

# Optymalizacja w harmonogramowaniu projektów

Tadeusz Trzaskalik

---

### *Słowa kluczowe*

**Projekt**

**Sieć czynności**

**Czynność bezpośrednio poprzedzająca**

**Zdarzenie, zdarzenie początkowe, zdarzenie końcowe**

**Właściwa numeracja zdarzeń**

**Czas trwania czynności**

**Metoda ścieżki krytycznej CPM**

**Krok do przodu**

**Krok do tyłu**

**Rezerwy czynności**

**Harmonogram czasowo-optimalny**

**Harmonogram ASAP**

**Harmonogram ALAP**

### *Słowa kluczowe (c.d.)*

**Czynności i zdarzenia pozorne**

**Zasoby środków**

**Konflikt zasobów**

**Analiza czasowo-kosztowa**

**Czas normalny**

**Czas realizacji przyspieszonej, maksymalne przyspieszenie**

**Koszt normalny**

**Koszt realizacji przyspieszonej**

**Koszt przyspieszenia o jednostkę czasu**

**Czas dyrektywny**

**Minimalizacja kosztu przy zadanym czasie dyrektywnym**

**Minimalizacja czasu przy zadanym koszcie**

*Słowa kluczowe (c.d.)*

**Metoda PERT**

**Oszacowanie czasu trwania czynności**

**Czas optymistyczny**

**Czas pesymistyczny**

**Czas najbardziej prawdopodobny**

**Oczekiwany czas realizacji projektu i jego wariancja**

**Prawdopodobieństwo realizacji projektu w zadanym czasie**

**Czas realizacji projektu z zadanym prawdopodobieństwem**

### *Projekt*

Projekt to zadanie do wykonania, składające się z wyodrębnionych czynności, które powinny być zrealizowane w określonej kolejności i w ustalonym czasie

## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.1. Kolejność realizacji czynności (1/2)

#### Przykład 7.1

#### Lista czynności:

- A** - opracowanie założeń konstrukcyjnych,
- B** - analiza propozycji uruchomienia nowej produkcji,
- C** - sporządzenie projektów technicznych podzespołów,
- D** - zamówienie materiałów,
- E** - analiza popytu,
- F** - budowa prototypu,
- G** - sporządzenie dokumentacji,
- H** - pierwsza partia produkcji seryjnej,

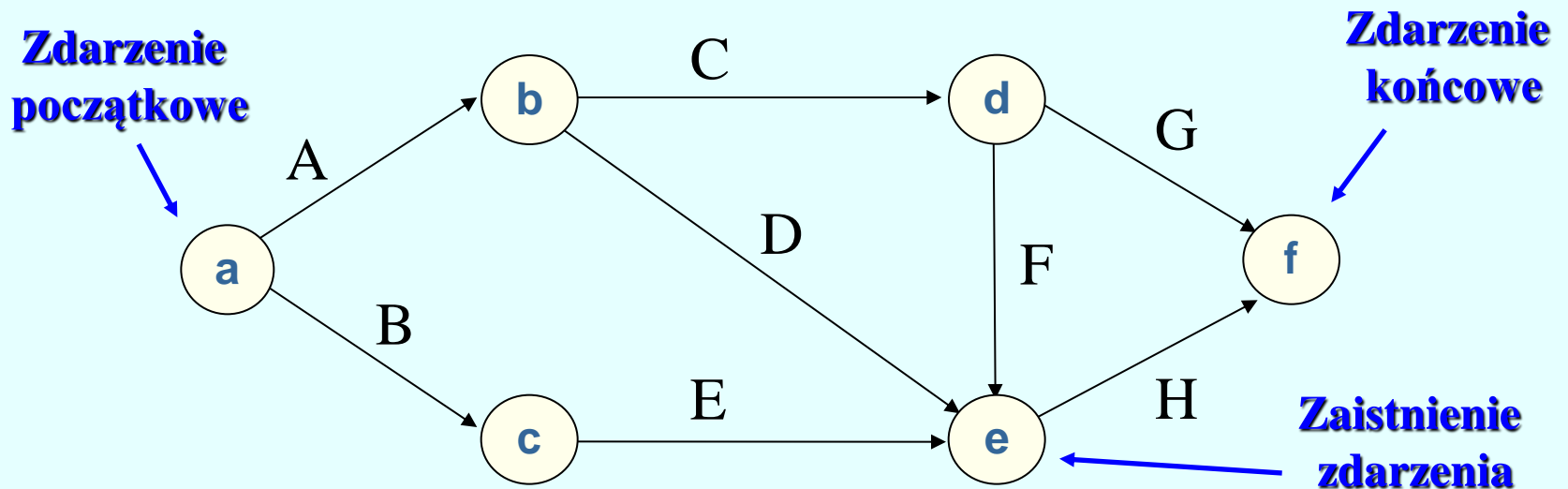
Czynność	Czynność bezpośrednio poprzedzająca	Czas trwania
A	-	5
B	-	7
C	A	6
D	A	8
E	B	3
F	C	4
G	C	2
H	E, D, F	5

## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.1. Kolejność realizacji czynności (2/2)

#### Konstrukcja sieci czynności

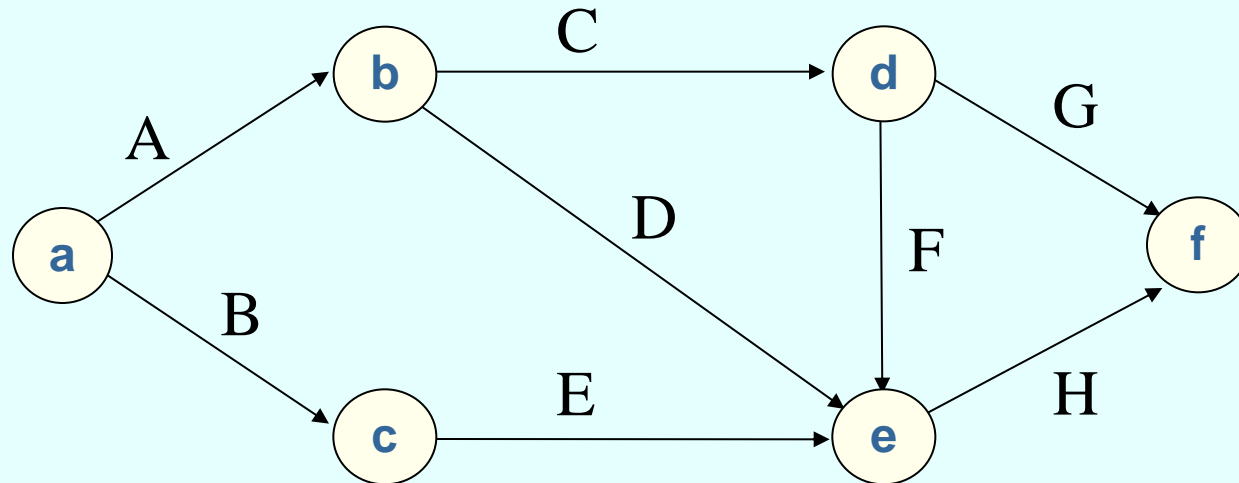
Czynność	Czynność bezpośrednio poprzedzająca
A	-
B	-
C	A
D	A
E	B
F	C
G	C
H	E, D, F



## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.2. Właściwa numeracja zdarzeń (1/6)

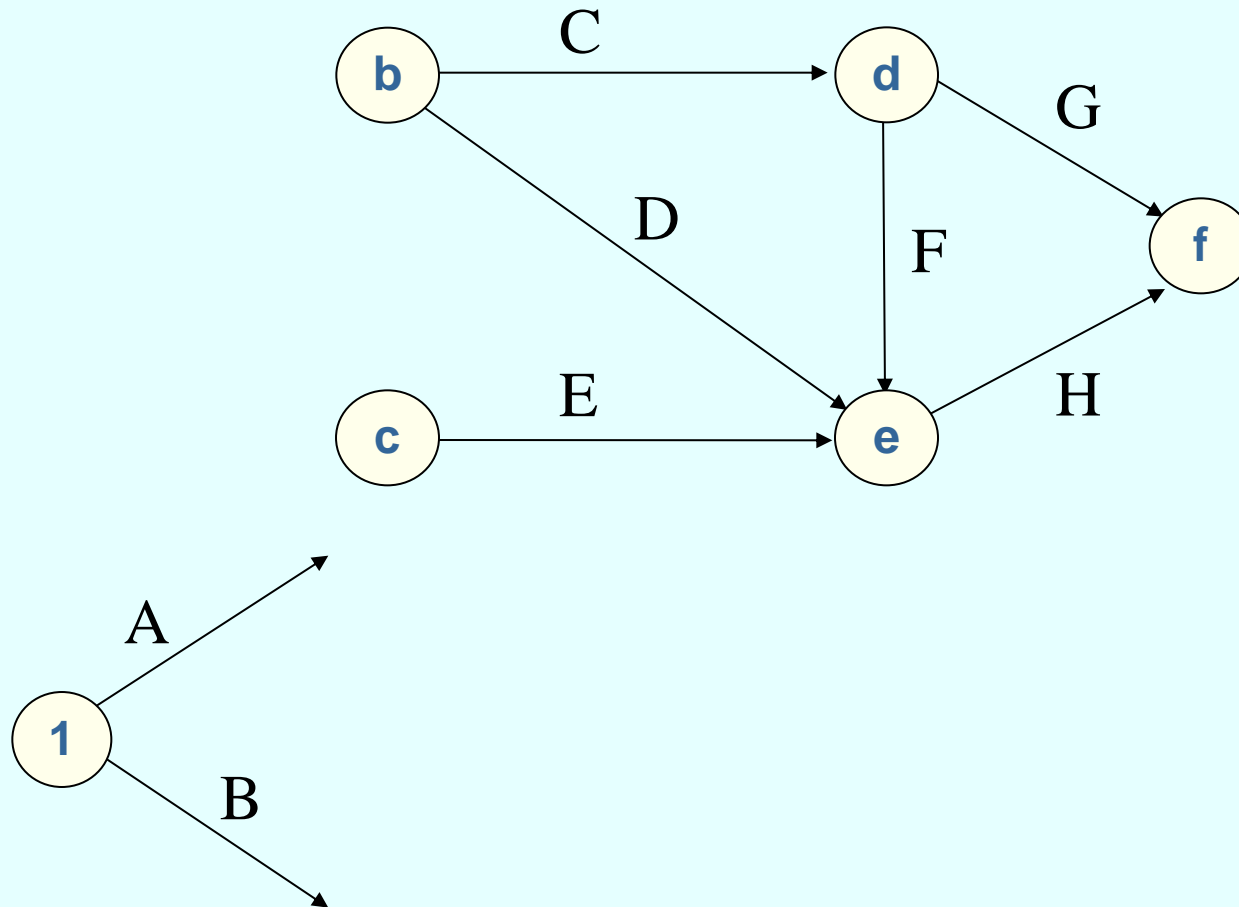
Numeracja sieci jest właściwa, gdy numer zdarzenia początkującego dowolną czynność jest mniejszy od numeru zdarzenia kończącego tę czynność.



## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.2. Właściwa numeracja zdarzeń (2/6)

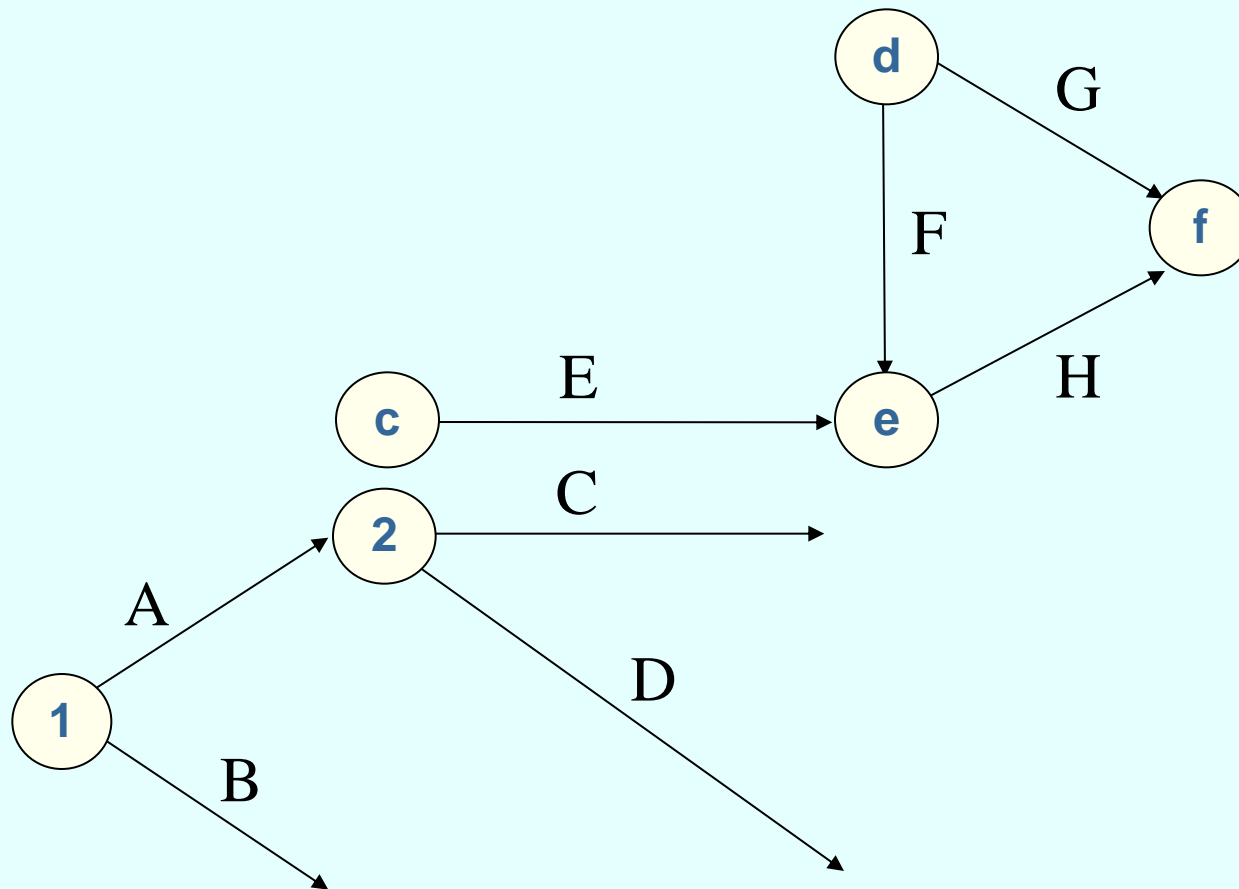
*Przebieg obliczeń (c.d.)*



## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.2. Właściwa numeracja zdarzeń (3/6)

