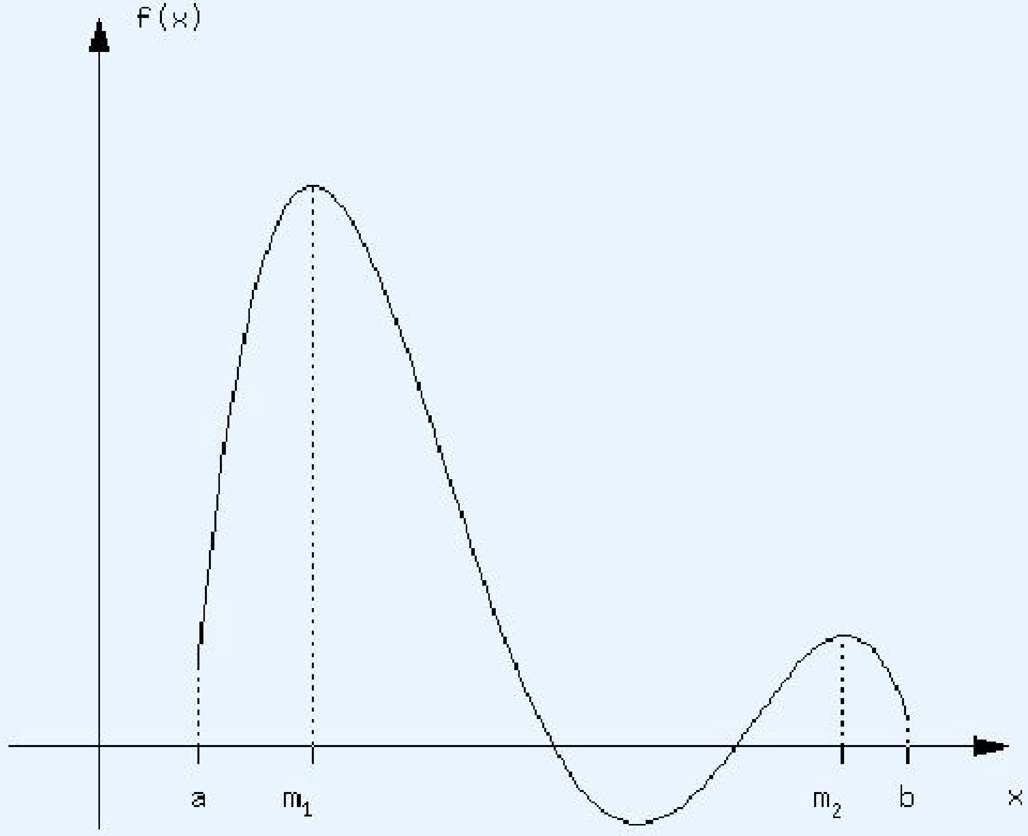
Квадратичное программирование

Т. Тжаскалик

Введение в исследование операций

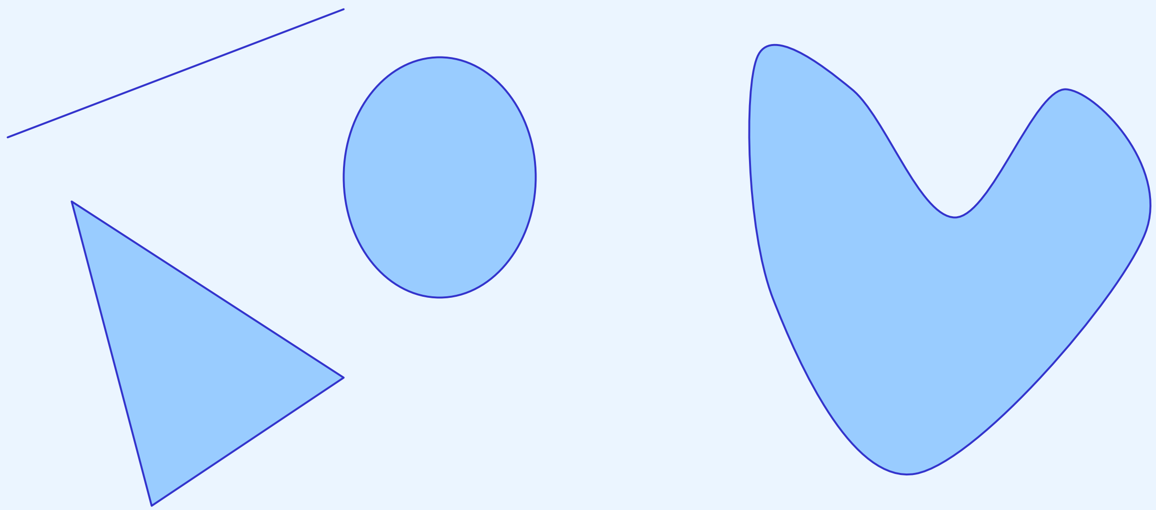
с применением компьютера

Глобальные и локальные экстремумы



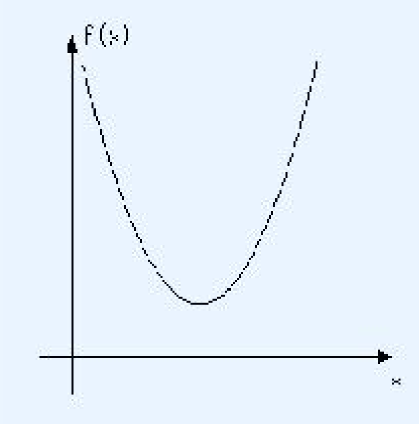
Выпуклые множества

$$\forall x, y \in C \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

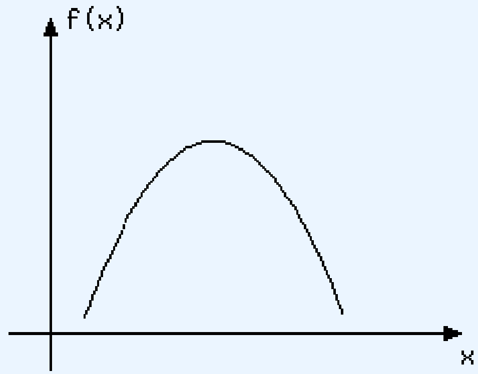


Выпуклые множества   Невыпуклое множество

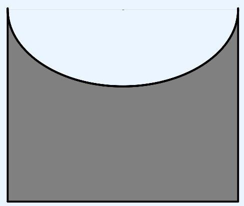
Выпуклые функции (1)

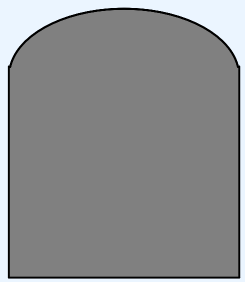


выпуклая функция



вогнутая функция


вогнутая
форма


Выпуклая
форма

Выпуклые функции (2)

Определения

выпуклая функция:

$$\forall x, y \in W, \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

вогнутая функция:

$$f \text{ вогнутая} \Leftrightarrow -f \text{ выпуклая}$$

Линейная функция:

$$\alpha(x) = p^T x + q = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + q$$

Квадратичная форма:

$$\beta(x) = x^T C x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

Теорема 6.1:

Квадратичная форма является выпуклой (вогнутой) функцией тогда и только тогда, когда матрица формы C является неотрицательно (неположительно) определенной.

Выпуклые функции (3)

Квадратичная функция:

$$H(x) = p^T x - x^T C x$$

Теорема 6.2:

