

# Управление проектами

---



Т. Тжаскалик

*Введение в исследование операций  
с применением компьютера*

# Проект

---

Проект – подлежащая решению задача, состоящая из обособленных работ, которые должны выполняться в заданной последовательности и в установленные сроки.

# Построение сетевого графика (1)

## Пример 7.1

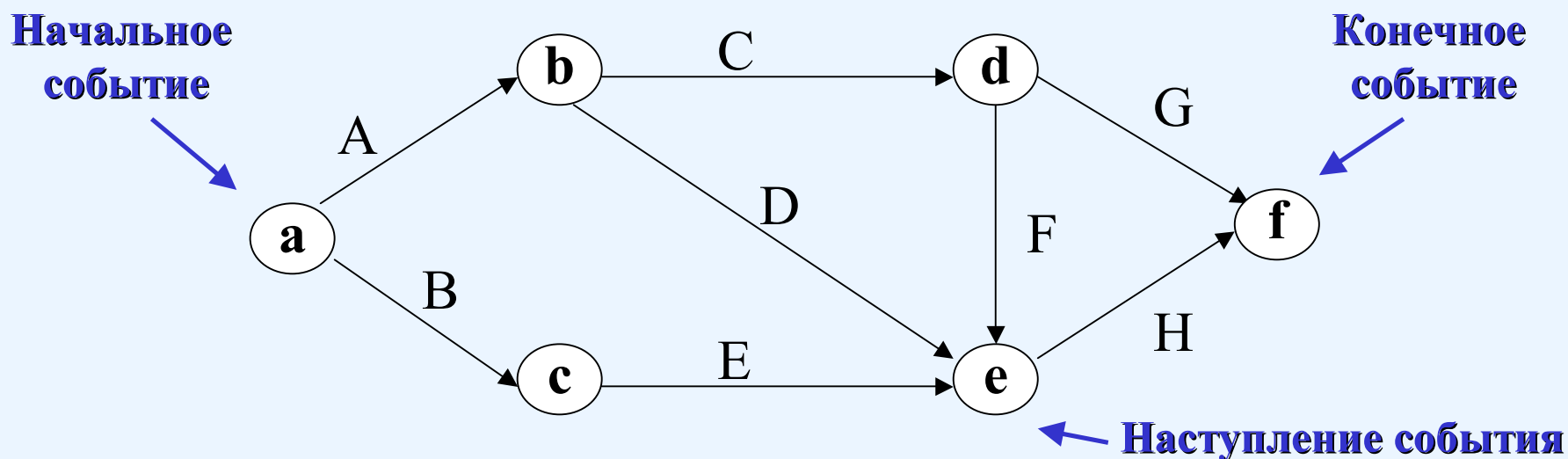
### Список работ:

- А** - разработка конструктивных решений,
- В** - анализ вариантов производства нового изделия,
- С** - разработка технических проектов изготовления отдельных узлов,
- Д** - закупка материалов,
- Е** - анализ спроса,
- Ф** - создание прототипа,
- Г** - составление документации,
- Н** - выпуск первой серийной партии продукции,

Работа	Непосредственно предшествующая работа
А	-
В	-
С	А
Д	А
Е	В
Ф	С
Г	С
Н	Е, Д, Ф