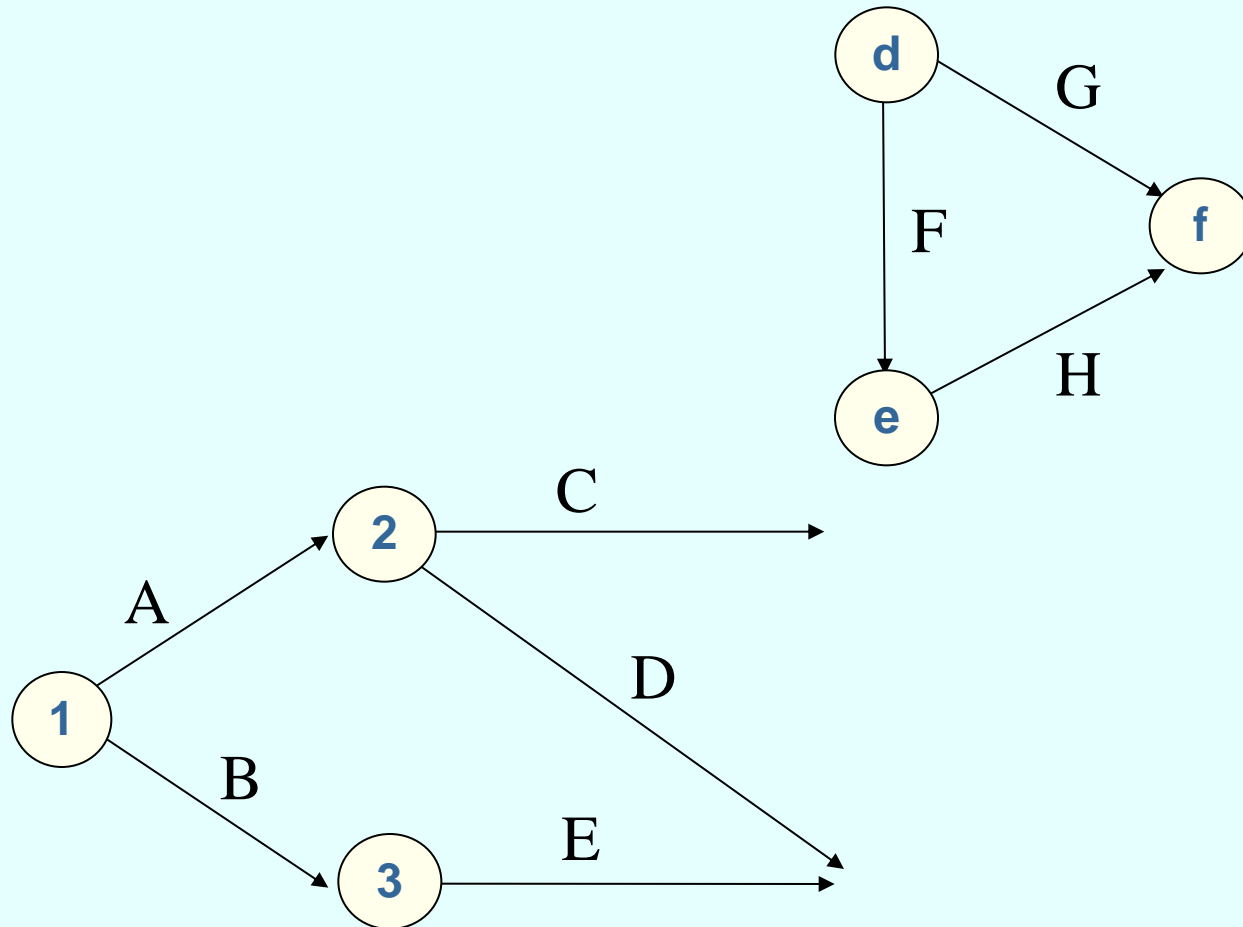
*Przebieg obliczeń (c.d.)*



## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.2. Właściwa numeracja zdarzeń (4/6)

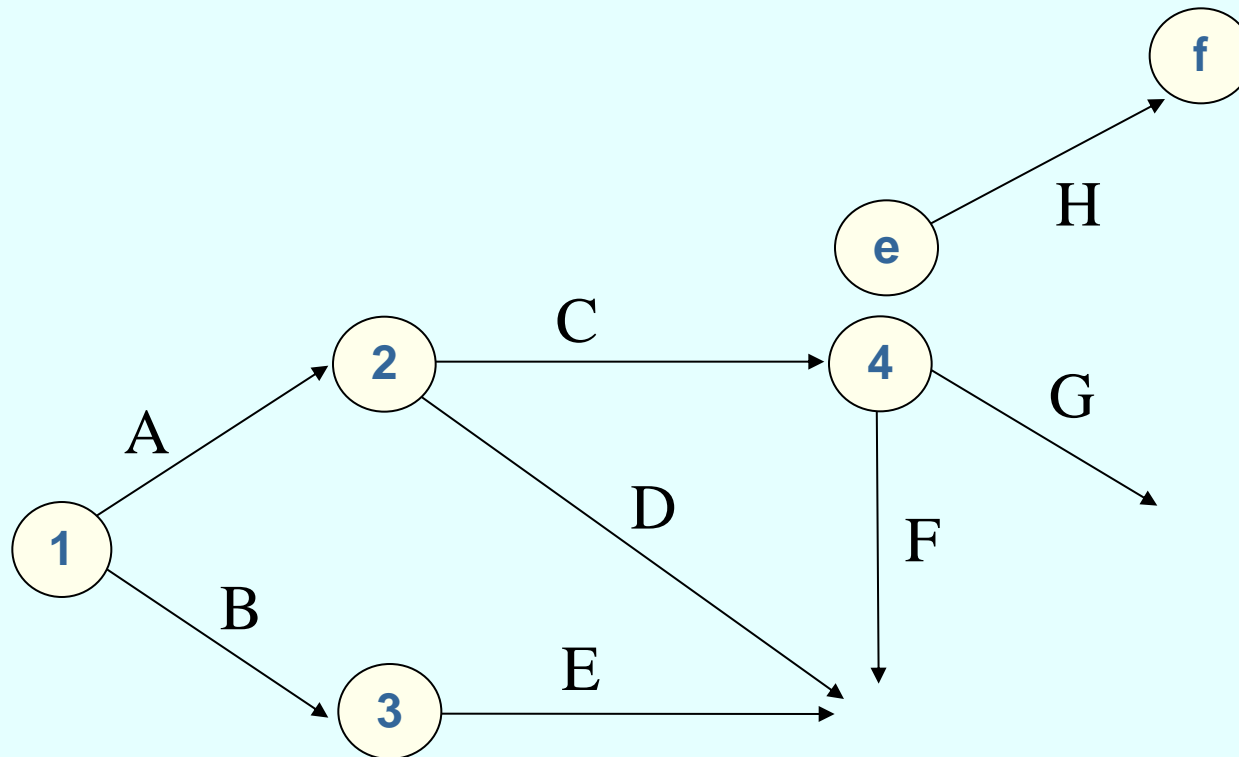
*Przebieg obliczeń (c.d.)*



## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

### 7.2.1. Właściwa numeracja zdrażeń (5/6)

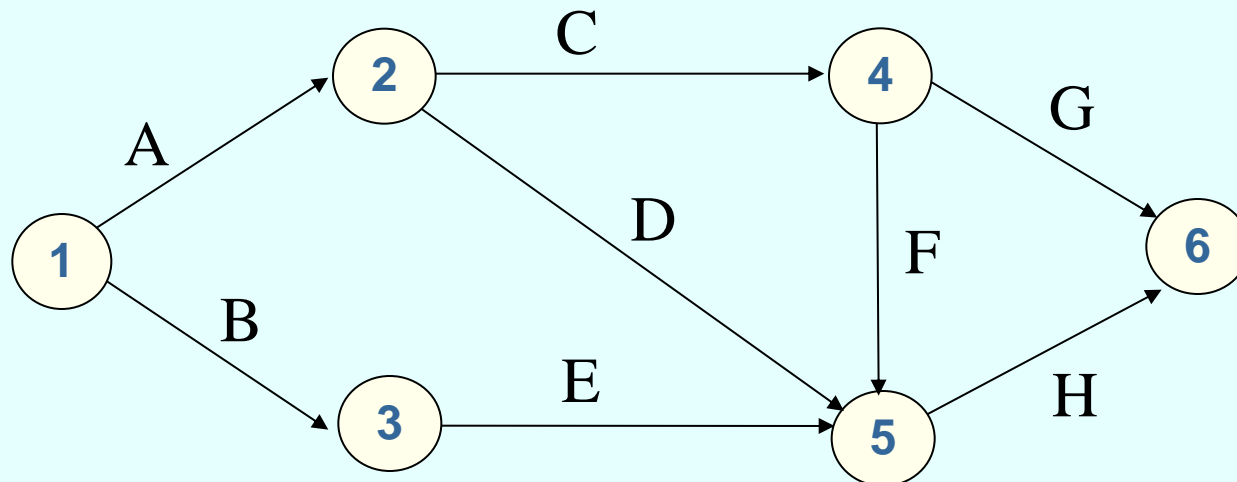
*Przebieg obliczeń (c.d.)*



## 7.2. Konstrukcja sieci czynności

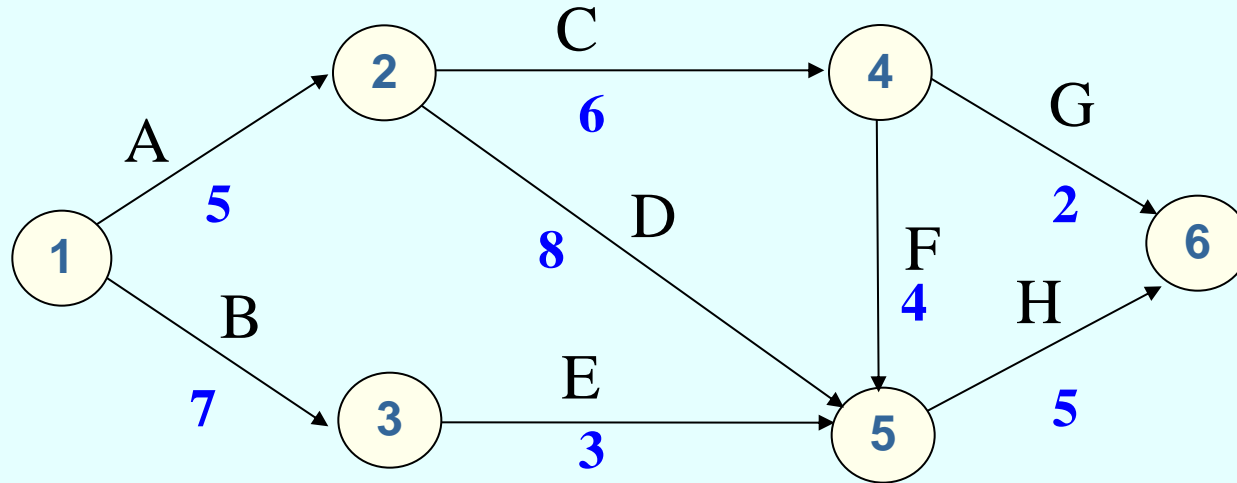
### 7.2.1. Właściwa numeracja zdarzeń (6/6)

*Przebieg obliczeń (c.d.)*



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### Podstawowe pojęcia



	Ścieżka	Czas przejścia
	A C G	13
<b>Ścieżka krytyczna</b> →	A C F H	<b>20</b> ← <b>Czas krytyczny</b>
	A D H	18
	B E H	15

### *Sformułowanie zadania*

1. Jaki jest najkrótszy czas realizacji projektu (czas krytyczny)?
2. Jaki jest optymalny harmonogram realizacji projektu, określający najwcześniejsze i najpóźniejsze momenty rozpoczęcia i zakończenia czynności tak, aby czas realizacji projektu był najkrótszy?
3. Które czynności są „krytyczne” i nie mogą być opóźnione, by nie opóźnić realizacji całego projektu?
4. W jakim stopniu czynności niekrytyczne mogą być opóźnione, aby pomimo ich opóźnienia projekt został zrealizowany w najkrótszym możliwym czasie?

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.1. Krok do przodu (1/2)

#### *Momenty najwcześniejsze*

- ES** - najwcześniejszy moment rozpoczęcia danej czynności (Earliest Start)
- EF** - najwcześniejszy moment zakończenia danej czynności (Earliest Finish)
- t** - czas realizacji rozpatrywanej czynności

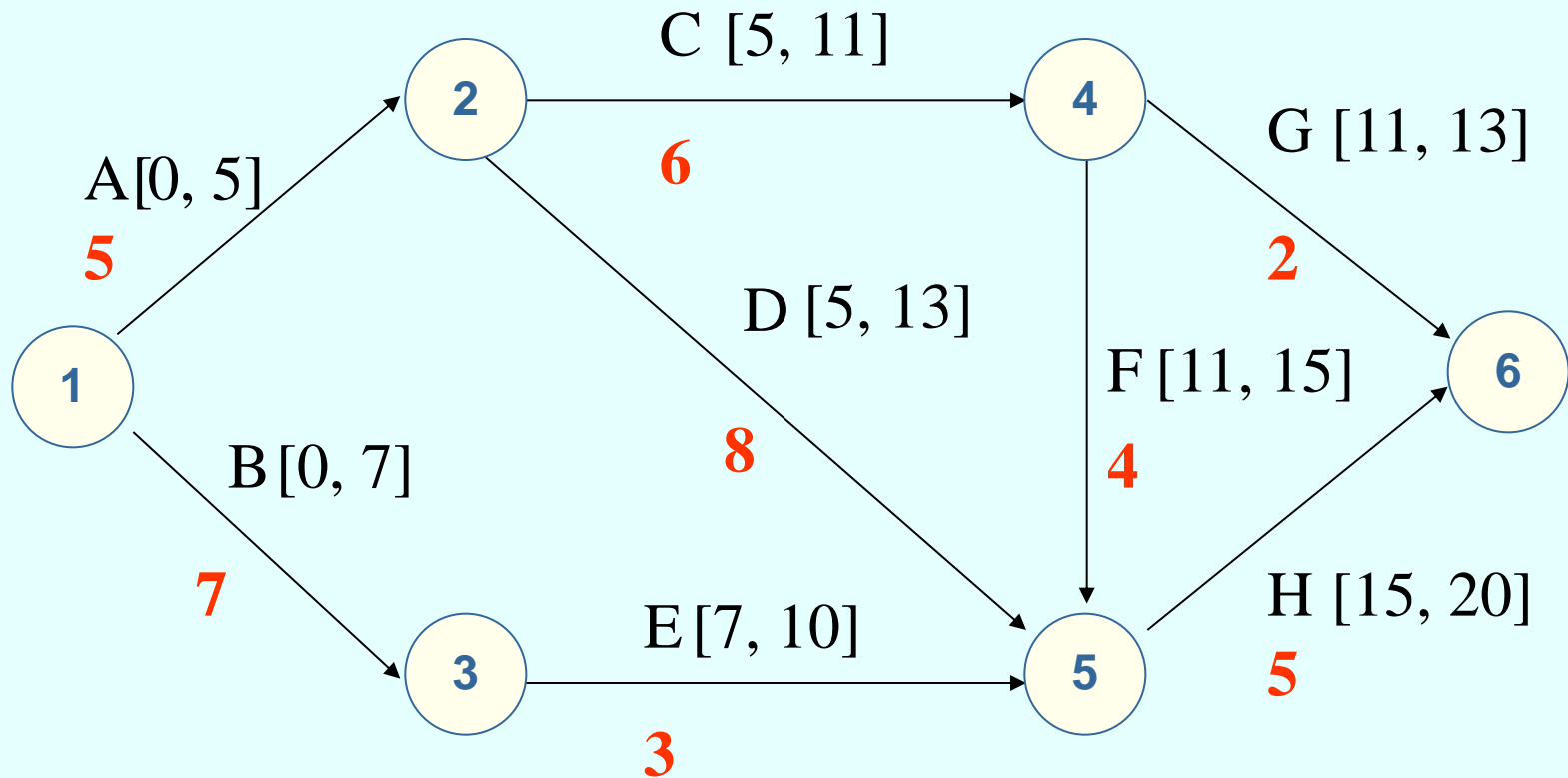
$$\mathbf{EF = ES + t}$$

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.1. Krok do przodu (2/2)