Функция f, имеющая на выпуклом открытом множестве W частные производные второго порядка, является выпуклой (вогнутой) на этом множестве тогда и только тогда, когда для любого $x \in W$ матрица вторых производных функции $\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \, \partial x_j} \right)$ является

неотрицательно (неположительно) определенной.

Задача выпуклого программирования (1)

Постановка задачи

$$f(x) \to \max$$
$$g_1(x) \geq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g_m(x) \geq 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_m(x) \end{bmatrix}$$

$$f(x) \to \max$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0$$

Представленная задача является задачей выпуклого программирования, если f и все g_i являются **вогнутыми** функциями.

Задача выпуклого программирования (2)

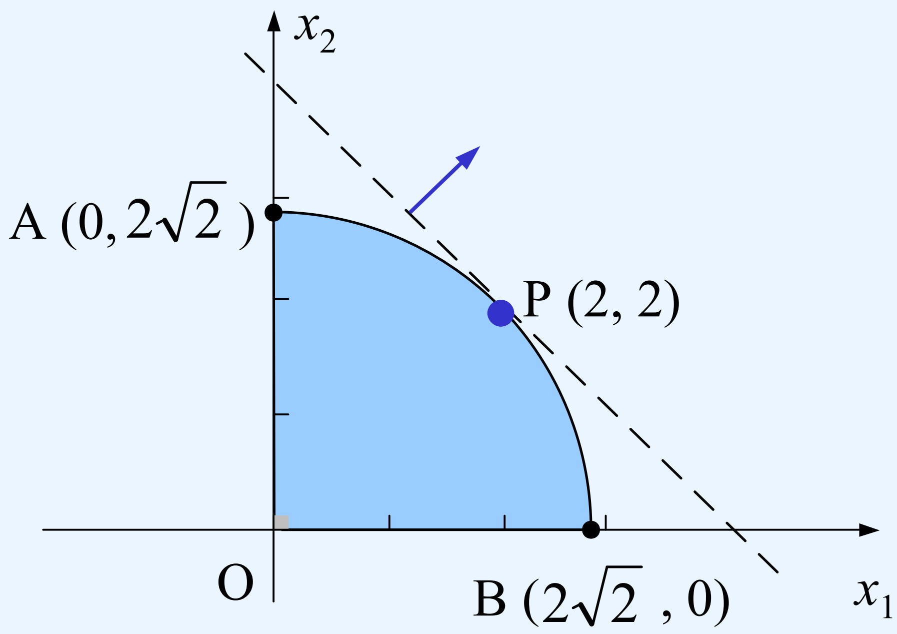
Пример 6.1

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$



Функция Лагранжа

$$f(x) \to \max$$
$$g(x) \geq 0$$

$$L(x, y) = f(x) + yg(x)$$
$$y = [y_1, \ldots, y_m]$$

$$L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{u=1}^{m} y_u g_u(x_1, \ldots, x_n)$$

Условия Куна-Такера (1)

Формулировки условий

Условие 1 $\nabla_x L(x,y)=0 \quad \nabla_x L(x,y)=\left[\frac{\partial L(x,y)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial L(x,y)}{\partial x_n}\right]$

Условие 2 $yg(x)=0$

Условие 3 $g(x)\ge 0$

Условие 4 $y\ge 0$

Условие Слейтера

Теорема 6.3:

Задача выпуклого программирования и задача Куна-Такера, описанные условиями 1 – 4, являются тождественными.

