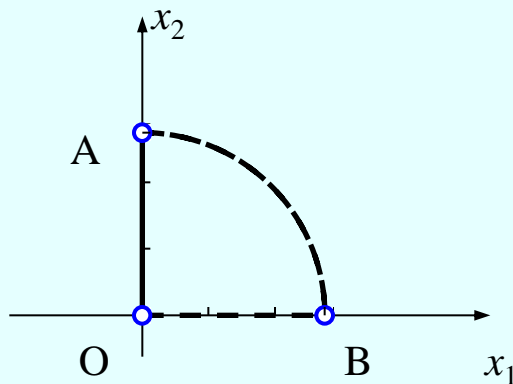


Podzbiór 3

$$g_1 > 0$$

$$g_2 = 0$$

$$g_3 > 0$$

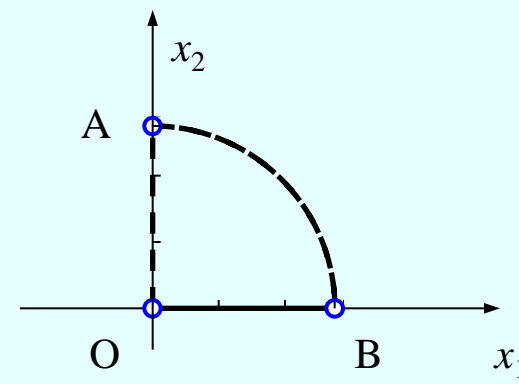


Podzbiór 4

$$g_1 > 0$$

$$g_2 > 0$$

$$g_3 = 0$$



6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.4. Wykorzystanie warunków K-T do rozwiązywania zadań programowania wypukłego (3/5)

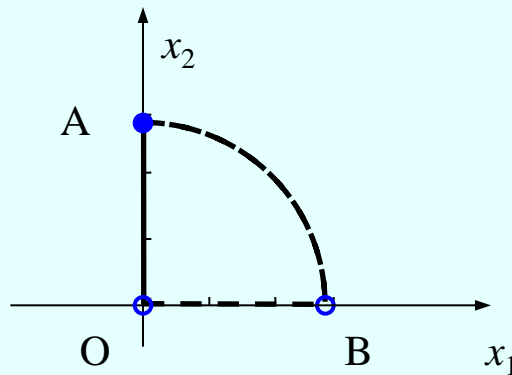
Podział zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podzbiory (c.d.)

Podzbiór 5

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 0$$

$$g_3 > 0$$

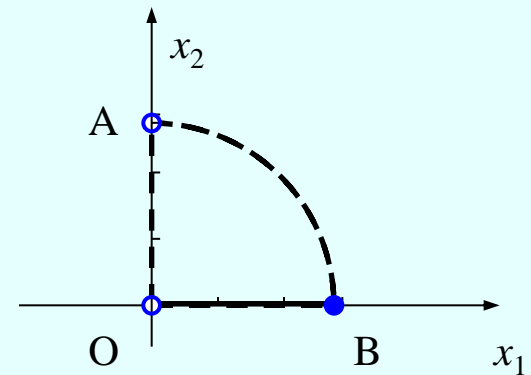


Podzbiór 6

$$g_1 = 0$$

$$g_2 > 0$$

$$g_3 = 0$$

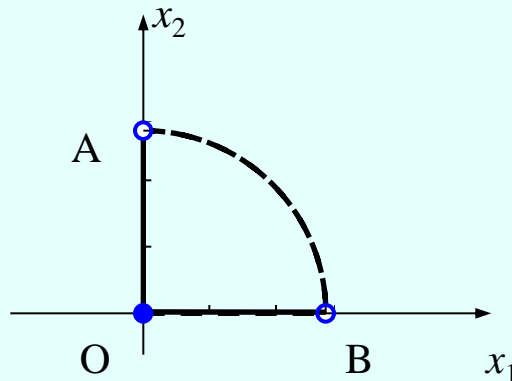


Podzbiór 7

$$g_1 > 0$$

$$g_2 = 0$$

$$g_3 = 0$$



Podzbiór 8

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 0$$

$$g_3 = 0$$

Zbiór pusty

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.4. Wykorzystanie warunków K-T do rozwiązywania zadań programowania wypukłego (4/5)