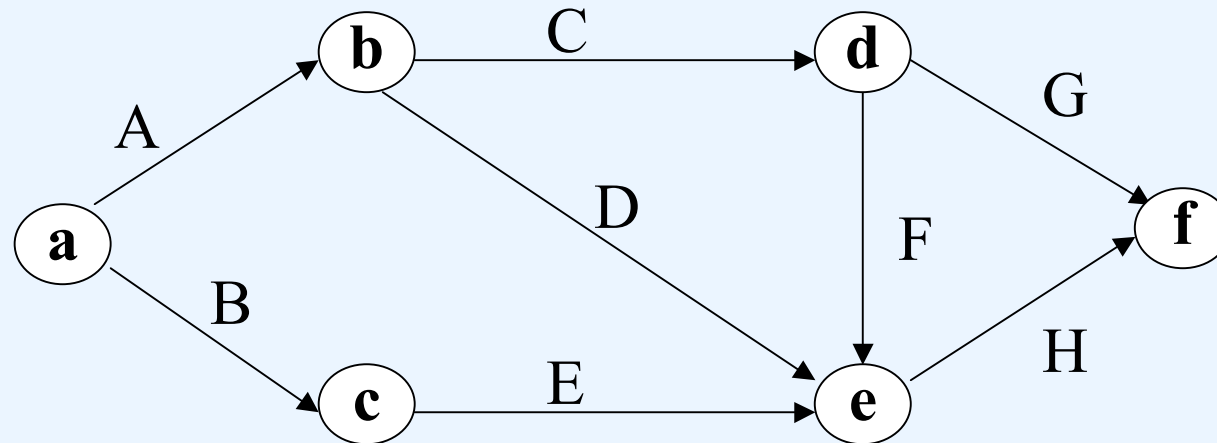
## Построение сетевого графика (2)

Работа	Непосредственно предшествующая работа
A	-
B	-
C	A
D	A
E	B
F	C
G	C
H	E, D, F