Условия Куна-Такера (2)

Пример 6.1

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1 + x_2 + y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2 x_1 + y_3 x_2$$

Условие 1:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1 x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1 x_2 + y_3 = 0$$

Условие 2:

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2 x_1 + y_3 x_2 = 0$$

Условие 3:

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Условие 4:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Условия Куна-Такера (3)

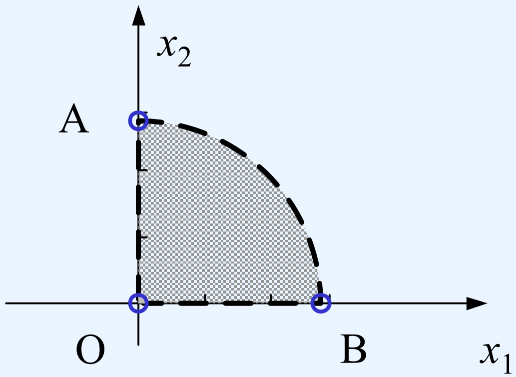
Декомпозиция множества допустимых решений на подмножества

Подмножество 1

$g_1 > 0$

$g_2 > 0$

$g_3 > 0$

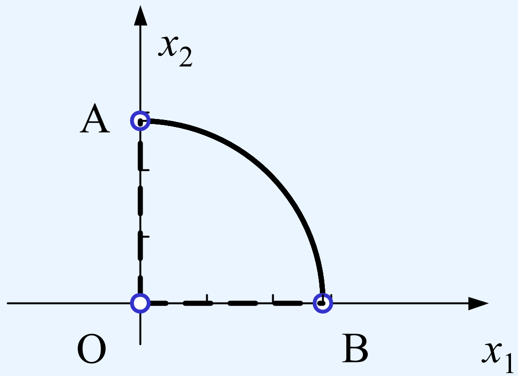


Подмножество 2

$g_1 = 0$

$g_2 > 0$

$g_3 > 0$

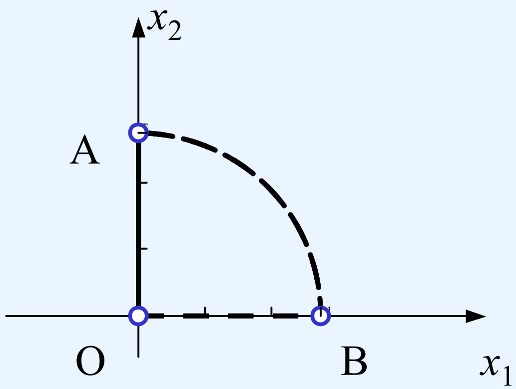


Подмножество 3

$g_1 > 0$

$g_2 = 0$

$g_3 > 0$

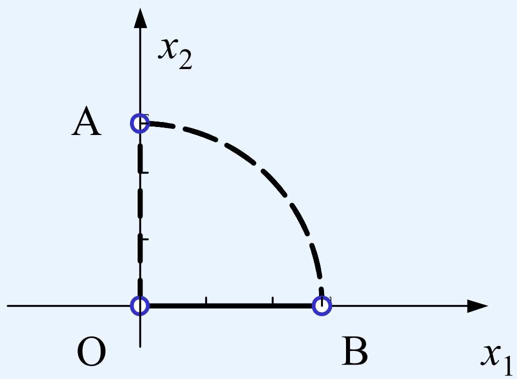


Подмножество 4

$g_1 > 0$

$g_2 > 0$

$g_3 = 0$



Условия Куна-Такера (4)

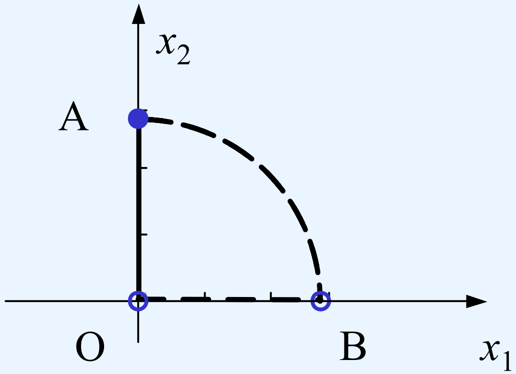
Декомпозиция множества допустимых решений на подмножества