Momenty najwcześniejsze (c.d.)

$$EF = ES + t$$



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.2. Krok do tyłu (1/2)

#### *Momenty najpóźniejsze*

**LS** - najpóźniejszy moment rozpoczęcia danej czynności (Latest Start)

**LF** - najpóźniejszy moment zakończenia danej czynności (Latest Finish)

**t** - czas realizacji rozpatrywanej czynności

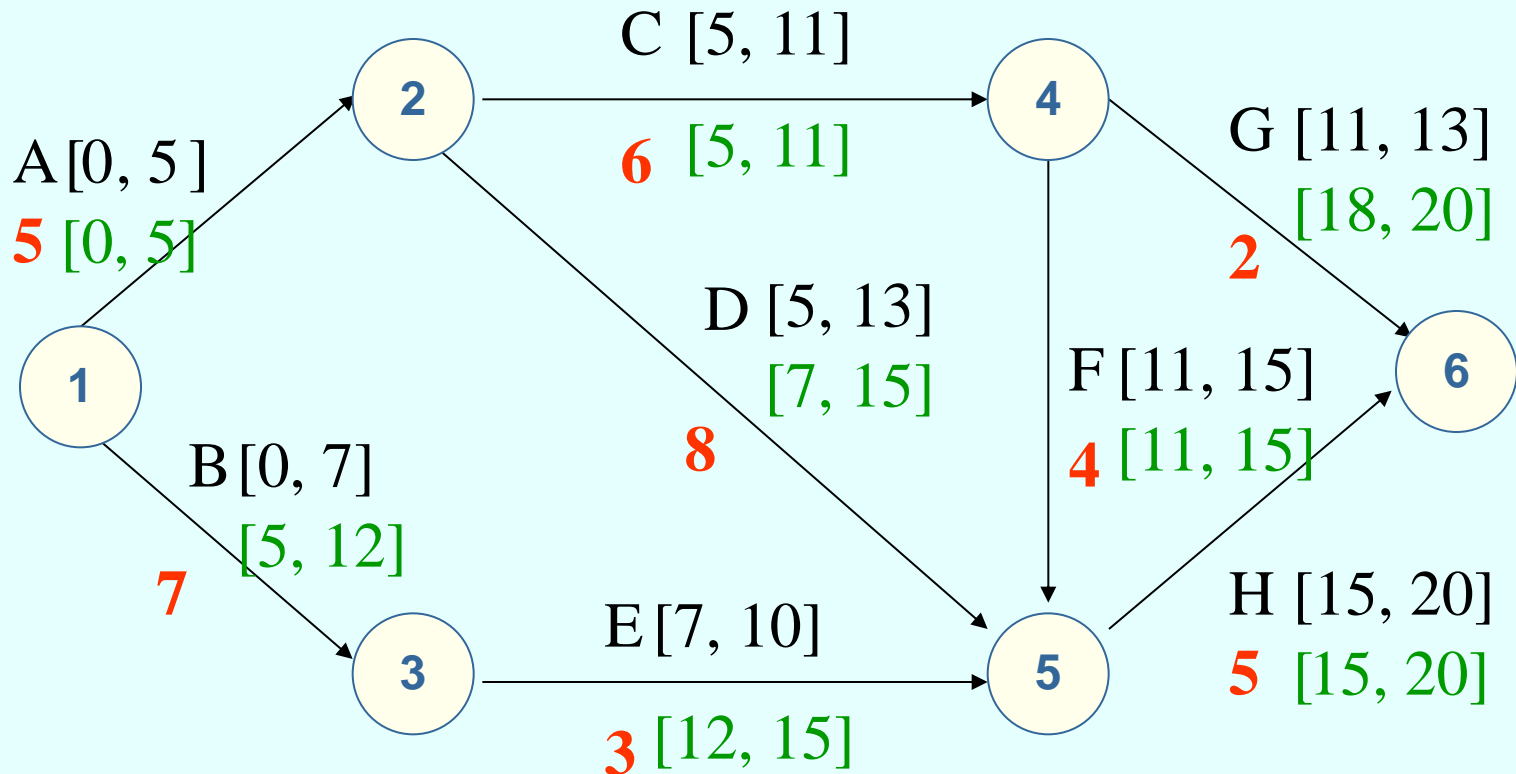
$$\mathbf{LS = LF - t}$$

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.2. Krok do tyłu (2/2)

Momenty najpóźniejsze (c.d.)

$$LS = LF - t$$

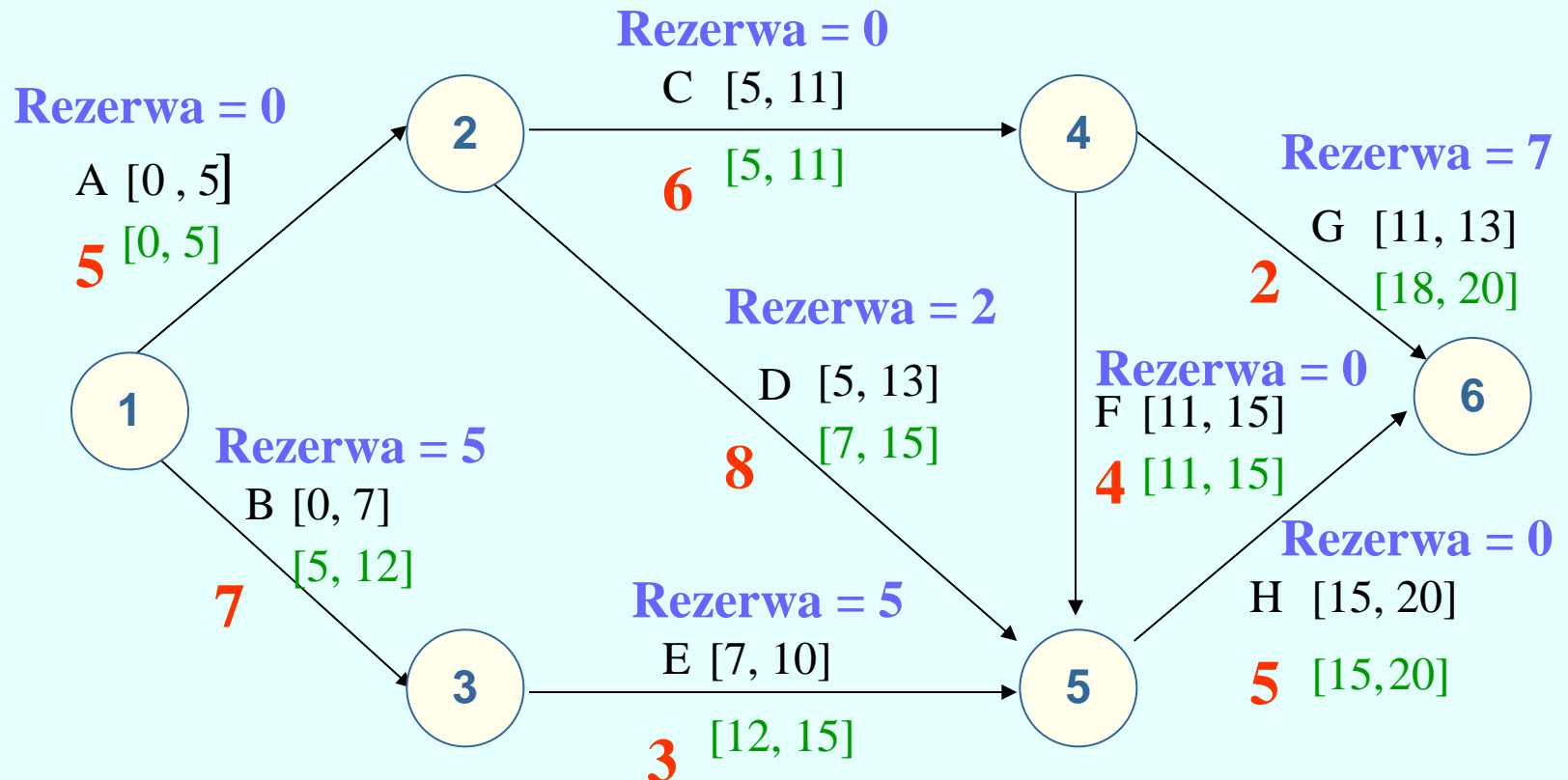


## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.3. Rezerwy czynności (1/3)

Wyznaczanie rezerw

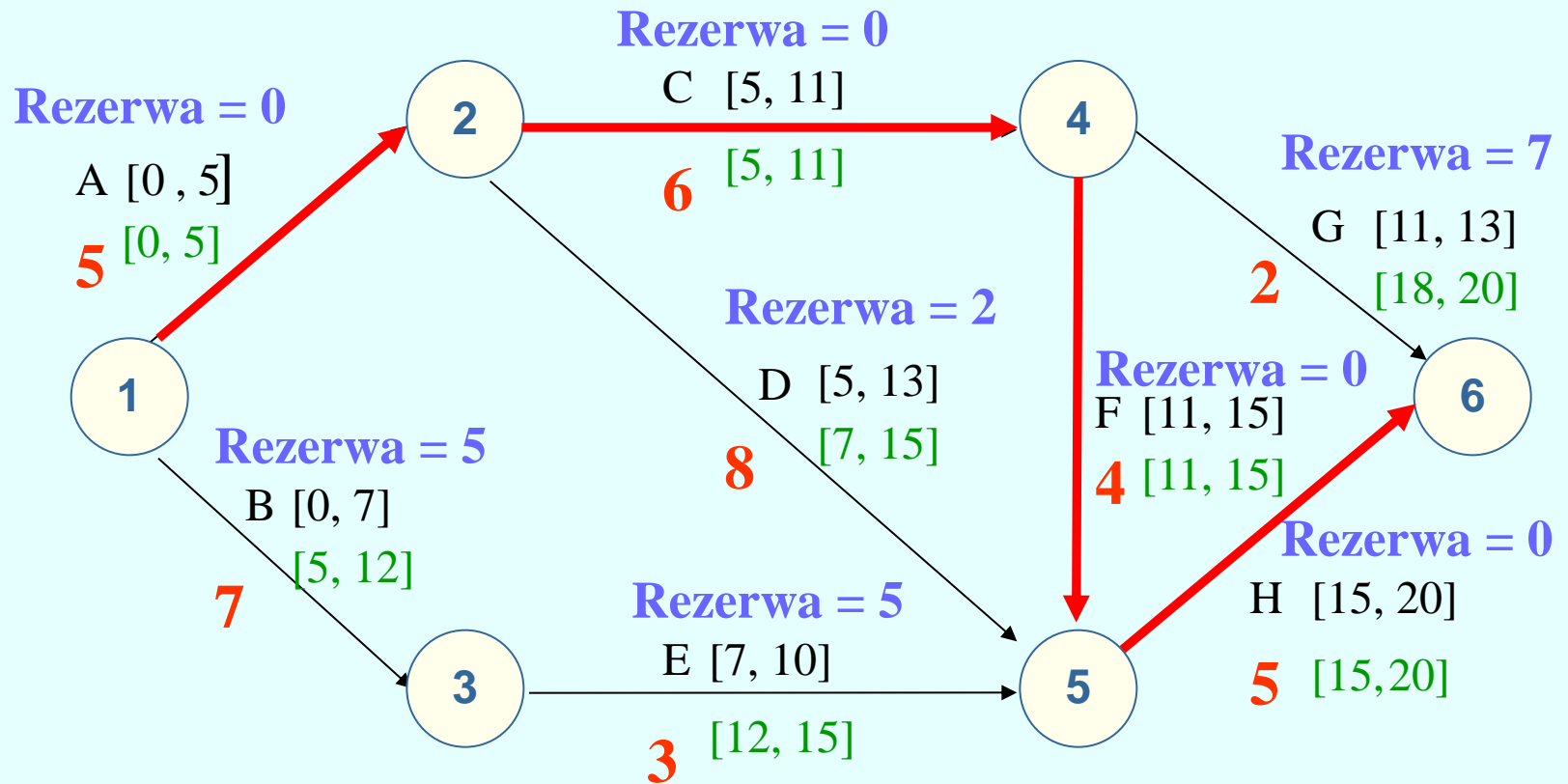
$$\text{Rezerwa} = \text{LS} - \text{ES} = \text{LF} - \text{EF}$$



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.3. Rezerwy czynności (2/3)

#### Ścieżka krytyczna



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.3. Rezerwy czynności (3/3)

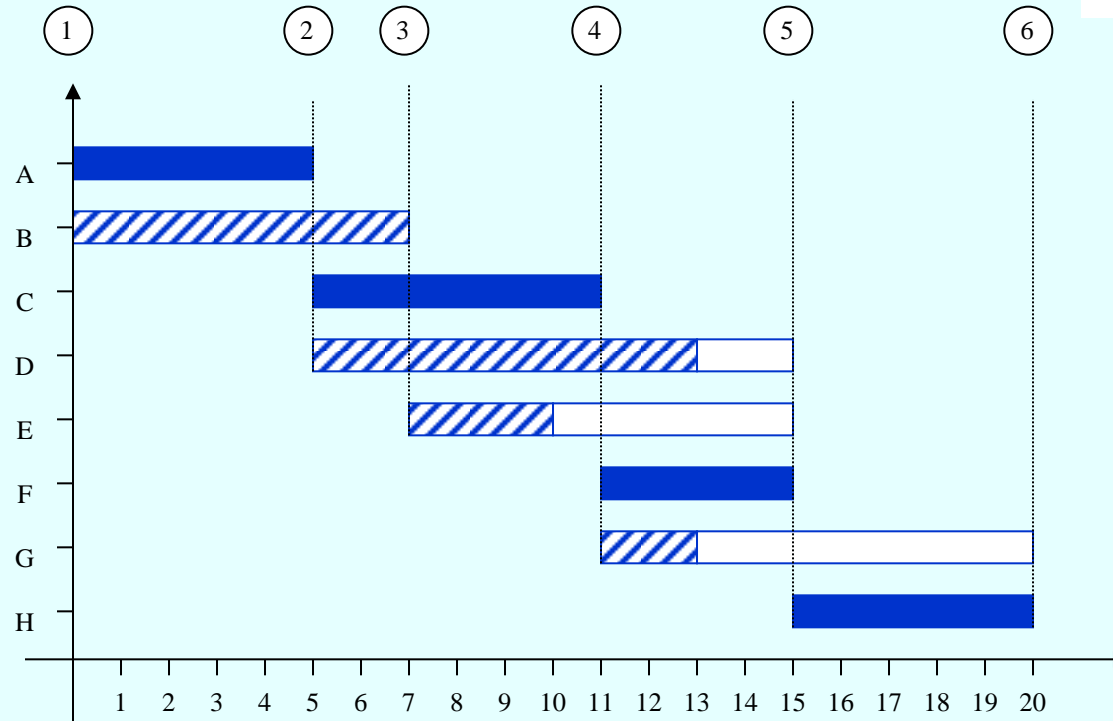
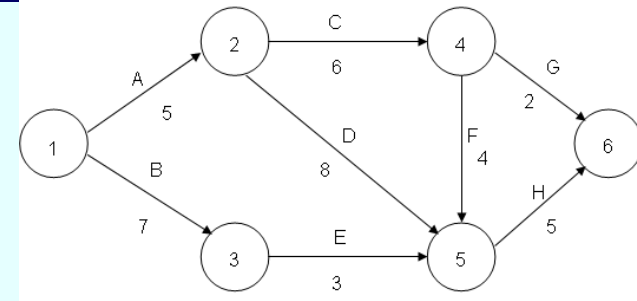
#### Ścieżka krytyczna (c.d.)