Podzbiór 1

Warunek 1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Warunek 2

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Warunek 3

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Warunek 4

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Podzbiór 1

$$g_1 > 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$

z warunku 2 wynika, że

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$$

Wstawiamy te wartości do warunku 1

$$1 - 2 \cdot 0 \cdot x_1 + 0 = 0$$

$$1 - 2 \cdot 0 \cdot x_2 + 0 = 0$$

czyli: $1 = 0$ - **sprzeczność**

6.2. Zadanie programowania wypukłego

6.2.4. Wykorzystanie warunków K-T do rozwiązywania zadań programowania wypukłego (5/5)

Podzbiór 2

Warunek 1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Warunek 2

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Warunek 3

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Warunek 4

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Podzbiór 2

$$g_1 = 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$

z warunku 2 wynika, że

$$y_2 = 0, y_3 = 0$$

Wstawiamy te wartości do warunku 1

$$1 - 2y_1x_1 + 0 = 0$$

$$1 - 2y_1x_2 + 0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2y_1}, x_2 = \frac{1}{2y_1}$$

$$8 - \frac{1}{(2y_1)^2} - \frac{1}{(2y_1)^2} = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 2, y_1 = 0,25, y_2 = 0, y_3 = 0$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (1/5)

Przekształcenia warunków ograniczających

Przykład 6.2 (c.d.)

$$f(x) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \rightarrow \quad g_1(x_1, x_2) = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 9 \quad \rightarrow \quad g_2(x_1, x_2) = 9 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad g_3(x_1, x_2) = x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad g_4(x_1, x_2) = x_2 \geq 0$$

$$y = [y_1, y_2, y_1^d, y_2^d]$$

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + \\ + y_1(10 - x_1 - 2x_2) + y_2(9 - x_1 - x_2) + y_1^d x_1 + y_2^d x_2$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (2/5)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 1 $\nabla_x L(x, y) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10 - 20x_1 - 4x_2 - y_1 - y_2 + y_1^d = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 25 - 4x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + y_2^d = 0$$

Przenosimy wyrazy wolne na prawą stronę

$$-20x_1 - 4x_2 - y_1 - y_2 + y_1^d = -10$$

$$-4x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + y_2^d = -25$$

Mnożymy obie strony równań przez (-1)

$$20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1^d = 10$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d = 25$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (3/5)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 2 $yg(x) = 0$

$$y_1(10 - x_1 - 2x_2) + y_2(9 - x_1 - x_2) + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

Bilansowanie ograniczeń

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \leq 10 &\quad \rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_1^d = 10 \\ x_1^d = 10 - x_1 - 2x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \leq 9 &\quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_2^d = 9 \\ x_2^d = 9 - x_1 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Po podstawieniu x_1^d i x_2^d Warunek 2 ma postać

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (4/5)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 3 $g(x) \geq 0$

Warunek ten stanowi powtórzenie ograniczeń rozpatrywanego zadania

$$g_1(x_1, x_2) = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \quad g_2(x_1, x_2) = 9 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = x_1 \geq 0 \quad g_4(x_1, x_2) = x_2 \geq 0$$

Uwzględniając zmienne bilansujące x_1^d i x_2^d , mamy:

$$10 - x_1 - x_2 - x_1^d = 0 \quad 9 - x_1 - x_2 - x_2^d = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^d \geq 0, x_2^d \geq 0$$

Przenosimy wyrazy wolne na prawa stronę i mnożymy przez (-1):

$$x_1 + 2x_2 + x_1^d = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_2^d = 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^d \geq 0, x_2^d \geq 0$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.1. Warunki Kuhna-Tuckera dla zadania programowania kwadratowego (5/5)

Sformułowanie warunków K-T

Warunek 4 $y \geq 0$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_1^d \geq 0, \quad y_2^d \geq 0$$

Zestawienie warunków w wykorzystywanej dalej kolejności:

$$x_1 + 2x_2 + x_1^d = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_2^d = 9$$

$$20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1^d = 10$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d = 25$$

$$x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d \geq 0$$

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.2. Sformułowanie zadania zastępczego (1/1)

Zadanie zastępcze

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 + x_1^d &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_2^d &= 9 \\ 20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1^d + w_1 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d + w_2 &= 25 \\ x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pominięty warunek:

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

Pary zmiennych komplementarnych:

$$\begin{array}{ll} y_1 & \text{i} & x_1^d \\ y_1^d & \text{i} & x_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} y_2 & \text{i} & x_2^d \\ y_2^d & \text{i} & x_2 \end{array}$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (1/5)

Przebieg obliczeń

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	b
Baza	c_B	x₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	w ₁	w ₂	
x ₁ ^d	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	10
x ₂ ^d	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9
w ₁	1	20	4	0	0	1	1	-1	0	1	0	10
w ₂	1	4	2	0	0	2	1	0	-1	0	1	25
c _j - z _j		-24	-6	0	0	-3	-2	1	1	0	0	



6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (2/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	b
Baza	c_B	x ₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	w ₁	w ₂	
x ₁ ^d	0	0	1,8	1	0	-0,05	-0,05	0,05	0	-0,05	0	9,5
x ₂ ^d	0	0	0,8	0	1	-0,05	-0,05	0,05	0	-0,05	0	8,5
x ₁	0	1	0,2	0	0	0,05	0,05	-0,05	0	0,05	0	0,5
w ₂	1	0	1,2	0	0	1,8	0,8	0,2	-1	-0,2	1	23
c _j - z _j		0	-1,2	0	0	-1,8	-0,8	-0,2	1	1,2	0	



6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (3/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	b
Baza	c_B	x ₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	w ₁	w ₂	
x ₁ ^d	0	-9	0	1	0	-0,5	-0,5	0,5	0	-0,25	0	5
x ₂ ^d	0	-4	0	0	1	-0,25	-0,25	0,25	0	-0,25	0	6,5
x ₂	0	5	1	0	0	0,25	0,25	-0,25	0	0,25	0	2,5
w ₂	1	-6	0	0	0	1,5	0,5	0,5	-1	-0,5	1	20
c _j - z _j		6	0	0	0	-1,5	-0,5	-0,5	1	1,5	0	



6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (4/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$cx \rightarrow \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
y_1^d	0	-18	0	2	0	-1	-1	1	0	-1	0	10
x_2^d	0	0,5	0	-0,5	1	0	0	0	0	0	0	4
x_2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
w_2	1	3	0	-1	0	2	1	0	-1	0	1	15
$c_j - z_j$		-3	0	1	0	-2	-1	0	1	1	0	



6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.3. Rozwiązanie zadania zastępczego (5/5)

Przebieg obliczeń (c.d.)

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	b
Baza	c_B	x ₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	w ₁	w ₂	
y ₁ ^d	0	-16,5	0	1,5	0	0	-0,5	1	-0,5	-1	0,5	17,5
x ₂ ^d	0	0,5	0	-0,5	1	0	0	0	0	0	0	4
x ₂	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	5
y ₂	0	1,5	0	-0,5	0	1	0,5	0	-0,5	0	0,5	7,5
c _j - z _j		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Z twierdzenia Kuhna-Tuckera:

$x_1 = 0, x_2 = 5$ - rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania programowania kwadratowego

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.4. Przypadek ogólny (1/5)

Przykład 6.3

$$f(x_1, x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ -x_1 - x_2 &\leq -9 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Zadanie zastępcze

$$\begin{aligned}v_1 + w_1 + w_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 + x_1^d &= 10 \\ x_1 + x_2 - x_2^d + v_1 &= 9 \\ 20x_1 + 4x_2 + y_1 - y_2 - y_1^d + w_1 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2y_1 - y_2 - y_2^d + w_2 &= 25 \\ x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, v_1, w_1, w_2 &\geq 0\end{aligned}$$

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.4. Przypadek ogólny (2/5)

Iteracja 5

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	b
Baza	c _B	x ₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	v ₁	w ₁	w ₂	
x ₂	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
y ₁	0	1,5	0	-0,5	0	1	-0,5	0	-0,5	0	0	0,5	7,5
y ₁ ^d	0	-16,5	0	1,5	0	0	0,5	1	-0,5	0	-1	0,5	17,5
v ₁	1	0,5	0	-0,5	-1	0	0	0	0	1	0	0	4
c _j - z _j		-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1	1	



6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.4. Przypadek ogólny (3/5)