Подмножество 5

$g_1 = 0$

$g_2 = 0$

$g_3 > 0$

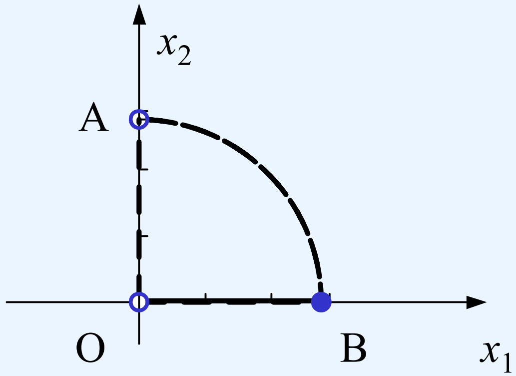


Подмножество 6

$g_1 = 0$

$g_2 > 0$

$g_3 = 0$

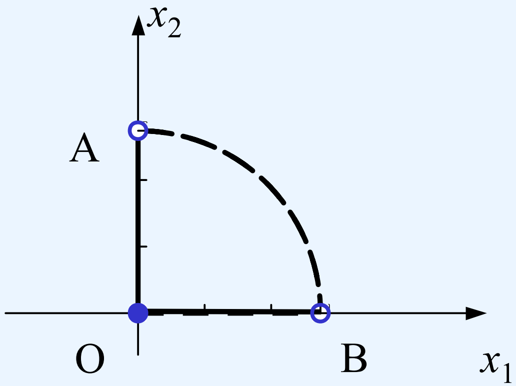


Подмножество 7

$g_1 > 0$

$g_2 = 0$

$g_3 = 0$



Подмножество 8

$g_1 = 0$

$g_2 = 0$

$g_3 = 0$

Пустое множество

Условия Куна-Такера (5)

Условие 1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Условие 2

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Условие 3

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Условие 4

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Подмножество 1

$$g_1 > 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$

из условия 2 следует, следует

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$$

Вставляем эти значения в условие 1

$$1 - 2 \cdot 0 \cdot x_1 + 0 = 0$$

$$1 - 2 \cdot 0 \cdot x_2 + 0 = 0$$

т.е.: 1 = 0 - **противоречие**

Условия Куна-Такера (6)

Условие 1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 2y_1x_1 + y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2y_1x_2 + y_3 = 0$$

Условие 2

$$y_1(8 - x_1^2 - x_2^2) + y_2x_1 + y_3x_2 = 0$$

Условие 3

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

Условие 4

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Подмножество 2

$$g_1 = 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$

Из условия 2 следует, что

$$y_2 = 0, y_3 = 0$$

Вставляем эти значения в условие 1

$$1 - 2y_1x_1 + 0 = 0$$

$$1 - 2y_1x_2 + 0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2y_1}, x_2 = \frac{1}{2y_1}$$

$$8 - \frac{1}{(2y_1)^2} - \frac{1}{(2y_1)^2} = 0$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ y_1 = 0{,}25,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0$$

Задача квадратичного программирования

Постановка задачи

$$p^T x - x^T C x \to \max$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

C – неотрицательно определенная матрица

Пример 6.2.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 &\le 10 \\
x_1 + x_2 &\le 9 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

$$p = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Метод Вольфа (1)

Преобразование ограничений

$$f(x) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{lcl}
x_1 + 2x_2 \le 10 & \rightarrow & g_1(x) = 10 - x_1 - 2x_2 \ge 0 \\
x_1 + x_2 \le 9 & \rightarrow & g_2(x) = 9 - x_1 - x_2 \ge 0 \\
x_1 \ge 0 & \rightarrow & g_3(x) = x_1 \ge 0 \\
x_2 \ge 0 & \rightarrow & g_4(x) = x_2 \ge 0
\end{array}$$

$$y = \left[y_1, y_2, y_1^d, y_2^d\right]$$

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d) = {} & 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + \\
& + y_1(10 - x_1 - 2x_2) + y_2(9 - x_1 - x_2) + y_1^d x_1 + y_2^d x_2
\end{aligned}$$

Метод Вольфа (2)

Условия Куна-Такера

Условие 1

$$20x_1 + 4x_2 + \quad y_1 + y_2 - y_1^d = 10$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2^d = 25$$

Условие 2

$$y_1 x_1{}^d + y_2 x_2{}^d + y_1{}^d x_1 + y_2{}^d x_2 = 0$$

Условие 3

$$x_1 + 2x_2 + x_1{}^d \qquad = 10$$
$$x_1 + \quad x_2 \qquad + x_2{}^d = \ 9$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Условие 4

$$y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0, \qquad y_1{}^d \geq 0, \qquad y_2{}^d \geq 0$$

Замещающая задача

$$w_1 + w_2 \to \min$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_1^d \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 10 \\
x_1 + x_2 \qquad + x_2^d \qquad\qquad\qquad\qquad &= 9 \\
20x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + y_1 + y_2 - y_1^d \qquad + w_1 &= 10 \\
4x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 2y_1 + y_2 \qquad - y_2^d \quad + w_2 &= 25
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, w_1, w_2 \ge 0$$

Игнорируемое условие:

$$y_1 x_1^d + y_2 x_2^d + y_1^d x_1 + y_2^d x_2 = 0$$

Пары комплементраных переменных:

y_1 и x_1^d $\qquad$ y_2 и x_2^d

y_1^d и x_1 $\qquad$ y_2^d и x_2

Процесс вычислений (1)

Итерация 1

cx→min		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	$x_1{}^d$	$x_2{}^d$	y_1	y_2	$y_1{}^d$	$y_2{}^d$	w_1	w_2	
$x_1{}^d$	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	10
$x_2{}^d$	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9
w_1	1	20	4	0	0	1	1	-1	0	1	0	10
w_2	1	4	2	0	0	2	1	0	-1	0	1	25
$c_j - z_j$		-24	-6	0	0	-3	-2	1	1	0	0	

Процесс вычислений (2)