Czynność	Czas trwania	ES	EF	LS	LF	Rezerwa	Czynność krytyczna
A	5	0	5	0	5	0	tak
B	7	0	7	5	12	5	nie
C	6	5	11	5	11	0	tak
D	8	5	13	7	15	2	nie
E	3	7	10	12	15	5	nie
F	4	11	15	11	15	0	tak
G	2	11	13	18	20	7	nie
H	5	15	20	15	20	0	tak

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.4. Harmonogramy czasowo-optimalne (1/3)

#### Harmonogram ASAP



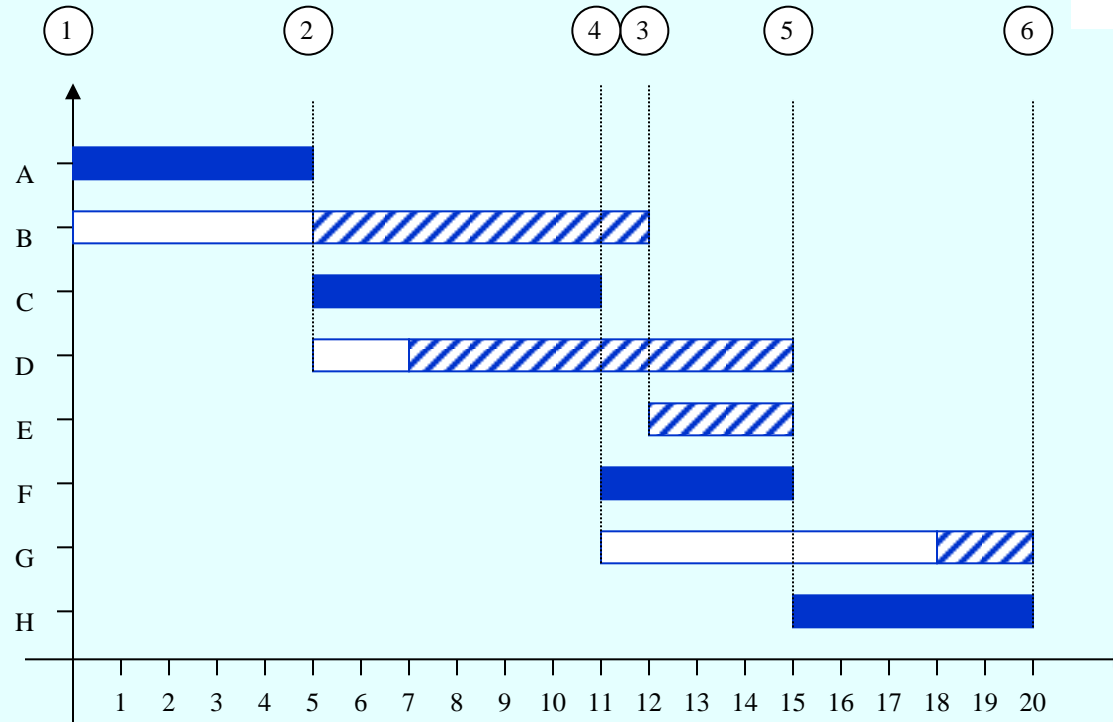
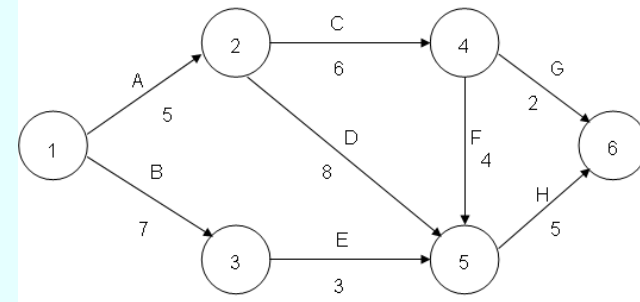
Czynność	Czas trwania	ES	EF
A	5	0	5
B	7	0	7
C	6	5	11
D	8	5	13
E	3	7	10
F	4	11	15
G	2	11	13
H	5	15	20

#### Rezerwy czynności w harmonogramie ASAP

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.4. Harmonogramy czasowo-optimalne (2/3)

#### Harmonogram ALAP



Czynność	Czas trwania	LS	LF
A	5	0	5
B	7	5	12
C	6	5	11
D	8	7	15
E	3	12	15
F	4	11	15
G	2	18	20
H	5	15	20

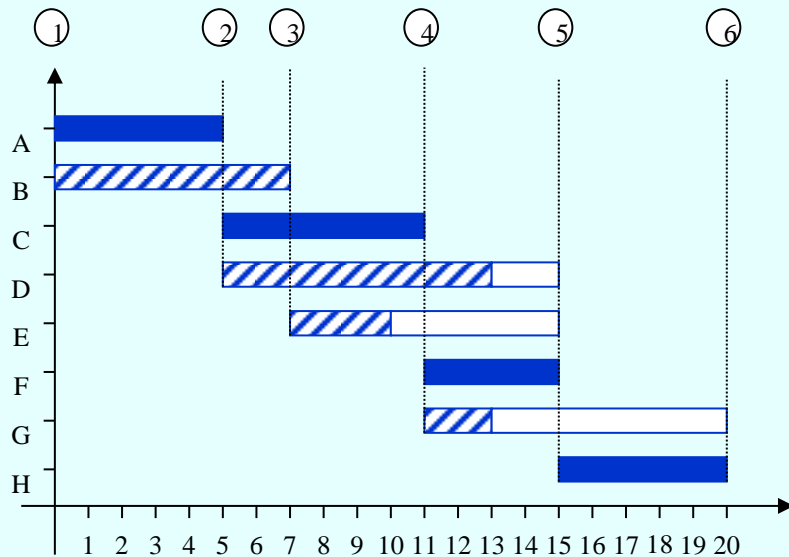
#### Rezerwy czynności w harmonogramie ALAP

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

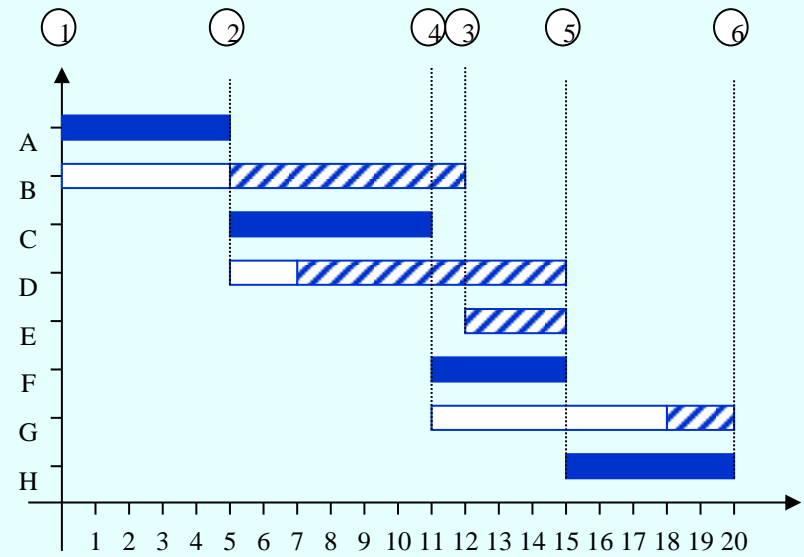
### 7.3.4. Harmonogramy czasowo-optimalne (3/3)

#### Porównanie harmonogramów

#### Momenty najwcześniejsze



#### Momenty najpóźniejsze



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.5. Zdarzenia i czynności pozorne (1/3)

#### *Zasady konstrukcji sieci czynności*

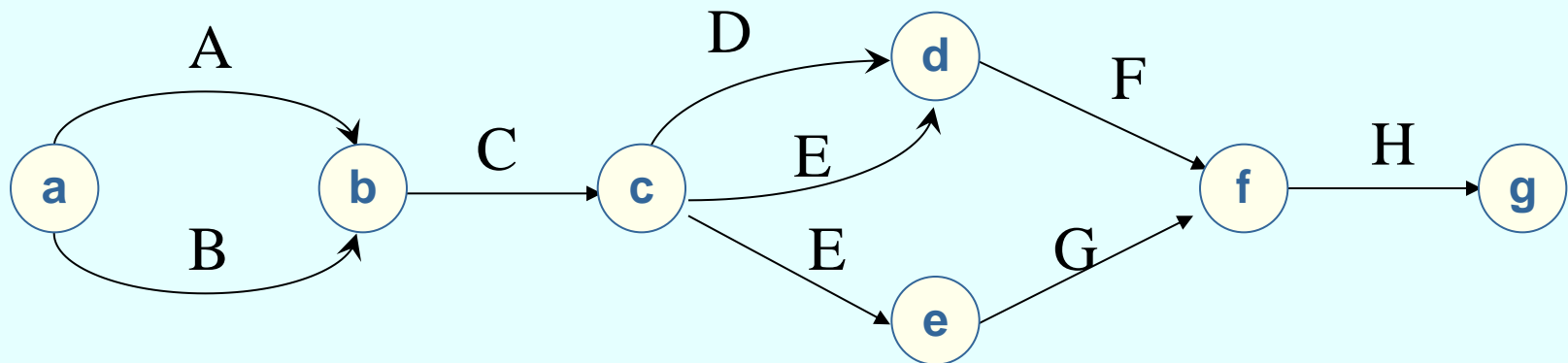
- Sieć odpowiadająca projektom powinna być grafem acyklicznym (bez cykli i pętli), mieć jedno zdarzenie początkowe i jedno zdarzenie końcowe.
- Dwa dowolnie wybrane zdarzenia może łączyć co najwyżej jedna czynność
- Jednej czynności odpowiada w sieci dokładnie jeden łuk

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.5. Zdarzenia i czynności pozorne (2/3)

#### Przykład 7.2.

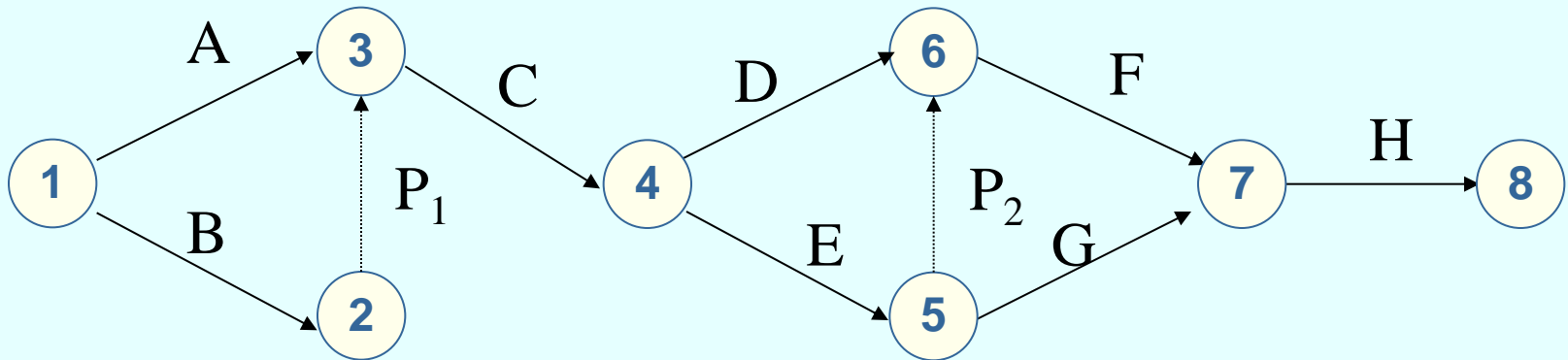
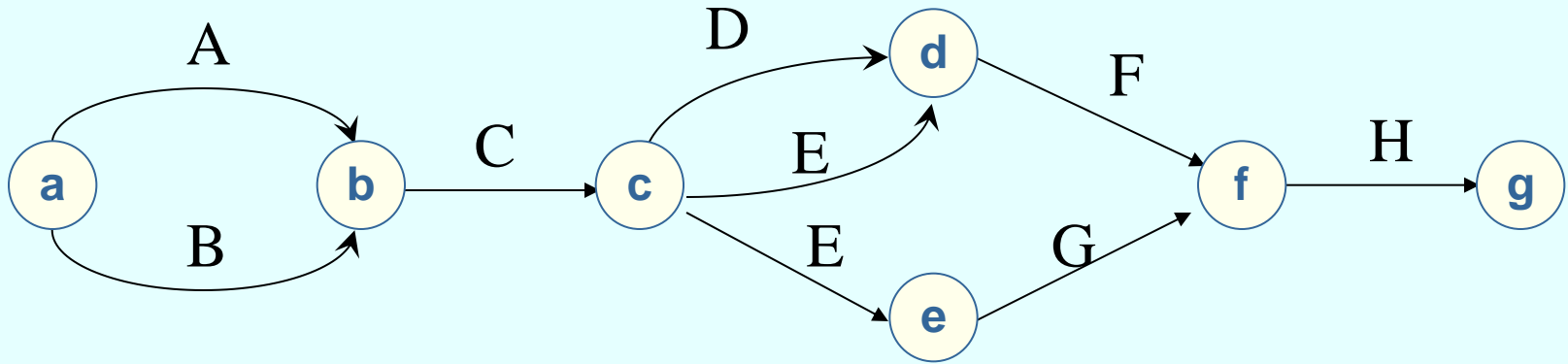
Czynność	Opis	Czynność poprzedzająca	Czas trwania
A	Pomiar gruntu	-	6
B	Opracowanie projektu wstępnego	-	8
C	Uzyskanie zgody Rektora	A, B	12
D	Wybór architekta	C	4
E	Opracowanie budżetu	C	6
F	Opracowanie projektu końcowego	D, E	15
G	Zapewnienie źródeł finansowania	E	12
H	Wynajęcie wykonawcy	F, G	8



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.5. Zdarzenia i czynności pozorne (3/3)

#### Sieć czynności



## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.6. Reguły postępowania w metodzie CPM (1/1)

#### *Algorytm*

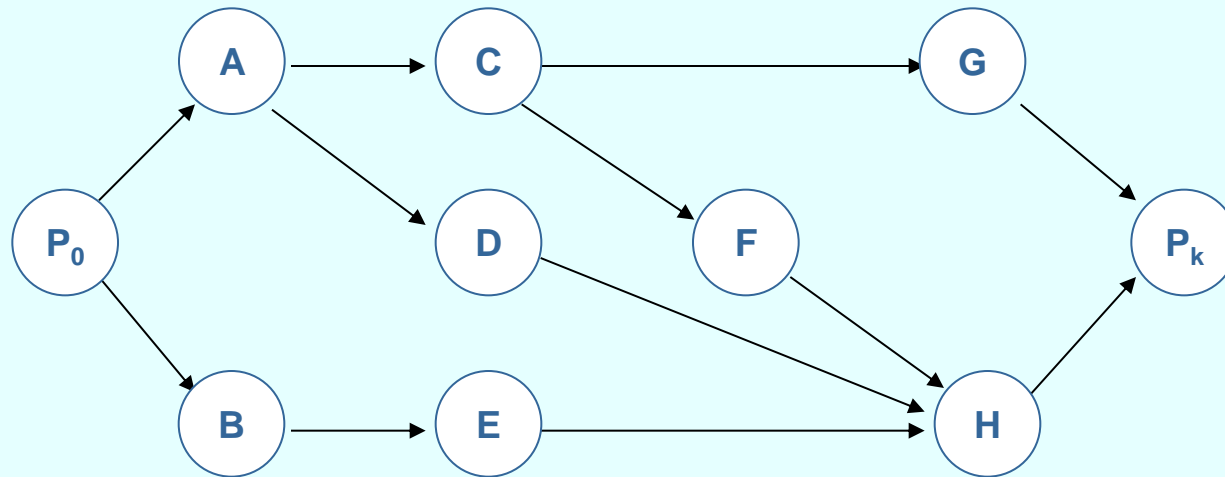
1. Określenie listy czynności.
2. Konstrukcja sieci czynności.
3. Numeracja zdarzeń.
4. Obliczenie najwcześniejszych momentów rozpoczęcia i zakończenia czynności i wyznaczenie czasu krytycznego.
5. Obliczenie najpóźniejszych momentów rozpoczęcia i zakończenia czynności.
6. Obliczenie rezerw czynności.
7. Określenie ścieżki krytycznej.
8. Konstrukcja harmonogramu realizacji projektu.

## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.7. Czynności jako wierzchołki sieci (1/2)

Przykład 7.1. (c.d.)

Czynność	Czynność bezpośrednio poprzedzająca
A	-
B	-
C	A
D	A
E	B
F	C
G	C
H	E, D, F

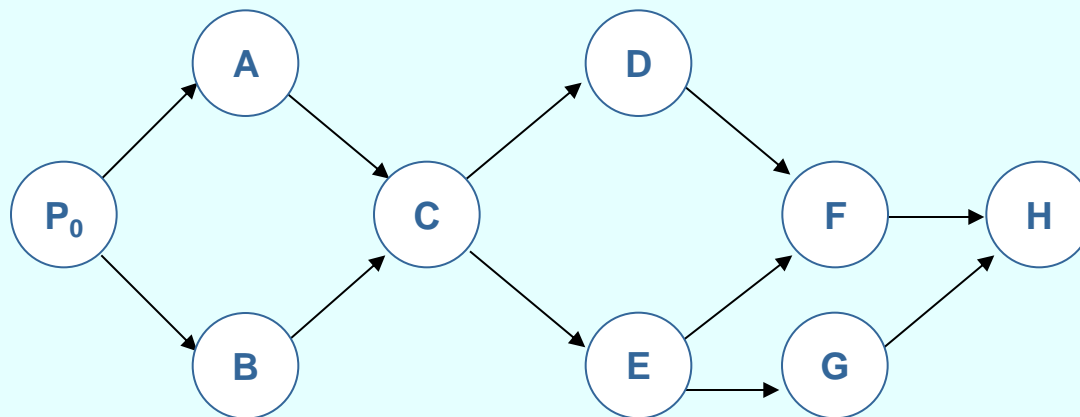


## 7.3. Metoda ścieżki krytycznej

### 7.3.7. Czynności jako wierzchołki sieci (2/2)

#### Przykład 7.2. (c.d.)

Czynność	Czynność bezpośrednio poprzedzająca
A	-
B	-
C	A, B
D	C
E	C
F	D, E
G	E
H	F, G



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (1/8)

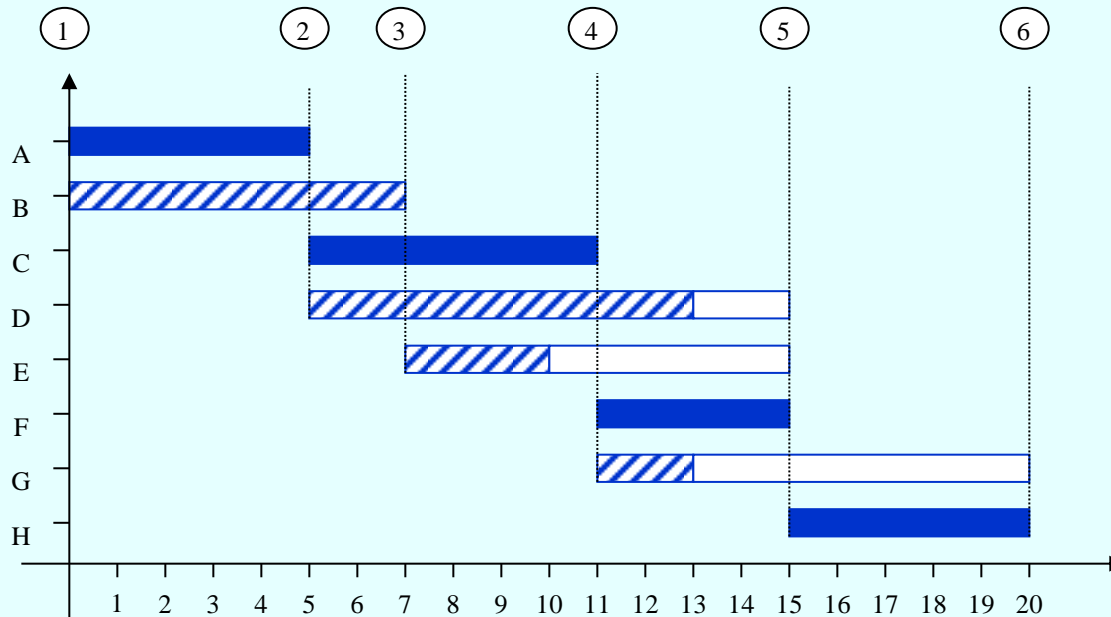
#### Przykład 7.3.

Czynność	Całkowite zużycie środków finansowych	Zużycie środków finansowych przypadające na jeden okres	Całkowite zużycie zasobów pracy	Zużycie zasobów pracy przypadające na jeden okres
A	20	4	5	1
B	21	3	7	1
C	30	5	6	1
D	16	2	8	1
E	9	3	3	1
F	24	6	4	1
G	8	4	2	1
H	20	4	5	1

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (2/8)

#### Zapotrzebowanie na środki – harmonogram ASAP

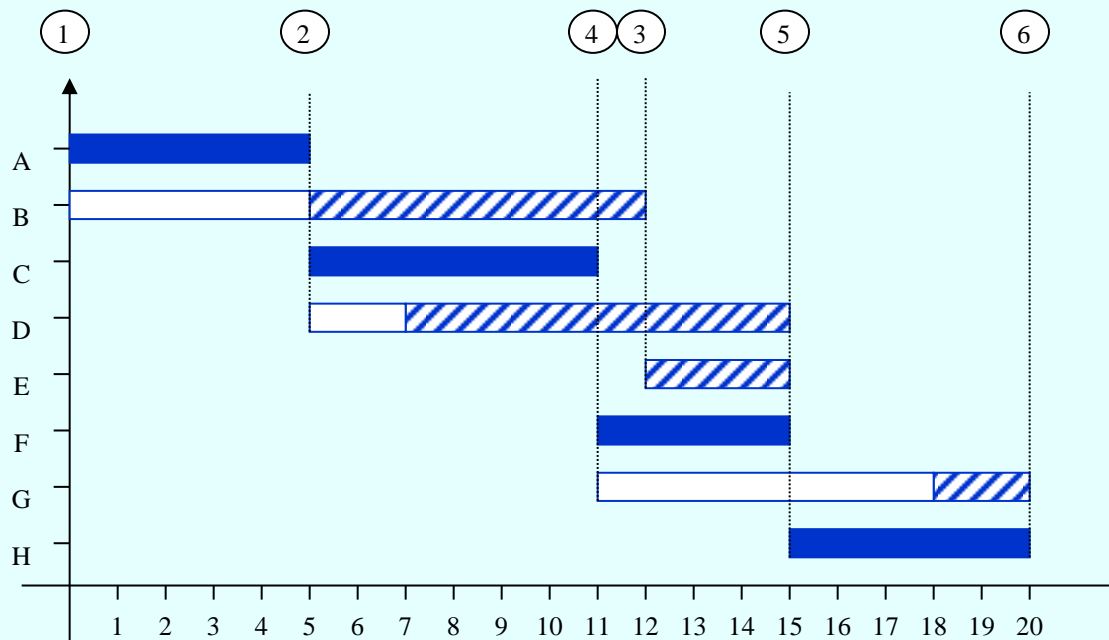


Okres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Środki finansowe	7	7	7	7	7	10	10	10	10	10	7	12	12	6	6	4	4	4	4	4
Zasoby pracy	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	3	3	1	1	1	1	1	1	1

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (3/8)

#### Zapotrzebowanie na środki – harmonogram ALAP

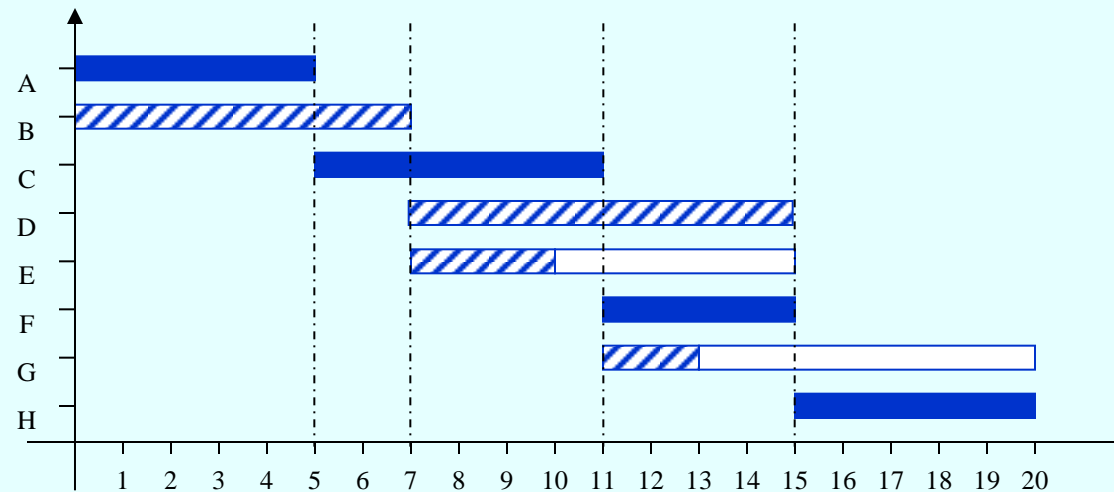
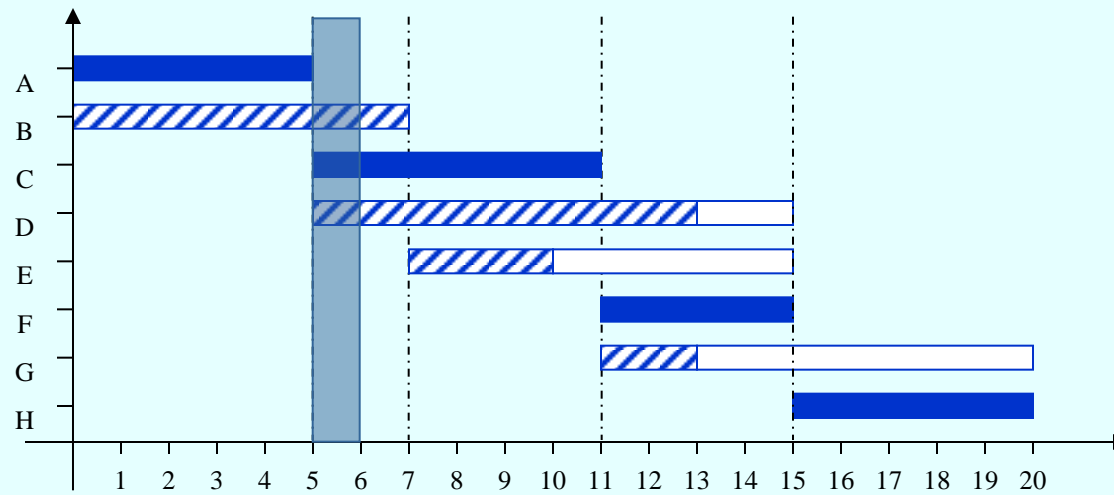


Okres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Środki finansowe	4	4	4	4	4	8	8	10	10	10	10	9	11	11	11	4	4	4	8	8
Zasoby pracy	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	2	3	3	3	1	1	1	2	2

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (4/8)

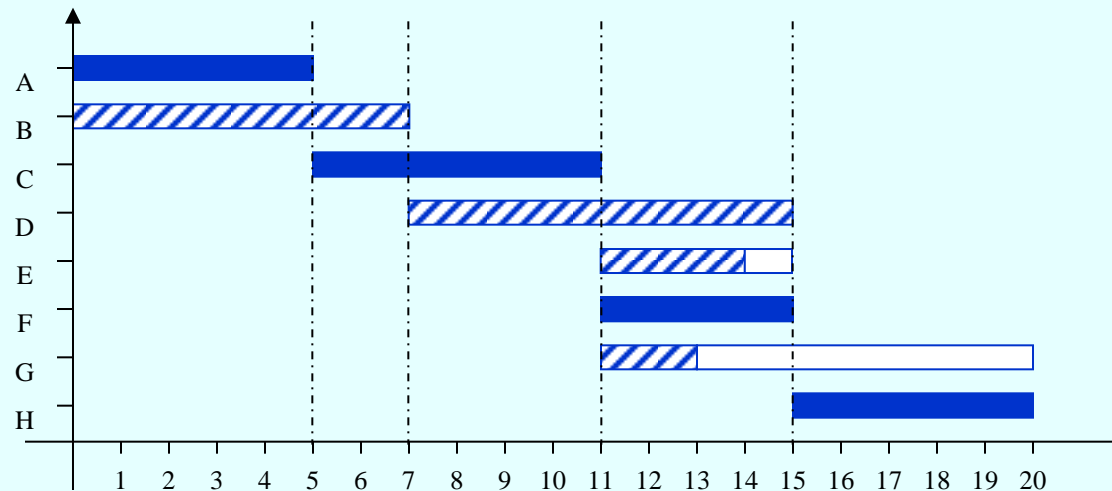
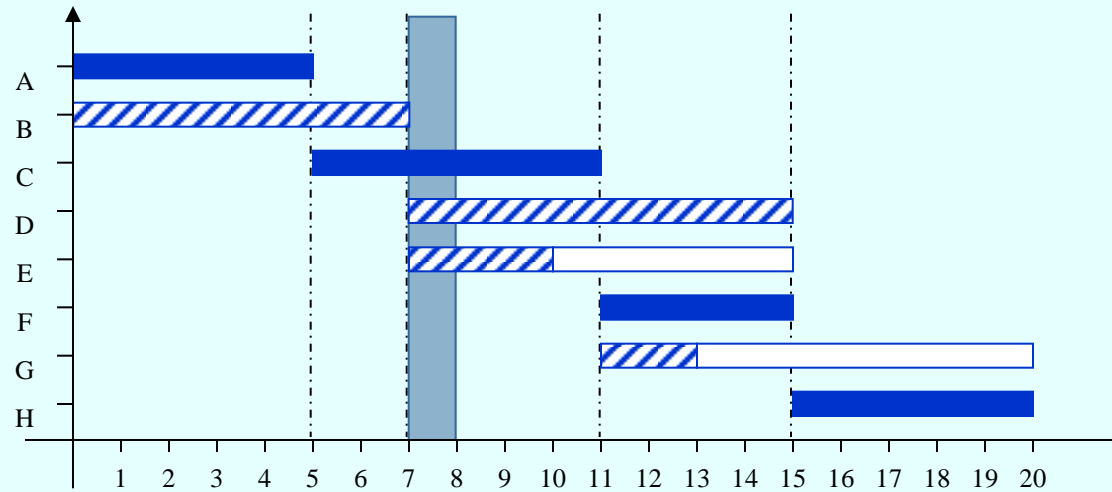
#### Konflikt zasobów – okres 6