Iteracja 6

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	b
Baza	c _B	x ₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	v ₁	w ₁	w ₂	
x ₂	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
y ₁	0	-15	0	1	0	1	0	1	-1	0	-1	1	25
y ₂	0	-33	0	3	0	0	1	2	-1	0	-2	1	35
v ₁	1	0,5	0	-0,5	-1	0	0	0	0	1	0	0	4
c _j - z _j		-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1	1	



6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.4. Przypadek ogólny (4/5)

Iteracja 7

cx → min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	b
Baza	c_B	x ₁	x ₂	x ₁ ^d	x ₂ ^d	y ₁	y ₂	y ₁ ^d	y ₂ ^d	v ₁	w ₁	w ₂	
x ₂	0	0	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	1
y ₁	0	0	0	-14	-30	1	0	1	-1	30	-1	1	145
y ₂	0	0	0	-30	-66	0	1	2	-1	66	-2	1	299
x ₁	0	1	0	-1	-2	0	0	0	0	2	0	0	8
c_j - z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Z twierdzenia Kuhna-Tuckera:

$x_1 = 8, x_2 = 1$ - rozwiązanie optymalne wyjściowego zadania programowania kwadratowego

6.3. Metoda Wolfe'a

6.3.5. Reguły postępowania w metodzie Wolfe'a (1/1)

Algorytm

- 1.** Zapisanie warunków Kuhna-Tuckera.
- 2.** Zapisanie zadania zastępczego:
 - a) zmienne sztuczne typu w ,
 - b) zmienne sztuczne typu v .
- 3.** Rozwiązanie zadania zastępczego:
 - a) wybór zmiennej kandydującej do bazy,
 - b) sprawdzenie, czy wybór zmiennej kandydującej był właściwy,
 - c) wybór zmiennej usuwanej z bazy,
 - d) badanie niesprzeczności zadania.
- 4.** Odczytanie rozwiązania zadania wyjściowego.

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.1. Oczekiwana stopa zysku i ryzyko portfela (1/2)

Podstawowe pojęcia

Określić taki skład portfela, złożonego z akcji n spółek, by zminimalizować ryzyko portfela, przy założonym z góry poziomie oczekiwanego zwrotu.

Stopa zwrotu
z i -tej akcji w okresie t
($t = 1, \dots, T$)

$$R_i(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}$$

Oczekiwana stopa zwrotu
z i -tej akcji

$$R_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_i(t)$$

Udziały akcji w portfelu

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0$$

Oczekiwana stopa zwrotu
portfela akcji

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i x_i$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.1. Oczekiwana stopa zysku i ryzyko portfela (2/2)

Podstawowe pojęcia (c.d.)

Ryzyko (wariancja) portfela

$$v_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j S_i S_j r_{ij}$$

Odchylenie standardowe stopy zwrotu

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_i(t) - R_i)^2}$$

Współczynnik korelacji

$$r_{ij} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_i(t) - R_i)(R_j(t) - R_j)}{S_i S_j} = \frac{\text{cov}(R_i, R_j)}{S_i S_j}$$

Zmodyfikowany wzór na wariancję portfela

$$v_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j)$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (1/7)

Sformułowanie zadania

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n R_i x_i \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\mathbf{O}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \rightarrow \max$$

$$\mathbf{R} \mathbf{x} \geq R_0$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, n$$

\mathbf{V} – macierz wariancji i kowariancji ($V = [\text{cov}(R_i, R_j)]$),

$$\mathbf{R} = [R_1, \dots, R_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (2/7)

Przykład 6.4

Notowania				
Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
53.60	15.20	273.00	26.90	67.50
52.00	15.75	283.00	27.20	66.00
51.00	15.50	275.50	27.80	66.50
52.30	15.50	270.00	29.30	65.70
54.60	15.25	274.50	31.40	68.00
58.30	15.20	290.00	29.80	69.00
61.00	15.50	283.50	28.70	70.00
61.90	15.50	281.00	29.00	69.00
61.90	16.00	286.00	28.90	68.30
59.40	16.00	286.00	29.80	68.10
64.20	16.50	285.00	33.00	68.80
66.60	16.90	272.00	32.70	71.50
65.70	17.70	270.50	34.30	75.30
64.30	17.20	265.00	34.50	73.90
64.30	17.30	267.00	34.00	74.00
66.20	17.20	263.50	33.30	72.30
67.60	18.60	265.00	32.90	72.40
67.10	18.50	268.00	32.80	72.20
65.10	17.95	270.00	31.30	71.40
65.00	18.50	269.50	29.10	72.10
64.00	19.15	270.50	31.00	73.50