Итерация 2

$cx \to min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
x_1^d	0	0	1,8	1	0	-0,05	-0,05	0,05	0	-0,05	0	9,5
x_2^d	0	0	0,8	0	1	-0,05	-0,05	0,05	0	-0,05	0	8,5
x_1	0	1	0,2	0	0	0,05	0,05	-0,05	0	0,05	0	0,5
w_2	1	0	1,2	0	0	1,8	0,8	0,2	-1	-0,2	1	23
$c_j - z_j$		0	-1,2	0	0	-1,8	-0,8	-0,2	1	1,2	0	

Процесс вычислений (3)

Итерация 3

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
x_1^d	0	-9	0	1	0	-0,5	-0,5	0,5	0	-0,25	0	5
x_2^d	0	-4	0	0	1	-0,25	-0,25	0,25	0	-0,25	0	6,5
x_2	0	5	1	0	0	0,25	0,25	-0,25	0	0,25	0	2,5
w_2	1	-6	0	0	0	1,5	0,5	0,5	-1	-0,5	1	20
$c_j - z_j$		6	0	0	0	-1,5	-0,5	-0,5	1	1,5	0	

Процесс вычислений (4)

Итерация 4

$cx \to min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
y_1^d	0	-18	0	2	0	-1	-1	1	0	-1	0	10
x_2^d	0	0,5	0	-0,5	1	0	0	0	0	0	0	4
x_2	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
w_2	1	3	0	-1	0	2	1	0	-1	0	1	15
$c_j - z_j$		-3	0	1	0	-2	-1	0	1	1	0	

Процесс вычислений (5)

Итерация 5

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	w_1	w_2	
y_1^d	0	-16,5	0	1,5	0	0	-0,5	1	-0,5	-1	0,5	17,5
x_2^d	0	0,5	0	-0,5	1	0	0	0	0	0	0	4
x_2	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	5
y_2	1	1,5	0	-0,5	0	1	0,5	0	-0,5	0	0,5	7,5
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Из теоремы Куна-Такера следует:

$x_1 = 0,\ x_2 = 5$ - оптимальное решение исходной задачи квадратичного программирования

Искусственная переменная типа *v* (1)

Пример 6.3

$$f(x_1,x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ -x_1 - x_2 &\le -9 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Замещающая задача

$$v_1 + w_1 + w_2 \to \min$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_1^d & & = 10 \\ x_1 + x_2 - x_2^d & + v_1 & = 9 \\ 20x_1 + 4x_2 + y_1 - y_2 - y_1^d & + w_1 & = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2y_1 - y_2 - y_2^d & + w_2 & = 25 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_1^d, x_2^d, y_1, y_2, y_1^d, y_2^d, v_1, w_1, w_2 \ge 0$$

Искусственная переменная типа *v* (2)

Итерация 5

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	v_1	w_1	w_2	
x_2	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
y_1	0	1,5	0	-0,5	0	1	-0,5	0	-0,5	0	0	0,5	7,5
y_1^d	0	-16,5	0	1,5	0	0	0,5	1	-0,5	0	-1	0,5	17,5
v_1	1	0,5	0	-0,5	-1	0	0	0	0	1	0	0	4
$c_j - z_j$		-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1	1	

Искусственная переменная типа *v* (3)

Итерация 6

$cx \rightarrow \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	v_1	w_1	w_2	
x_2	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
y_1	0	-15	0	1	0	1	0	1	-1	0	-1	1	25
y_2	0	-33	0	3	0	0	1	2	-1	0	-2	1	35
v_1	1	0,5	0	-0,5	-1	0	0	0	0	1	0	0	4
$c_j - z_j$		-0,5	0	0,5	1	0	0	0	0	0	1	1	

Искусственная переменная типа *v* (4)

Итерация 7

$cx \to \min$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	**b**
Базис	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_1^d	x_2^d	y_1	y_2	y_1^d	y_2^d	v_1	w_1	w_2	
x_2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	1
y_1	0	0	0	-14	-30	1	0	1	-1	30	-1	1	145
y_2	0	0	0	-30	-66	0	1	2	-1	66	-2	1	299
x_1	0	1	0	-1	-2	0	0	0	0	2	0	0	8
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Из теоремы Куна-Такера следует:

$x_1 = 8$, $x_2 = 1$ - оптимальное решение исходной задачи квадратичного программирования

Общий случай

Пример 6.4

$$f(x_1,x_2) = 10x_1 - 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ -x_1 - \ x_2 &\le -9 \\ x_1 \qquad &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Замещающая задача

$$v_1 + \ w_1 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_1^d &= 10 \\ x_1 + \ x_2 \quad - x_2^d \qquad + v_1 &= \ 9 \\ 20x_1 + 4x_2 \quad + \ y_1 - y_2 - y_1^d \qquad + w_1 &= 10 \\ -4x_1 - 2x_2 \quad - 2y_1 + y_2 \quad + y_2^d &= 25 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_1^d,\ x_2^d,\ y_1,\ y_2,\ y_1^d,\ y_2^d,\ v_1,\ w_1 \ge 0$$

Алгоритм Вольфа

1. Записать условия Куна-Такера.

2. Записать замещающую задачу:

a) искусственные переменные типа *w*,
b) искусственные переменные типа *v*,

3. Решить замещающую задачу:

a) выбор переменной, вводимой в базис,

b) Проверка корректности выбора переменной

c) выбор переменной, выводимой из базиса,

d) исследование непротиворечивости задачи.