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (5/8)

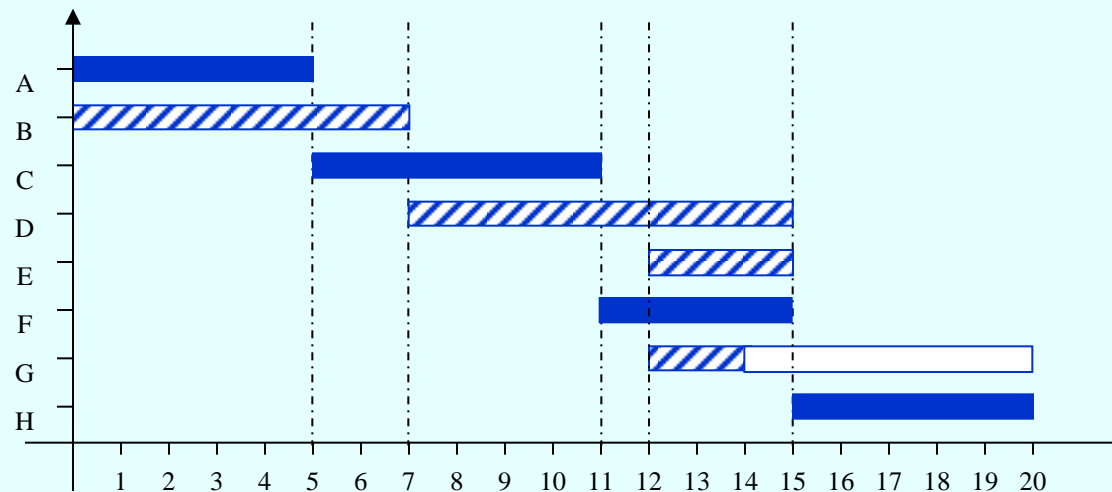
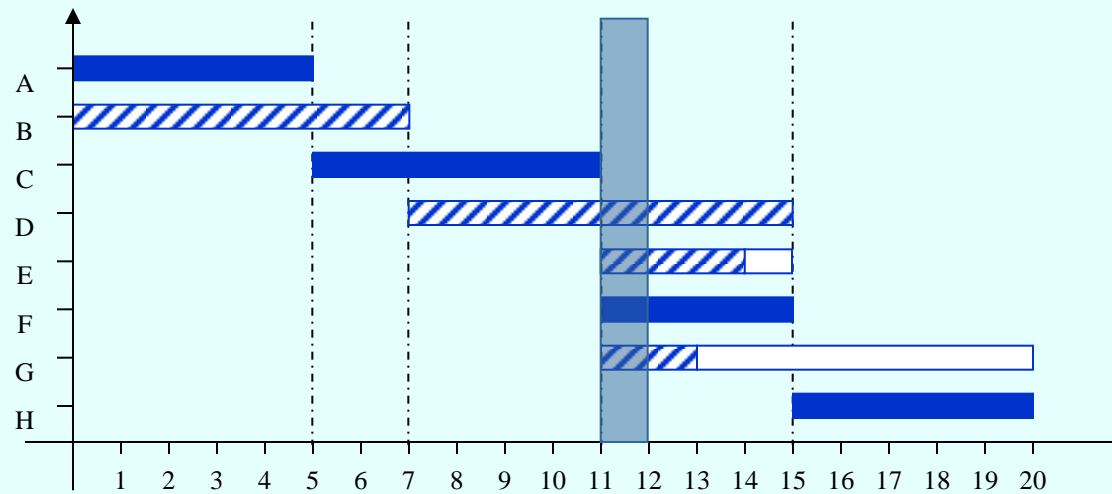
#### Konflikt zasobów – okres 8



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (6/8)

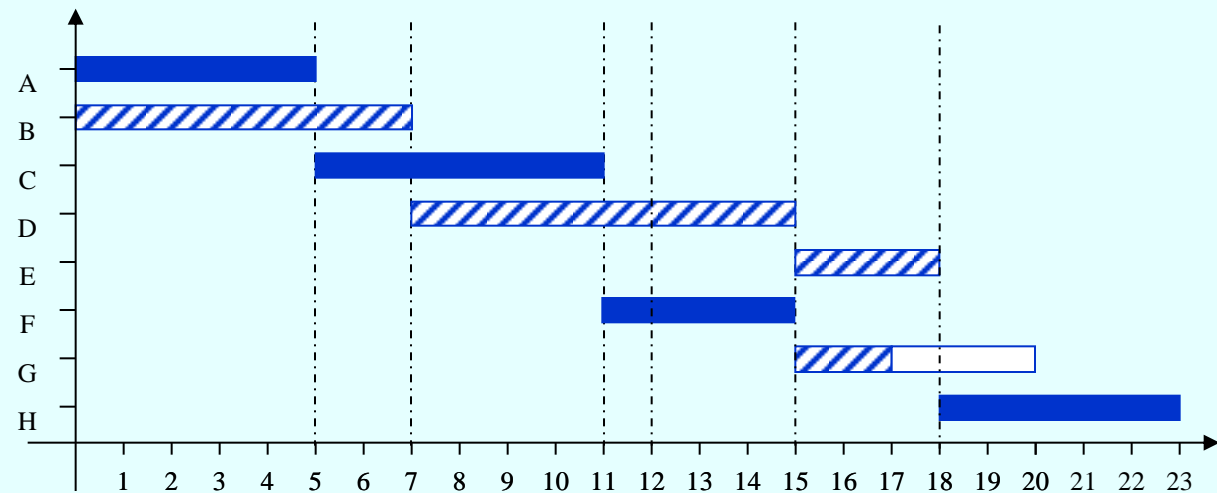
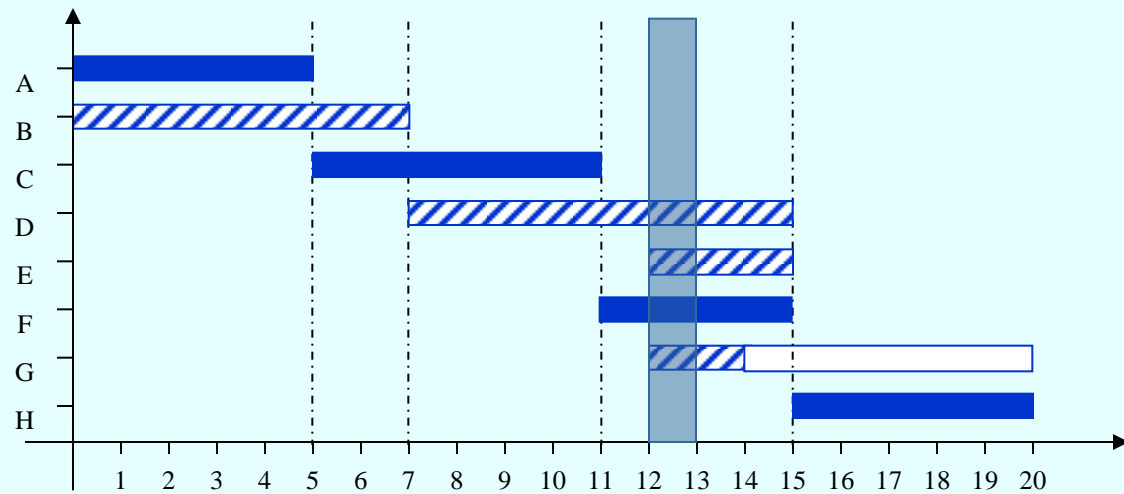
#### Konflikt zasobów – okres 12



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (7/8)

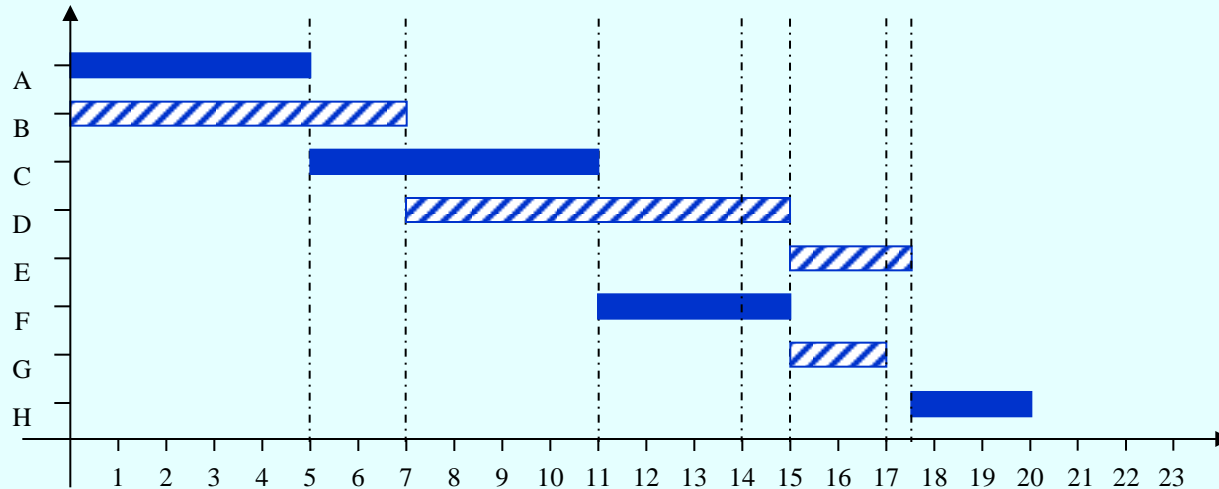
#### Konflikt zasobów – okres 13



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.1. Rozwiązywanie konfliktów zasobów (8/8)

#### Modyfikacja harmonogramu



Okres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Środki finansowe	7	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	5	5	5	8	10	10	10	8	8
Zasoby pracy	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.2. Przyspieszenie realizacji czynności (1/2)

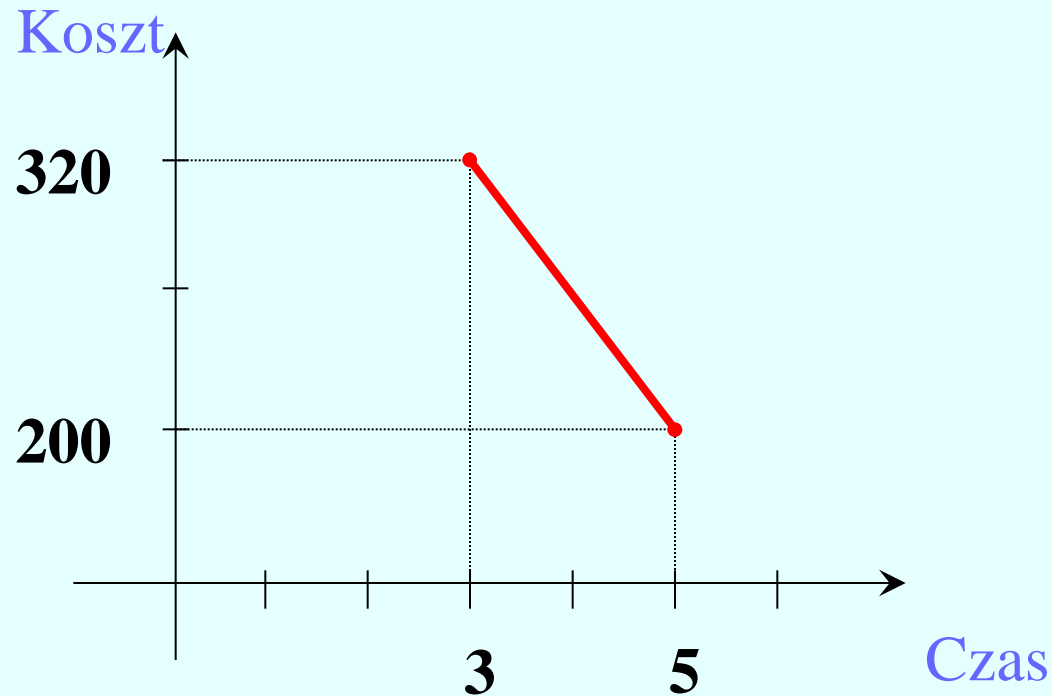
#### Przykład 7.4

Czynność	Czas normalny	Czas przysp. realizacji	Max. przysp.	Koszt normalny	Koszt przysp. realizacji	Koszt przysp. o jedn.
A	5	3	2	200	320	60
B	7	4	3	260	395	45
C	6	4	2	220	330	55
D	8	5	3	300	450	50
E	3	2	1	150	215	65
F	4	3	1	150	210	60
G	2	1	1	100	170	70
H	5	3	2	200	330	65

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.2. Przyspieszenie realizacji czynności (2/2)

#### Czynność A



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (1/11)

#### *Sformułowanie zadania*

Czas krytyczny realizacji projektu wynosi 20. Określić taki sposób przyspieszenia czynności, by zminimalizować koszt przyspieszenia przy zadanym czasie dyrektywnym trwania projektu równym 15.

$x_i$  - ( $i = 1, \dots, 6$ ) momenty zaistnienia zdarzeń 1 - 6,

$y_A, \dots, y_H$  - czasy przyspieszenia realizacji czynności A - H.