Oczekiwane stopy zysku z akcji w okresie t w %				
Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
-2.99	3.62	3.66	1.12	-2.22
-1.92	-1.59	-2.65	2.21	0.76
2.55	0.00	-2.00	5.40	-1.20
4.40	-1.61	1.67	7.17	3.50
6.78	-0.33	5.65	-5.10	1.47
4.63	1.97	-2.24	-3.69	1.45
1.48	0.00	-0.88	1.05	-1.43
0.00	3.23	1.78	-0.34	-1.01
-4.04	0.00	0.00	3.11	-0.29
8.08	3.13	-0.35	10.74	1.03
3.74	2.42	-4.56	-0.91	3.92
-1.35	4.73	-0.55	4.89	5.31
-2.13	-2.82	-2.03	0.58	-1.86
0.00	0.58	0.75	-1.45	0.14
2.95	-0.58	-1.31	-2.06	-2.30
2.11	8.14	0.57	-1.20	0.14
-0.74	-0.54	1.13	-0.30	-0.28
-2.98	-2.97	0.75	-4.57	-1.11
-0.15	3.06	-0.19	-7.03	0.98
-1.54	3.51	0.37	6.53	1.94

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (3/7)

Obliczenia pomocnicze

<u>Oczekiwane stopy zysku z akcji w %</u>					
R_i	Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
	0.94	1.20	-0.02	0.81	0.45

<u>Macierz wariancji-kowariancji stóp zysku</u>					
	Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
Spółka 1	11.4312	1.1701	0.1232	1.6619	2.0254
Spółka 2	1.1701	7.7723	0.4983	1.1374	1.7056
Spółka 3	0.1232	0.4983	5.1598	-1.3094	-0.6307
Spółka 4	1.6619	1.1374	-1.3094	20.2858	2.2824
Spółka 5	2.0254	1.7056	-0.6307	2.2824	4.3189

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (4/7)

Model matematyczny

Cel

Znalezienie portfela akcji minimalizującego ryzyko o zadanej oczekiwanej stopie zysku.

Zmienne decyzyjne

x_1 – udział w portfelu akcji spółki 1,

x_2 – udział w portfelu akcji spółki 2,

x_3 – udział w portfelu akcji spółki 3,

x_4 – udział w portfelu akcji spółki 4,

x_5 – udział w portfelu akcji spółki 5,

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (5/7)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \cdot \mathbf{V} \cdot [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \rightarrow \min$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 11.4312 & 1.1701 & 0.1232 & 1.6619 & 2.0254 \\ 1.1701 & 7.7723 & 0.4983 & 1.1374 & 1.7056 \\ 0.1232 & 0.4983 & 5.1598 & -1.3094 & -0.6307 \\ 1.6619 & 1.1374 & -1.3094 & 20.2858 & 2.2824 \\ 2.0254 & 1.7056 & -0.6307 & 2.2824 & 4.3189 \end{bmatrix}$$

Ograniczenia

oczekiwany zysk z portfela ma być większy od 1%, czyli:

$$0,94x_1 + 1,20x_2 - 0,02x_3 + 0,81x_4 + 0,45x_5 \geq 1$$

udziały akcji w portfelu sumują się do jedności:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

warunki nieujemności:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (6/7)

Rozwinięta postać zadania

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11,4312 & 1,1701 & 0,1232 & 1,6619 & 2,0254 \\ 1,1701 & 7,7723 & 0,4983 & 1,1374 & 1,7056 \\ 0,1232 & 0,4983 & 5,1598 & -1,3094 & -0,6307 \\ 1,6619 & 1,1374 & -1,3094 & 20,2858 & 2,2824 \\ 2,0254 & 1,7056 & -0,6307 & 2,2824 & 4,3189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \rightarrow \max$$

przy warunkach ograniczających:

$$-0,94x_1 - 1,20x_2 + 0,02x_3 - 0,81x_4 - 0,45x_5 \leq -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.2. Optymalizacja portfela akcji jako zadanie programowania kwadratowego (7/7)