4. Получение решения исходной задачи.

Оптимальный портфель акций (1)

Постановка задачи

Определить структуру портфеля, состоящего из акций n обществ, которая минимизирует портфельный риск при априори заданном уровне ожидаемого риска.

Норма прибыли от i-й акции в период t ($t = 1, ..., T$)

$$R_i(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}$$

Ожидаемая норма прибыли от i-й акции

$$R_i = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^{T} R_i(t)$$

Доли акций в портфеле

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad x_i \ge 0$$

Ожидаемая норма прибыли портфеля акций

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$$

Оптимальный портфель акций (2)

Постановка задачи (продолжение)

Риск (дисперсия) портфеля

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j S_i S_j r_{ij}$$

Стандартное отклонение нормы прибыли

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(R_i(t) - R_i\right)^2}$$

Коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(R_i(t) - R_i\right)\left(R_j(t) - R_j\right)}{S_i S_j} = \frac{\mathrm{cov}\left(R_i, R_j\right)}{S_i S_j}$$

Модифицированная формула для расчета дисперсии портфеля

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \,\mathrm{cov}(R_i, R_j)$$

Оптимальный портфель акций (3)

Постановка задачи (продолжение)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j v_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i x_i \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$x_i \geq 0$ для $u = 1, ..., n$

$$\boldsymbol{O^T x} - \boldsymbol{x^T V x} \to \max$$

$$\boldsymbol{Rx} \geq \boldsymbol{R_O}$$

$$\boldsymbol{1^T x} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{V}$ – матрица дисперсии и ковариации ($V = [\mathrm{cov}(R_i, R_j)]$),

$$\boldsymbol{R} = [R_1, ..., R_n], \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ : \\ 1 \end{bmatrix}$$

Оптимальный портфель акций (4)

Пример 6.4

Котировки				
Общество 1	Общество 2	Общество 3	Общество 4	Общество 5
53.60	15.20	273.00	26.90	67.50
52.00	15.75	283.00	27.20	66.00
51.00	15.50	275.50	27.80	66.50
52.30	15.50	270.00	29.30	65.70
54.60	15.25	274.50	31.40	68.00
58.30	15.20	290.00	29.80	69.00
61.00	15.50	283.50	28.70	70.00
61.90	15.50	281.00	29.00	69.00
61.90	16.00	286.00	28.90	68.30
59.40	16.00	286.00	29.80	68.10
64.20	16.50	285.00	33.00	68.80
66.60	16.90	272.00	32.70	71.50
65.70	17.70	270.50	34.30	75.30
64.30	17.20	265.00	34.50	73.90
64.30	17.30	267.00	34.00	74.00
66.20	17.20	263.50	33.30	72.30
67.60	18.60	265.00	32.90	72.40
67.10	18.50	268.00	32.80	72.20
65.10	17.95	270.00	31.30	71.40
65.00	18.50	269.50	29.10	72.10
64.00	19.15	270.50	31.00	73.50

Ожидаемые нормы прибыли от акций в период t %				
Общество 1	Общество 2	Общество 3	Общество 4	Общество 5
-2.99	3.62	3.66	1.12	-2.22
-1.92	-1.59	-2.65	2.21	0.76
2.55	0.00	-2.00	5.40	-1.20
4.40	-1.61	1.67	7.17	3.50
6.78	-0.33	5.65	-5.10	1.47
4.63	1.97	-2.24	-3.69	1.45
1.48	0.00	-0.88	1.05	-1.43
0.00	3.23	1.78	-0.34	-1.01
-4.04	0.00	0.00	3.11	-0.29
8.08	3.13	-0.35	10.74	1.03
3.74	2.42	-4.56	-0.91	3.92
-1.35	4.73	-0.55	4.89	5.31
-2.13	-2.82	-2.03	0.58	-1.86
0.00	0.58	0.75	-1.45	0.14
2.95	-0.58	-1.31	-2.06	-2.30
2.11	8.14	0.57	-1.20	0.14
-0.74	-0.54	1.13	-0.30	-0.28
-2.98	-2.97	0.75	-4.57	-1.11
-0.15	3.06	-0.19	-7.03	0.98
-1.54	3.51	0.37	6.53	1.94

Оптимальный портфель акций (5)

Ожидаемые нормы прибыли от акций в %					
	Общество 1	Общество 2	Общество 3	Общество 4	Общество 5
R_i	0.94	1.20	-0.02	0.81	0.45

Матрица дисперсии и ковариации норм прибыли					
	Общество 1	Общество 2	Общество 3	Общество 4	Общество 5
Общество 1	11.4312	1.1701	0.1232	1.6619	2.0254
Общество 2	1.1701	7.7723	0.4983	1.1374	1.7056
Общество 3	0.1232	0.4983	5.1598	-1.3094	-0.6307
Общество 4	1.6619	1.1374	-1.3094	20.2858	2.2824
Общество 5	2.0254	1.7056	-0.6307	2.2824	4.3189

Оптимальный портфель акций (6)

Цель

Найти структуру портфеля акций, минимизирующего риск при заданной ожидаемой норме прибыли.