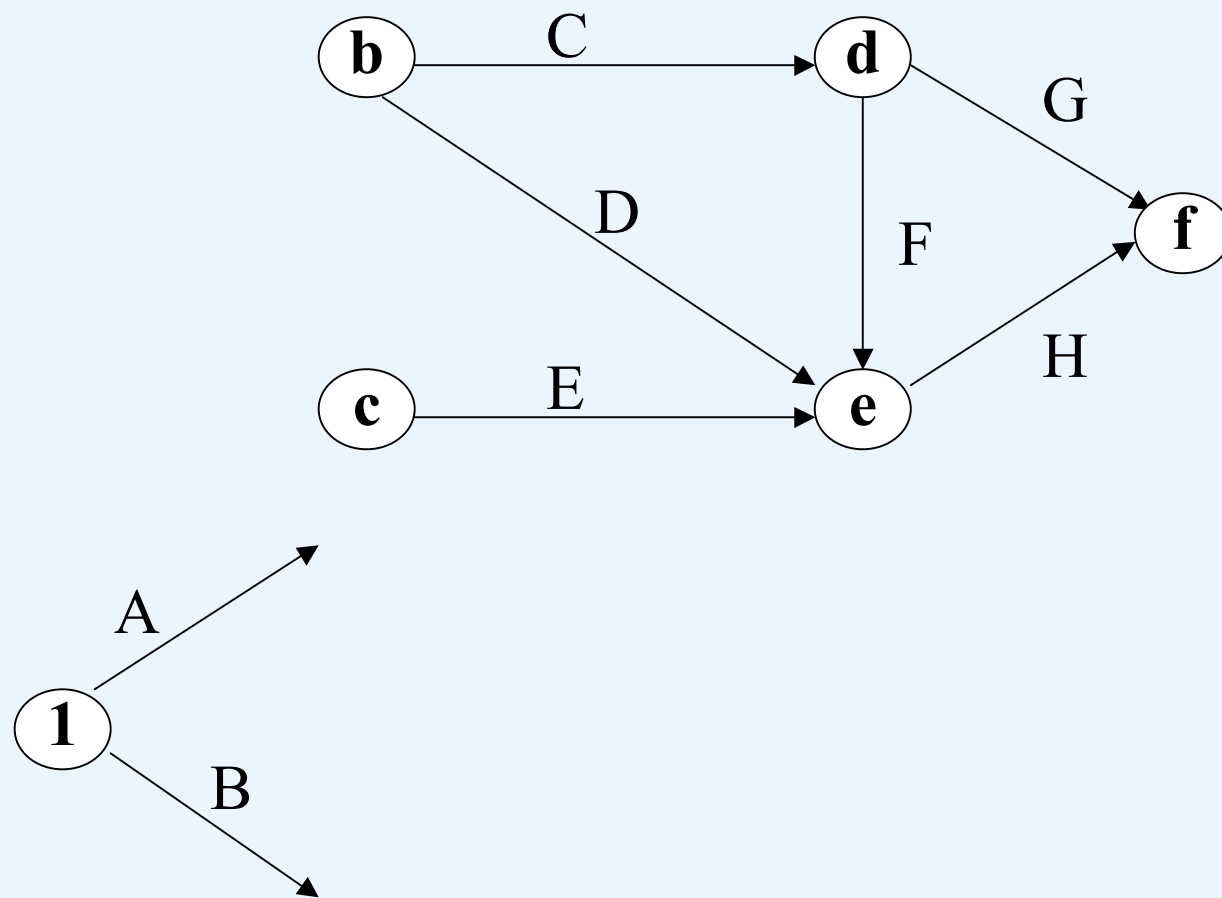


## Корректная нумерация событий (1)

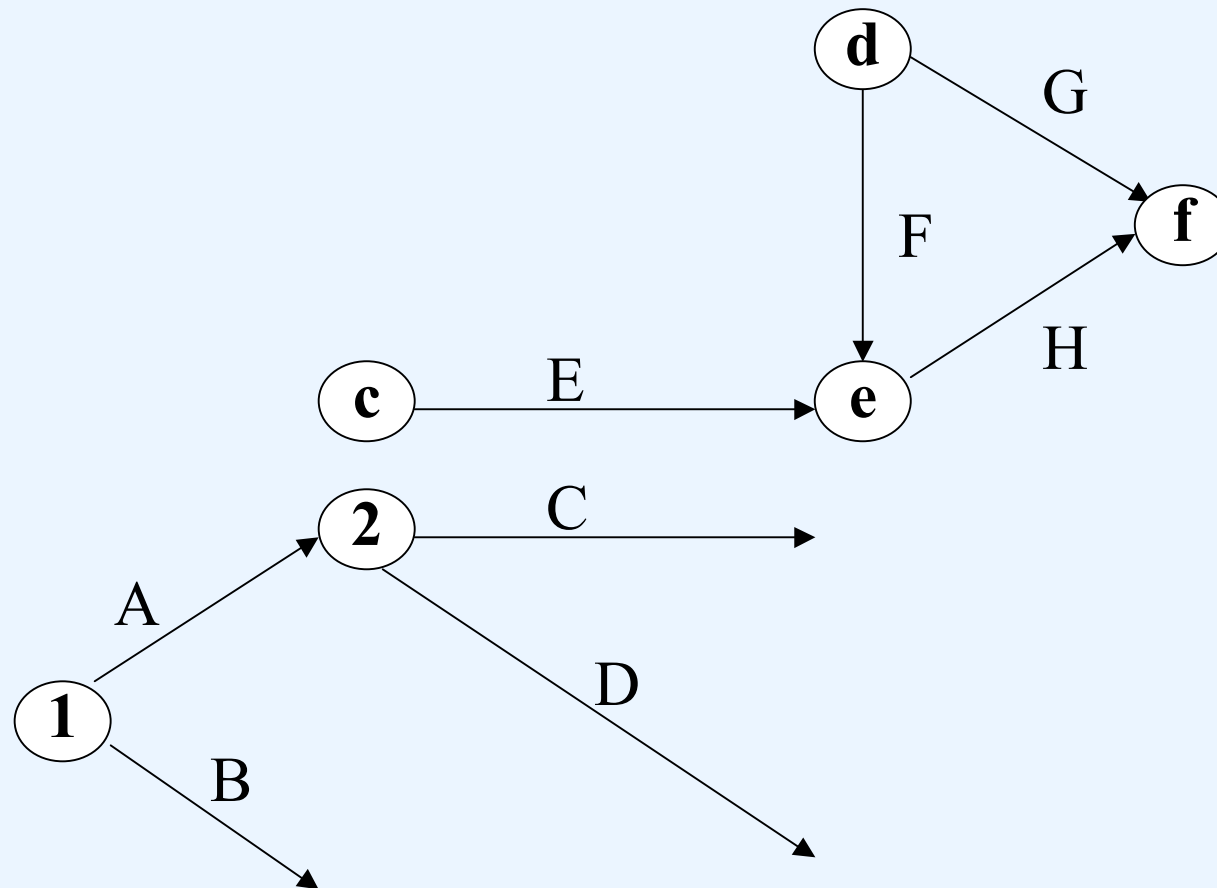
Номер события, с которого начинается любая работа, всегда меньше номера события, которым заканчивается эта работа.