#### Koszt przyspieszenia projektu:

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \rightarrow \min$$

#### Czas dyrektywny:

$$x_6 \leq 15$$

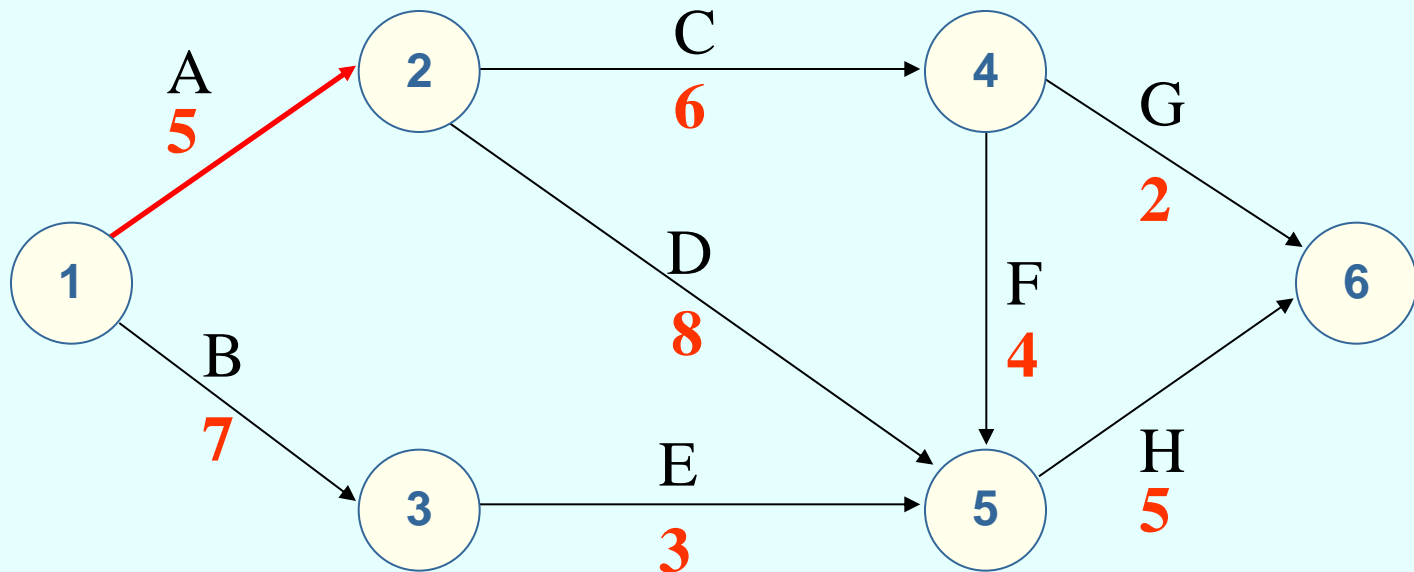
## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (2/11)

#### Odwzorowanie struktury sieci w układ nierówności

$$x_2 \geq 5 - y_A + x_1$$

moment zaistnienia zdarzenia 2      czas normalny      przyspieszenie czynności A      moment rozpoczęcia czynności A



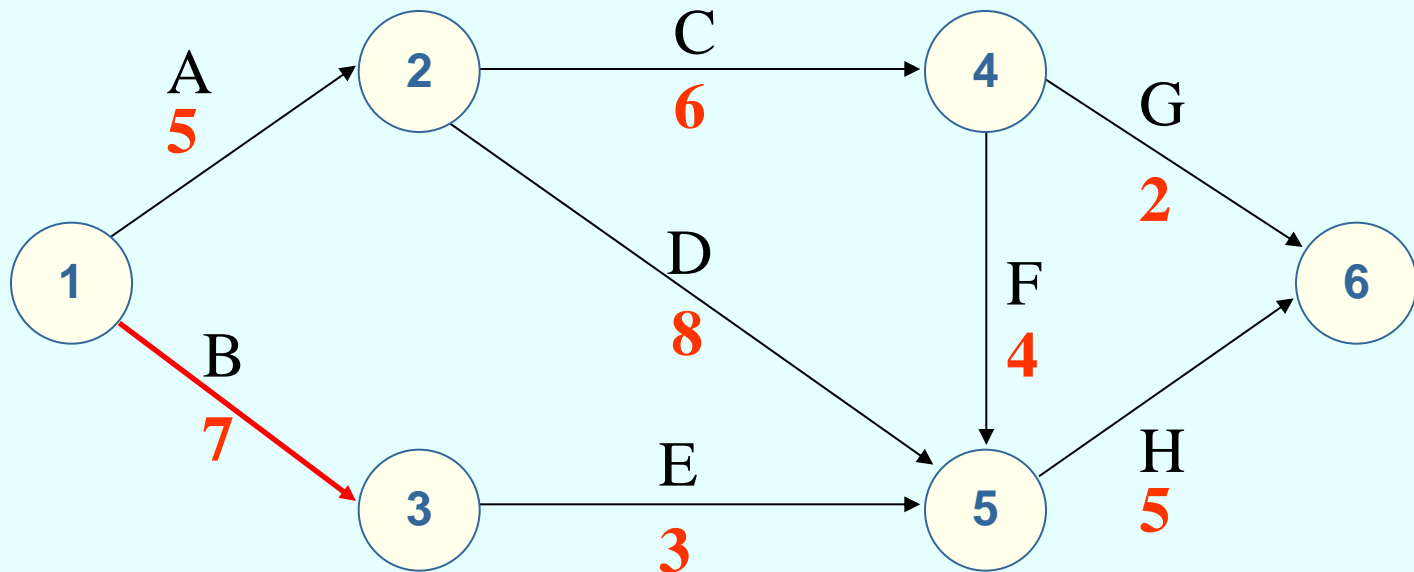
## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (3/11)

Odwzorowanie struktury sieci w układ nierówności (c.d.)

$$x_3 \geq 7 - y_B + x_1$$

moment zaistnienia zdarzenia 3      czas normalny      przyspieszenie czynności B      moment rozpoczęcia czynności B



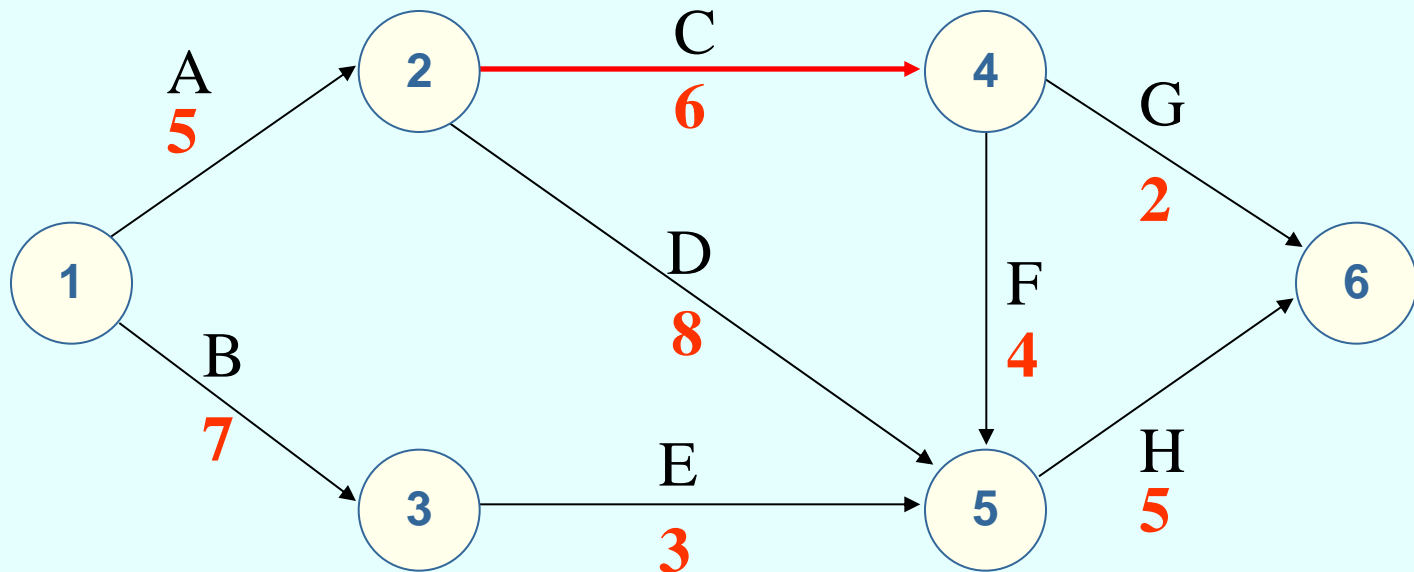
## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (4/11)

Odwzorowanie struktury sieci w układ nierówności (c.d.)

$$x_4 \geq 6 - y_C + x_2$$

moment zaistnienia zdarzenia 4      czas normalny      przyspieszenie czynności C      moment rozpoczęcia czynności C



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (5/11)

#### Odwzorowanie struktury sieci w układ nierówności (c.d.)

$$x_5 \geq 8 - y_D + x_2$$

moment zaistnienia zdarzenia 5	czas normalny	przyspieszenie czynności D	moment rozpoczęcia czynności D
--------------------------------------	------------------	-------------------------------	--------------------------------------

$$x_5 \geq 3 - y_E + x_3$$

moment zaistnienia zdarzenia 5	czas normalny	przyspieszenie czynności E	moment rozpoczęcia czynności E
--------------------------------------	------------------	-------------------------------	--------------------------------------

$$x_5 \geq 4 - y_F + x_4$$

moment zaistnienia zdarzenia 5	czas normalny	przyspieszenie czynności F	moment rozpoczęcia czynności F
--------------------------------------	------------------	-------------------------------	--------------------------------------

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (6/11)

#### *Odwzorowanie struktury sieci w układ nierówności (c.d.)*

$$x_6 \geq 2 - y_G + x_4$$

moment zaistnienia zdarzenia 6	czas normalny	przyspieszenie czynności G	moment rozpoczęcia czynności G
--------------------------------------	------------------	-------------------------------	--------------------------------------

$$x_6 \geq 5 - y_H + x_5$$

moment zaistnienia zdarzenia 6	czas normalny	przyspieszenie czynności H	moment rozpoczęcia czynności H
--------------------------------------	------------------	-------------------------------	--------------------------------------

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (7/11)

#### Ograniczenie możliwości przyspieszenia czynności

Czynność	Czas normalny	Czas przysp.	Max. przyspieszenie
A	5	3	2
B	7	4	3
C	6	4	2
D	8	5	3
E	3	2	1
F	4	3	1
G	2	1	1
H	5	3	2

$$0 \leq y_A \leq 2$$

$$0 \leq y_B \leq 3$$

$$0 \leq y_C \leq 2$$

$$0 \leq y_D \leq 3$$

$$0 \leq y_E \leq 1$$

$$0 \leq y_F \leq 1$$

$$0 \leq y_G \leq 1$$

$$0 \leq y_H \leq 2$$

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (8/11)

#### Zadanie programowania liniowego

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \rightarrow \min$$

$$x_6 \leq 15$$

$$-x_1 + x_2 + \quad \quad \quad y_A \quad \quad \quad \geq 5$$

$$-x_1 + \quad \quad x_3 + \quad \quad \quad y_B \quad \quad \quad \geq 7$$

$$-x_2 + \quad \quad \quad x_4 + \quad \quad \quad y_C \quad \quad \quad \geq 6$$

$$-x_2 + \quad \quad \quad x_5 + \quad \quad \quad y_D \quad \quad \quad \geq 8$$

$$\quad \quad -x_3 + \quad \quad \quad x_5 + \quad \quad \quad y_E \quad \quad \quad \geq 3$$

$$\quad \quad \quad x_4 + \quad \quad \quad x_5 + \quad \quad \quad y_F \quad \quad \quad \geq 4$$

$$\quad \quad \quad -x_4 \quad \quad \quad x_6 + \quad \quad \quad y_G \quad \quad \quad \geq 2$$

$$\quad \quad \quad -x_5 \quad \quad \quad x_6 + \quad \quad \quad y_H \geq 5$$

$$0 \leq y_A \leq 2 \quad \quad 0 \leq y_C \leq 2 \quad \quad 0 \leq y_E \leq 1 \quad \quad 0 \leq y_G \leq 1$$

$$0 \leq y_B \leq 3 \quad \quad 0 \leq y_D \leq 3 \quad \quad 0 \leq y_F \leq 1 \quad \quad 0 \leq y_H \leq 2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (9/11)

#### Zmodyfikowany harmonogram

Czynność	Czas trwania	ES	EF	LS	LF	Rezerwa
A	3 (5)	0	3	0	3	0 (0)
B	7 (7)	0	7	1	8	1 (5)
C	4 (6)	3	7	3	7	0 (0)
D	8 (8)	3	11	3	11	0 (2)
E	3 (3)	7	10	8	11	1 (5)
F	4 (4)	7	11	7	11	0 (0)
G	2 (2)	7	9	13	15	6 (7)
H	4 (5)	11	15	11	15	0 (0)

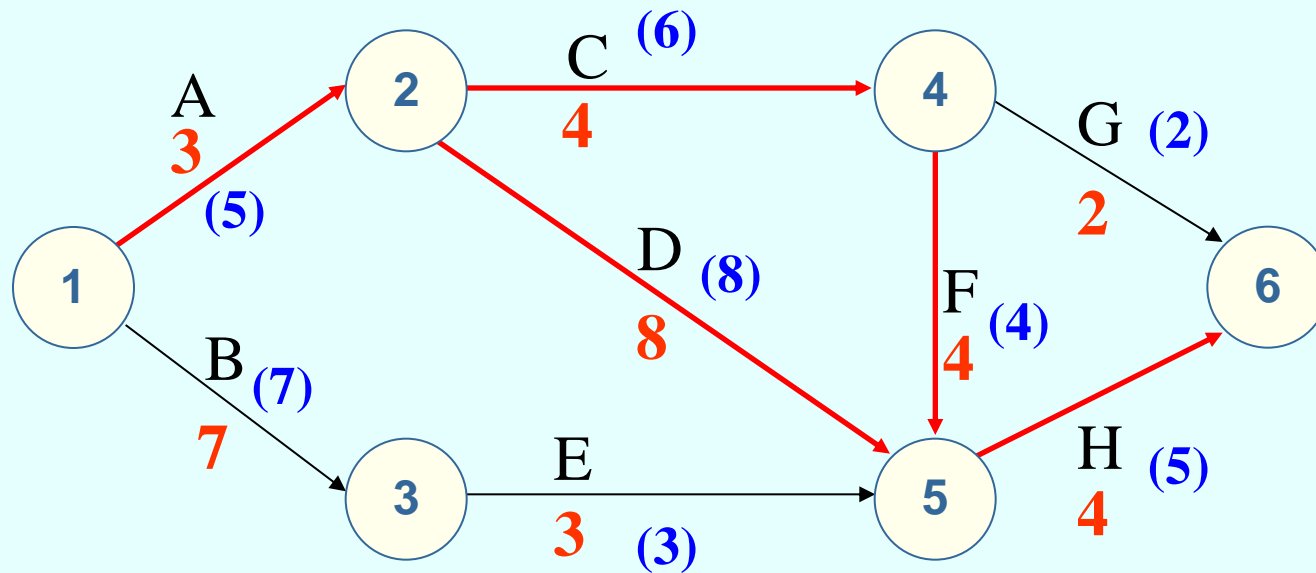
Czas realizacji projektu: 15

Koszt dodatkowy: 295

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (10/11)

#### Zmodyfikowany harmonogram (c.d.)



## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4.3. Minimalizacja kosztu realizacji projektu przy zadanym czasie dyrektywnym (11/11)

#### Analiza numeryczna

Czas dyrektywny	Koszt przyspieszenia	Wielkość przyspieszenia
19	55	$y_C = 1$
18	110	$y_C = 2$
17	170	$y_A = 1, y_C = 2$
16	230	$y_A = 2, y_C = 2$
15	295	$y_A = 2, y_C = 2, y_H = 1$
14	360	$y_A = 2, y_C = 2, y_H = 2$
13	470	$y_A = 2, y_C = 2, y_D = 1, y_F = 1$ $y_H = 2$
12		<b>Brak rozwiązania dopuszczalnego</b>

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4. 4. Minimalizacja czasu realizacji projektu przy zadanym koszcie (1/3)

#### *Sformułowanie zadania*

Określić taki sposób przyspieszenia czynności, by zminimalizować czas trwania projektu przy zadanym nieprzekraczalnym koszcie przyspieszenia wszystkich czynności, równym 360.