Rozwiązanie i interpretacja

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 0,2468 \quad x_2 = 0,5391 \quad x_3 = 0,0285 \quad x_4 = 0,1060 \quad x_5 = 0,0797$$

Interpretacja rozwiązania

Optymalny portfel, dla którego stopa oczekiwanego zysku jest nie mniejsza niż 1% będzie się składał (w ujęciu wartościowym) w 24,68% z akcji spółki 1, w 53,91% z akcji spółki 2, w 2,85% z akcji spółki 3, w 10,6% z akcji spółki 4 i w 7,97% akcji spółki 5. Ryzyko takiego portfela wynosi $\sqrt{2} \approx 1,41$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (1/5)

Przykład 6.4

Cel

Szukamy takiego portfela akcji, dla którego ryzyko jest minimalne, a oczekiwany zysk portfela – maksymalny.

Zmienne decyzyjne

x_1 – udział w portfelu akcji spółki 1,

x_2 – udział w portfelu akcji spółki 2,

x_3 – udział w portfelu akcji spółki 3,

x_4 – udział w portfelu akcji spółki 4,

x_5 – udział w portfelu akcji spółki 5,

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (2/5)

Model matematyczny

Funkcje celu

Minimalizacja ryzyka portfela

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11,4312 & 1,1701 & 0,1232 & 1,6619 & 2,0254 \\ 1,1701 & 7,7723 & 0,4983 & 1,1374 & 1,7056 \\ 0,1232 & 0,4983 & 5,1598 & -1,3094 & -0,6307 \\ 1,6619 & 1,1374 & -1,3094 & 20,2858 & 2,2824 \\ 2,0254 & 1,7056 & -0,6307 & 2,2824 & 4,3189 \end{bmatrix} [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \rightarrow \min$$

Maksymalizacja oczekiwanej stopy zysku portfela:

$$0,94x_1 + 1,2x_2 - 0,02x_3 + 0,81x_4 + 0,45x_5 \rightarrow \max$$

Ograniczenia

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (3/5)

Metoda satysfakcjonującego poziomu kryteriów

Funkcja celu

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11,4312 & 1,1701 & 0,1232 & 1,6619 & 2,0254 \\ 1,1701 & 7,7723 & 0,4983 & 1,1374 & 1,7056 \\ 0,1232 & 0,4983 & 5,1598 & -1,3094 & -0,6307 \\ 1,6619 & 1,1374 & -1,3094 & 20,2858 & 2,2824 \\ 2,0254 & 1,7056 & -0,6307 & 2,2824 & 4,3189 \end{bmatrix} [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \rightarrow \min$$

Ograniczenia

$$-0,94x_1 - 1,20x_2 + 0,02x_3 - 0,81x_4 - 0,45x_5 \leq -R_0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (4/5)