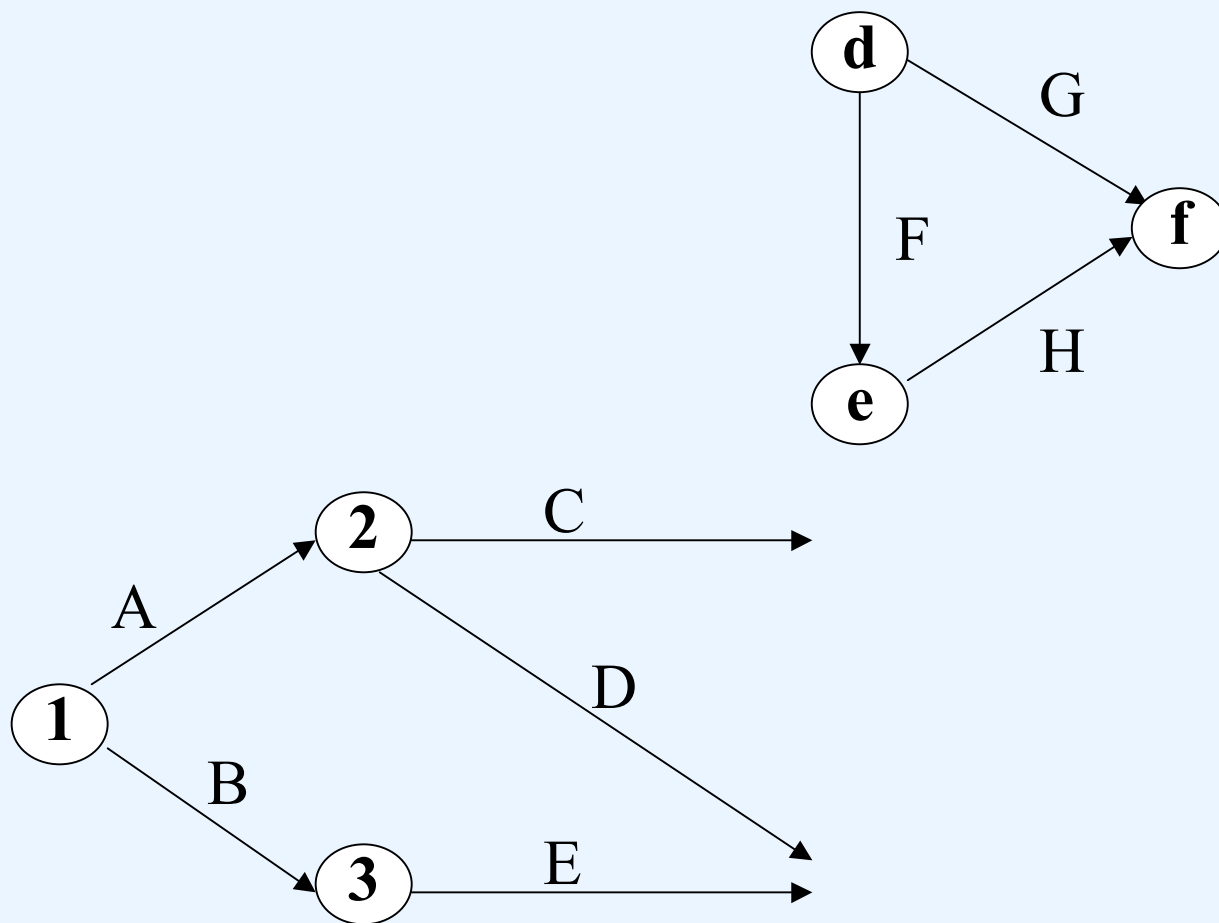
## Корректная нумерация событий (2)