#### Czas trwania projektu:

$$x_6 \rightarrow \min$$

#### Koszt przyspieszenia projektu:

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \leq 360$$

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4. 4. Minimalizacja czasu realizacji projektu przy zadanym koszcie (2/3)

#### Zadanie programowania liniowego

$$x_6 \rightarrow \min$$

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \leq 360$$

$$x_2 + y_A \geq 5$$

$$x_3 + y_B \geq 7$$

$$-x_2 + x_4 + y_C \geq 6$$

$$-x_2 + x_5 + y_D \geq 8$$

$$-x_3 + x_5 + y_E \geq 3$$

$$x_4 + x_5 + y_F \geq 4$$

$$-x_4 + x_6 + y_G \geq 2$$

$$-x_5 + x_6 + y_H \geq 5$$

$$0 \leq y_A \leq 2 \quad 0 \leq y_C \leq 2 \quad 0 \leq y_E \leq 1 \quad 0 \leq y_G \leq 1$$

$$0 \leq y_B \leq 3 \quad 0 \leq y_D \leq 3 \quad 0 \leq y_F \leq 1 \quad 0 \leq y_H \leq 2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

## 7.4. Zarządzanie zasobami środków

### 7.4. 4. Minimalizacja czasu realizacji projektu przy zadanym koszcie (3/3)

#### Analiza numeryczna

Wielkość dodatkowej kwoty	Czas realizacji projektu	Wielkość przyspieszenia
60	18,90	$y_C = 1,10$
120	17,83	$y_A = 0,17, y_C = 2,00$
180	16,83	$y_A = 1,67, y_C = 2,00$
240	15,85	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_H = 0,15$
300	14,92	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_H = 1,08$
360	14,00	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_H = 2,00$
420	13,45	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_D = 0,54,$ $y_F = 0,54, y_H = 2,00$
480	13,00	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_D = 1,00,$ $y_F = 1,00, y_H = 2,00$

### *Oszacowania czasów trwania czynności*

- **czas optymistyczny  $a$**  realizacji czynności w okolicznościach sprzyjających
- **czas najbardziej prawdopodobny  $m$**  realizacji czynności w warunkach normalnych
- **czas pesymistyczny  $b$**  realizacji czynności w warunkach niesprzyjających

### Oczekiwany czas trwania czynności i jego wariancja

$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

## 7.5. Metoda PERT

### 7.5.1 Oczekiwany czas realizacji projektu i jego wariancja (1/1)

Przebieg obliczeń

$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

Czynność	a	m	b	$\bar{t}$	$\sigma^2$
A	3	4	11	5	1,78
B	5	6,5	11	7	1,00
C	4,5	5,5	9,5	6	0,69
D	6	7	14	8	1,78
E	2	3	4	3	0,11
F	3	4	5	4	0,11
G	1	1,5	5	2	0,44
H	3,5	4,5	8,5	5	0,69

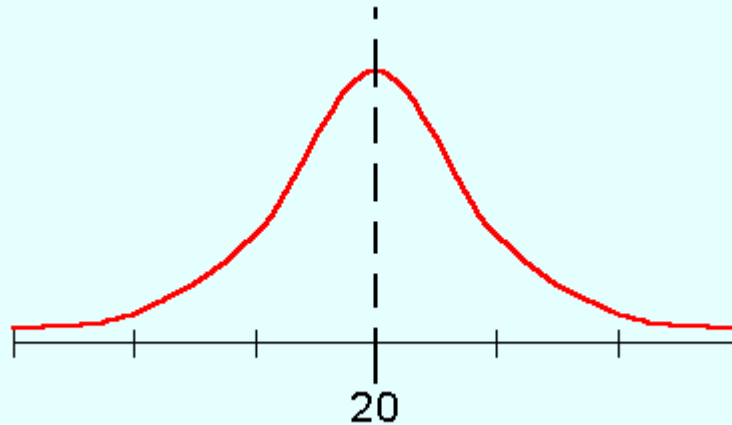
$$\bar{t} = 5 + 6 + 4 + 5 = 20 \quad \sigma^2 = 1,78 + 0,69 + 0,11 + 0,69 = 3,27$$

$$\sigma = \sqrt{3,27} = 1,81$$

## 7.5. Metoda PERT

### 7.5.2. Prawdopodobieństwo realizacji projektu w zadanym czasie (1/1)

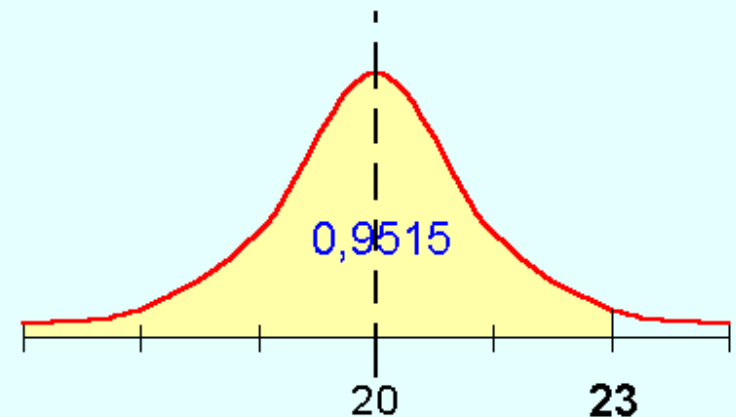
Czas realizacji projektu  $t = 23$



$$z = \frac{t - \bar{t}}{\sigma}$$

$$z = \frac{23 - 20}{1,81} = 1,66$$

z	...	0,05	0,06	0,07	...
...	...	...	...	...	...
1,5	...	0,9394	0,9406	0,9418	...
1,6	...	0,9505	0,9515	0,9525	...
1,7	...	0,9599	0,9608	0,9616	...
...	...	...	...	...	...



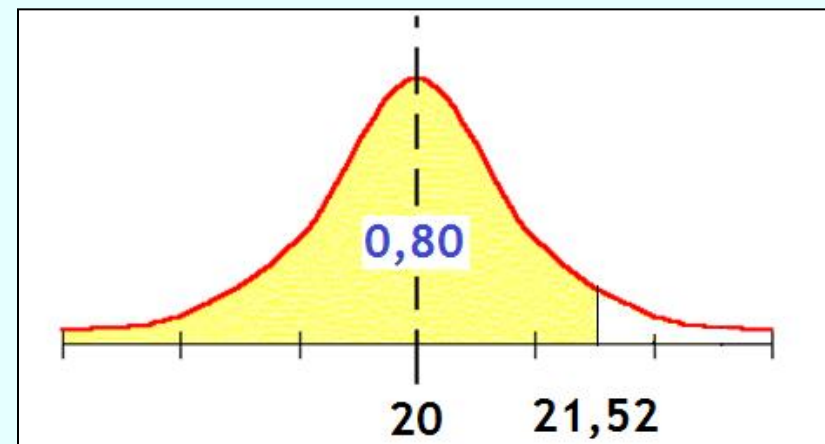
## 7.5. Metoda PERT

### 7.5.3. Czas realizacji projektu z zadaniem prawdopodobieństwem (1/1)

*Prawdopodobieństwo 0.80*

p	0	0,01	0,02	0,03	...
0,5	...	...	...	...	...
0,6	0,2533	0,2793	0,3055	0,3319	...
0,7	0,5244	0,5534	0,5828	0,6128	...
0,8	0,8416	0,8779	0,9154	0,9542	...
0,9	1,2816	1,3408	1,4051	1,4758	...

$$0,842 = \frac{x - 20}{1,81}$$



## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.1. Wdrożenie komputerowego systemu zamówień w firmie (1/5)

#### Przykład 7.6.

Czynność	Opis czynności	Czynność poprzedzająca
A	Określenie potrzeb	żadna
B	Propozycje systemów	żadna
C	Wybór systemu	A, B
D	Zamówienie systemu	C
E	Projekt wnętrza	C
F	Realizacja projektu wnętrza	E
G	Projekt „interface” komputera	C
H	Instalacja komputerowa	D, F, G
I	Instalacja systemu	D, F
J	Szkolenie operatorów	H
K	Testowanie całego systemu	I, J

## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.1. Wdrożenie komputerowego systemu zamówień w firmie (2/5)

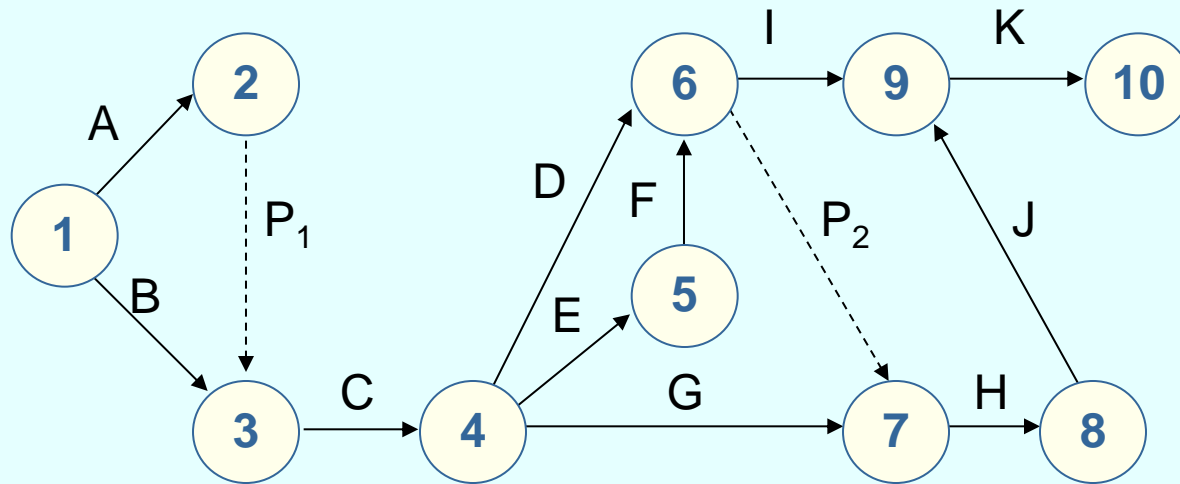
#### Czasy trwania czynności

Czynność	Opis czynności		
	optymistyczny	Najbardziej prawdopodobny	pesymistyczny
A	6	7	9
B	9	10	11
C	4	5	6
D	10	11	12
E	10	12	14
F	5	7	9
G	5	7	15
H	4	5	6
I	5	6	13
J	3	5	7
K	3	5	5

## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.1. Wdrożenie komputerowego systemu zamówień w firmie (3/5)

#### Sieć czynności



#### Rozwiązanie optymalne

Oczekiwany czas realizacji projektu: 48

Wariancja czasu realizacji projektu: 1,8

Zakończenie projektu w czasie 47 tygodni - prawdopodobieństwo = 0,23

Zakończenie projektu z prawdopodobieństwem 0,80 -

- czas realizacji = 49,1 tygodnia

## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.1. Wdrożenie komputerowego systemu zamówień w firmie (4/5)

#### *Przyspieszenie realizacji projektu*

Czynność	Czasy		Koszty realizacji	
	normalny	przyspieszony	normalny	przyspieszony
A	7	6	70	85
B	10	9	100	115
C	5	4	50	65
D	11	10	110	125
E	12	11	120	135
F	7	6	70	85
G	8	7	80	95
H	5	4	50	65
I	7	6	70	85
J	5	4	50	65
K	7	6	70	85

## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.1. Wdrożenie komputerowego systemu zamówień w firmie (5/5)

#### *Rozwiązanie optymalne*

Czas normalny - 48 tygodni

Realizacja projektu w czasie 47 tygodni

$$y_K = 1, \text{ koszt przyspieszenia} = 15$$

Realizacja projektu w czasie 41 tygodni

$$y_B = 1, y_C = 1, y_E = 1, y_F = 1, y_H = 1, y_J = 1, y_K = 1, \\ \text{koszt przyspieszenia} = 105$$

## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.2. Poszukiwanie czasu krytycznego jako zadanie PL (1/1)

#### Przykład 7.7

$$x_6 \rightarrow \min$$

$$x_2 \geq 5 + x_1$$

$$x_3 \geq 7 + x_1$$

$$x_4 \geq 6 + x_2$$

$$x_5 \geq 8 + x_2$$

$$x_5 \geq 3 + x_3$$

$$x_5 \geq 4 + x_4$$

$$x_6 \geq 2 + x_4$$

$$x_6 \geq 5 + x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

#### Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 12, x_4 = 11, x_5 = 15, x_6 = 20$$

Metoda simpleks wyznacza momenty najpóźniejszego zaistnienia wszystkich zdarzeń

## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.3. Przyspieszenie realizacji projektu jako zadanie dwukryterialne (1/3)

#### *Przykład 7.8*

**Cel** - optymalny rozdział środków na przyspieszenie realizacji projektu.

#### **Funkcje kryterium**

1. Minimalizacja kosztu przyspieszenia projektu.
2. Minimalizacja czasu trwania projektu.

#### **Warunki ograniczające**

- warunki opisujące strukturę projektu,
- warunki opisujące możliwości przyspieszenia każdej czynności,
- warunki nieujemności.

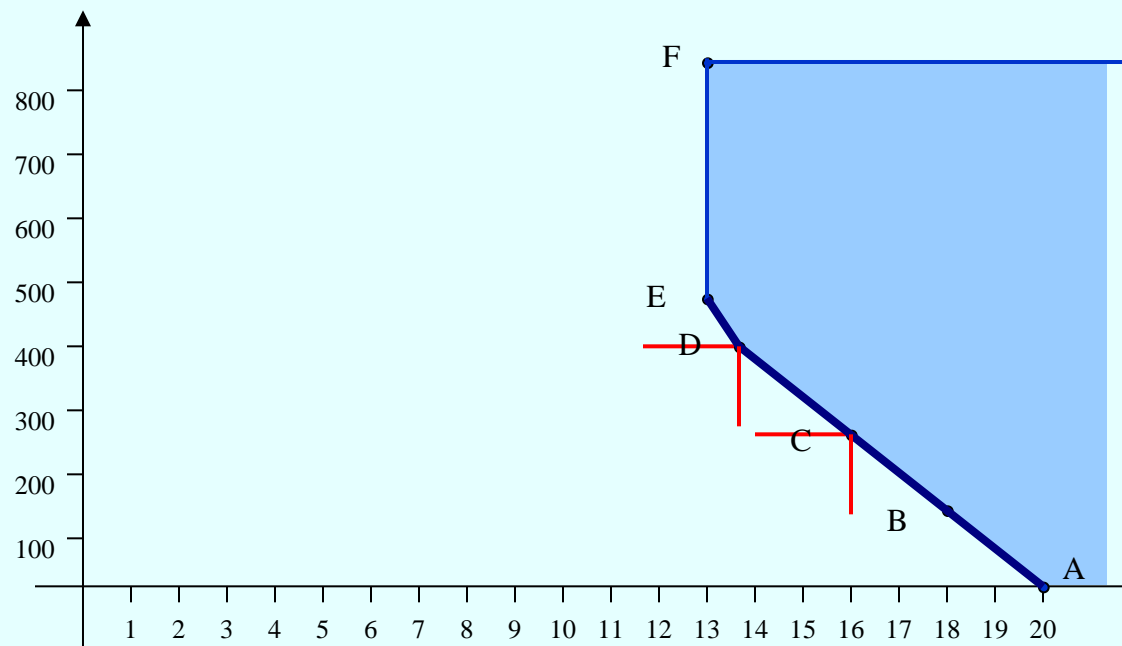


## 7.6. Przykłady wykorzystania metod zarządzania projektami

### 7.6.3. Przyspieszenie realizacji projektu jako zadanie dwukryterialne (3/3)

*Interpretacja w przestrzeni kryterialnej*

A (20, 0)	C (16, 230)	E (13, 470)
B (18, 110)	D (14, 360)	F (13, 840)



## Pora na relaks