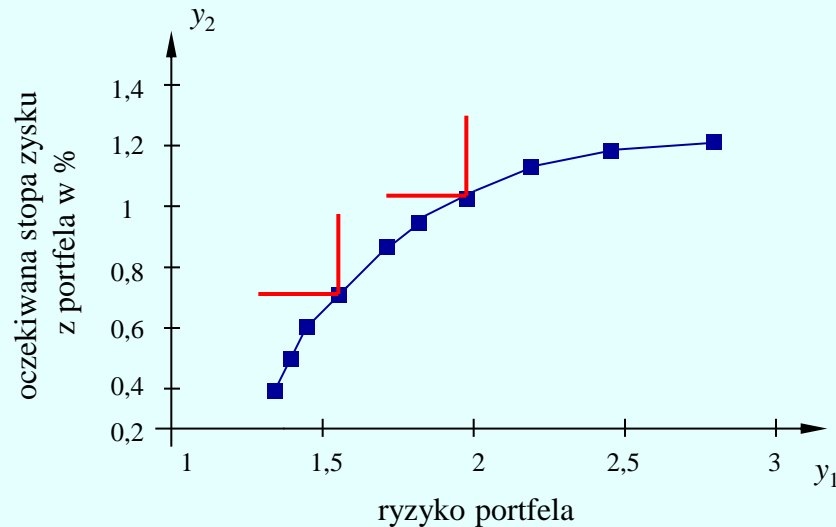
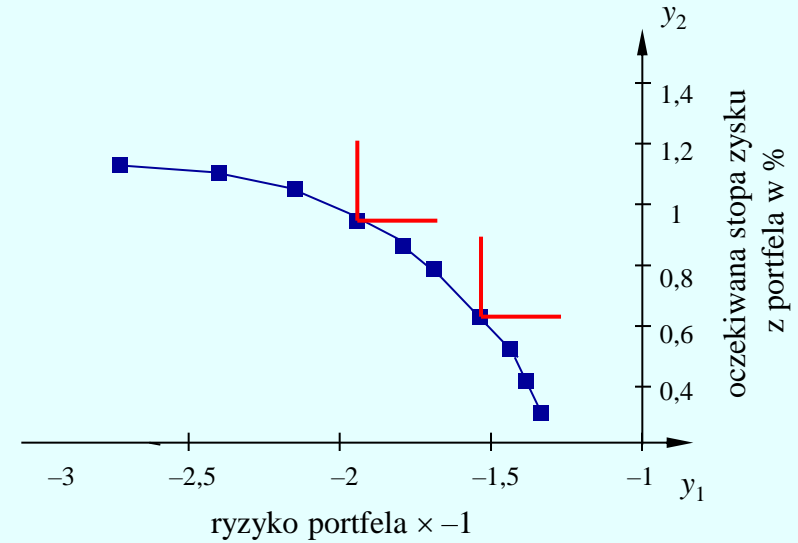
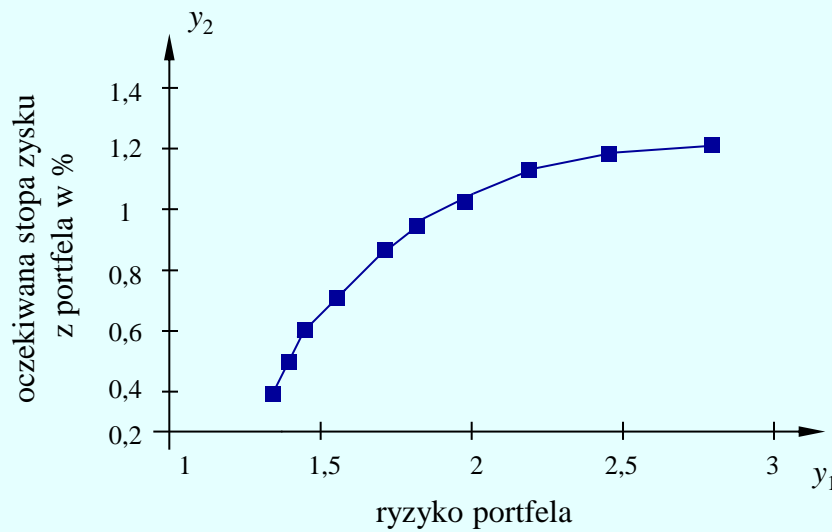
Wyniki obliczeń

Parametry portfeli wyznaczonych dla założonych wartości R_0							
Lp	R_0	V_p	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P ₁	1.2	2.79	0	1	0	0	0
P ₂	1.15	2.42	0.1841	0.8104	0	0.0054	0
P ₃	1.1	2.20	0.2527	0.6594	0	0.0879	0
P ₄	1.0	2.00	0.2468	0.5391	0.0285	0.1060	0.0797
P ₅	0.9	1.83	0.2171	0.4671	0.0897	0.0986	0.1275
P ₆	0.8	1.67	0.1874	0.3951	0.1510	0.0911	0.1754
P ₇	0.7	1.53	0.1577	0.3231	0.2122	0.0837	0.2233
P ₈	0.6	1.43	0.1280	0.2511	0.2734	0.0763	0.2711
P ₉	0.5	1.36	0.0984	0.1791	0.3347	0.0689	0.3190
P ₁₀	0.4	1.34	0.0687	0.1071	0.3959	0.0615	0.3668

6.4. Optymalny portfel akcji

6.4.3. Dwukryterialne zadanie poszukiwania optymalnego portfela akcji (5/5)

Granica efektywna



Pora na relaks