Решающие переменные

x_1 – доля в портфеле акций общества 1,

x_2 – доля в портфеле акций общества 2,

x_3 – доля в портфеле акций общества 3,

x_4 – доля в портфеле акций общества 4,

x_5 – доля в портфеле акций общества 5,

Оптимальный портфель акций (7)

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \cdot \boldsymbol{V} \cdot [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \rightarrow \min$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 11.4312 & 1.1701 & 0.1232 & 1.6619 & 2.0254 \\ 1.1701 & 7.7723 & 0.4983 & 1.1374 & 1.7056 \\ 0.1232 & 0.4983 & 5.1598 & -1.3094 & -0.6307 \\ 1.6619 & 1.1374 & -1.3094 & 20.2858 & 2.2824 \\ 2.0254 & 1.7056 & -0.6307 & 2.2824 & 4.3189 \end{bmatrix}$$

Ограничения

Ожидаемая портфельная прибыль должна быть не менее 1%, т.е.:

$$0{,}94x_1 + 1{,}20x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}81x_4 + 0{,}45x_5 \geq 1$$

Сумма долей акций в портфеле равна единице:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

Условия неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Оптимальный портфель акций (8)

Расширенная форма задачи

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$

$$-[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11{,}4312 & 1{,}1701 & 0{,}1232 & 1{,}6619 & 2{,}0254 \\ 1{,}1701 & 7{,}7723 & 0{,}4983 & 1{,}1374 & 1{,}7056 \\ 0{,}1232 & 0{,}4983 & 5{,}1598 & -1{,}3094 & -0{,}6307 \\ 1{,}6619 & 1{,}1374 & -1{,}3094 & 20{,}2858 & 2{,}2824 \\ 2{,}0254 & 1{,}7056 & -0{,}6307 & 2{,}2824 & 4{,}3189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to \max$$

при ограничениях:

$$-0{,}94x_1 - 1{,}20x_2 + 0{,}02\, x_3 - 0{,}81x_4 - 0{,}45x_5 \le -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \le -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Оптимальный портфель акций (9)

Оптимальное решение

$$x_1 = 0{,}2468 \quad x_2 = 0{,}5391 \quad x_3 = 0{,}0285 \quad x_4 = 0{,}1060 \quad x_5 = 0{,}0797$$

Интерпретация решения

Оптимальный портфель, для которого норма ожидаемой прибыли составляет не менее 1%, будет состоять (в стоимостном выражении) на 24,68% из акций общества 1, на 53,91% из акций общества 2, на 2,85% из акций общества 3, на 10,6% из акций общества 4 и на 7,97% из акций общества 5. Риск такого портфеля равен $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

Оптимизация портфеля акций как двухкритериальная задача (1)

Пример 6.4

Цель

Ищем портфель акций с минимальным риском и максимальной ожидаемой прибылью.

Решающие переменные

x_1 – доля в портфеле акций общества 1,

x_2 – доля в портфеле акций общества 2,

x_3 – доля в портфеле акций общества 3,

x_4 – доля в портфеле акций общества 4,

x_5 – доля в портфеле акций общества 5,

Оптимизация портфеля акций как двухкритериальная задача (2)

Целевые функции

Минимизация портфельного риска

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11{,}4312 & 1{,}1701 & 0{,}1232 & 1{,}6619 & 2{,}0254 \\ 1{,}1701 & 7{,}7723 & 0{,}4983 & 1{,}1374 & 1{,}7056 \\ 0{,}1232 & 0{,}4983 & 5{,}1598 & -1{,}3094 & -0{,}6307 \\ 1{,}6619 & 1{,}1374 & -1{,}3094 & 20{,}2858 & 2{,}2824 \\ 2{,}0254 & 1{,}7056 & -0{,}6307 & 2{,}2824 & 4{,}3189 \end{bmatrix} [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \to \min$$

Максимизация ожидаемой нормы прибыли портфеля:

$$0{,}94x_1 + 1{,}2x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}81x_4 + 0{,}45x_5 \to \max$$

Ограничения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Метод удовлетворительного уровня критериев (1)

Целевая функция

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \begin{bmatrix} 11{,}4312 & 1{,}1701 & 0{,}1232 & 1{,}6619 & 2{,}0254 \\ 1{,}1701 & 7{,}7723 & 0{,}4983 & 1{,}1374 & 1{,}7056 \\ 0{,}1232 & 0{,}4983 & 5{,}1598 & -1{,}3094 & -0{,}6307 \\ 1{,}6619 & 1{,}1374 & -1{,}3094 & 20{,}2858 & 2{,}2824 \\ 2{,}0254 & 1{,}7056 & -0{,}6307 & 2{,}2824 & 4{,}3189 \end{bmatrix} [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \to \min$$

Ограничения

$$-0{,}94x_1 - 1{,}20\mathrm{x}_2 + 0{,}02x_3 - 0{,}81x_4 - 0{,}45x_5 \le -R_0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \le -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

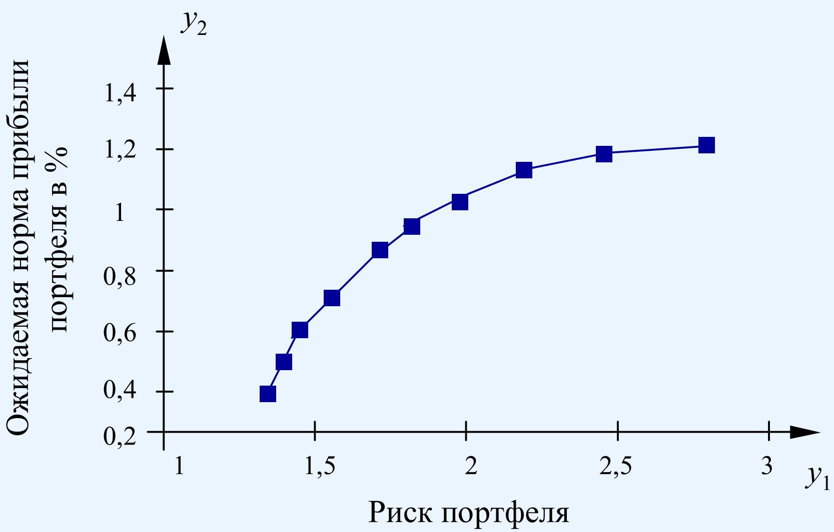
Метод удовлетворительного уровня критериев (2)

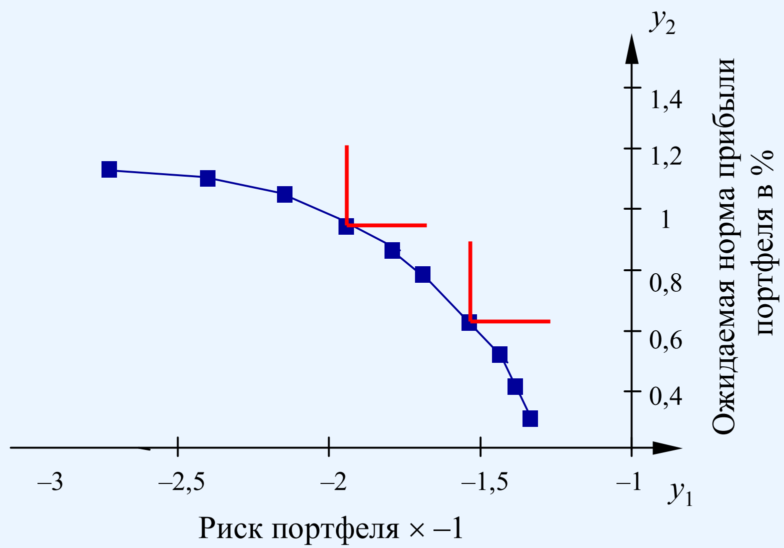
Результаты вычислений

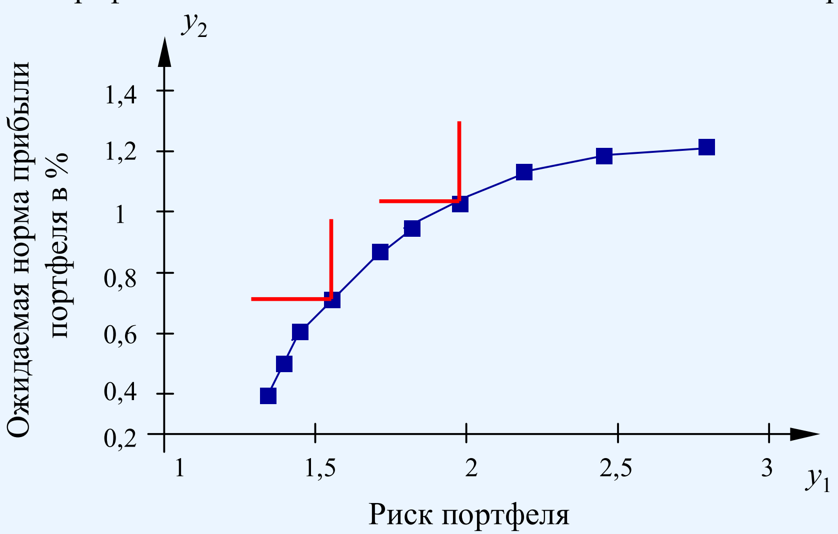
Параметры портфелей при заданных значениях R_0							
№	R_0	V_p	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P_1	1.2	2.79	0	1	0	0	0
P_2	1.15	2.42	0.1841	0.8104	0	0.0054	0
P_3	1.1	2.20	0.2527	0.6594	0	0.0879	0
P_4	1.0	2.00	0.2468	0.5391	0.0285	0.1060	0.0797
P_5	0.9	1.83	0.2171	0.4671	0.0897	0.0986	0.1275
P_6	0.8	1.67	0.1874	0.3951	0.1510	0.0911	0.1754
P_7	0.7	1.53	0.1577	0.3231	0.2122	0.0837	0.2233
P_8	0.6	1.43	0.1280	0.2511	0.2734	0.0763	0.2711
P_9	0.5	1.36	0.0984	0.1791	0.3347	0.0689	0.3190
P_{10}	0.4	1.34	0.0687	0.1071	0.3959	0.0615	0.3668

Метод удовлетворительного уровня критериев (3)

Эффективная граница







Резюме

Ключевые слова

- **Задача нелинейного программирования**
- **Глобальные и локальные экстремумы**
- **Выпуклые множества**
- **Вогнутые и выпуклые функции**
- **Задача выпуклого программирования**
- **Функция Лагранжа**
- **Условия Куна-Такера**
- **Задача квадратичного программирования**
- **Замещающая задача**
- **Искусственные переменные типа w и u**
- **Алгоритм Вольфа**
- **Оптимальный портфель акций**
- **Задача Марковича**

Можно отдыхать!