## Корректная нумерация событий (3)

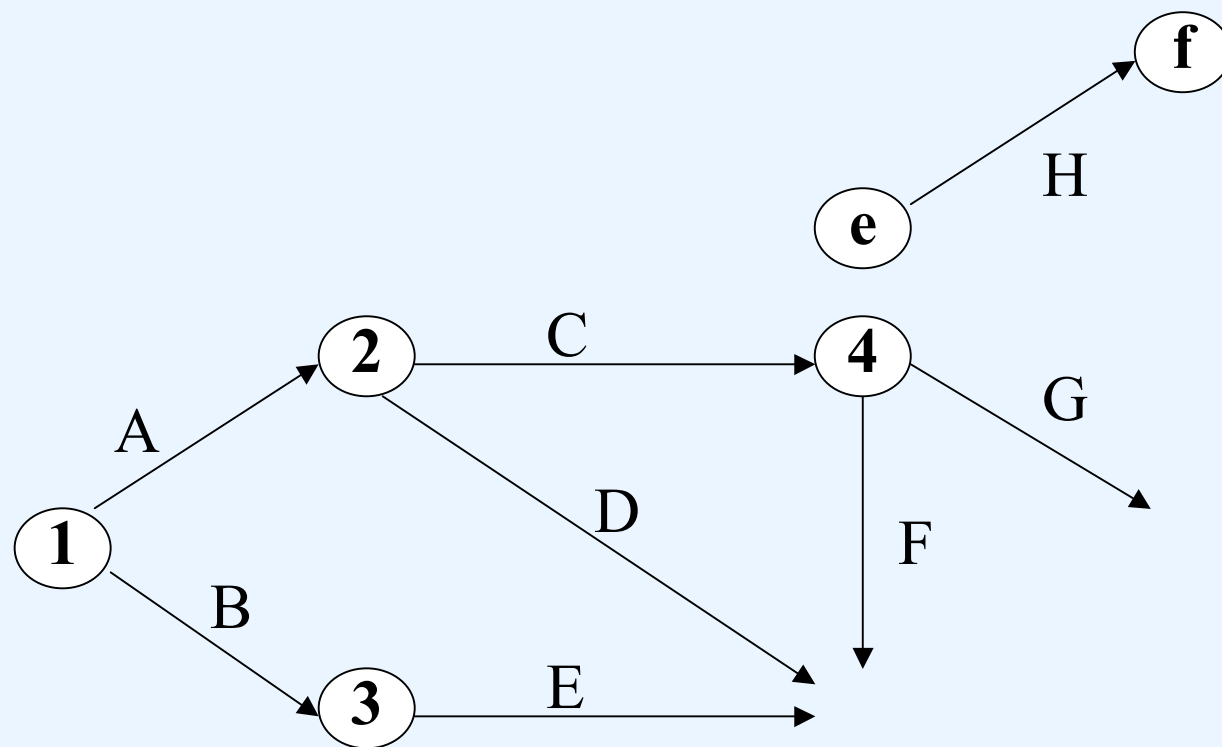


## Корректная нумерация событий (4)

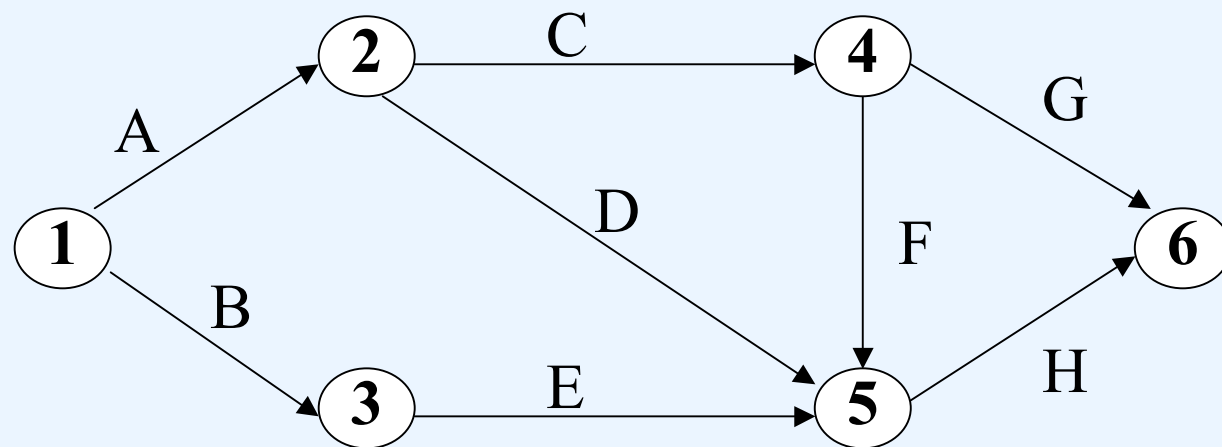




## Корректная нумерация событий (5)

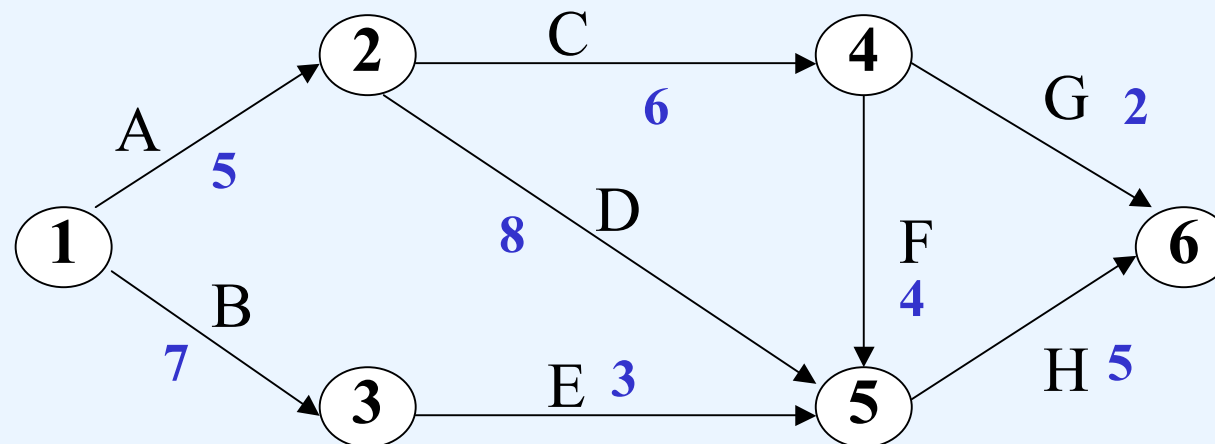


## Корректная нумерация событий (6)



# Метод критического пути (1)

## Основные понятия



	Путь	Время перехода	
<b>Критический путь</b> →	A C G	13	<b>←</b> Критическое время
	A C F H	20	
	A D H	18	
	B E H	15	

## **Метод критического пути (2)**

### **Постановка задачи**

1. Чему равно минимальное время реализации проекта (критическое время)?
2. Как выглядит оптимальный временной график проекта, определяющий самые ранние моменты начала и самые поздние моменты окончания каждой работы, при котором длительность реализации проекта будет минимальной?
3. Какие работы являются «критическими» и не допускают увеличение времени выполнения, чтобы не увеличить длительность реализации проекта в целом?
4. В какой степени время выполнения не критических работ может быть увеличено при условии, что длительность реализации проекта останется минимальной?

## **Шаг вперед (1)**

---

### **Самые ранние моменты**

**ES** - самый ранний момент начала работы (Earliest Start)

**EF** - самый ранний момент окончания работы (Earliest Finish)

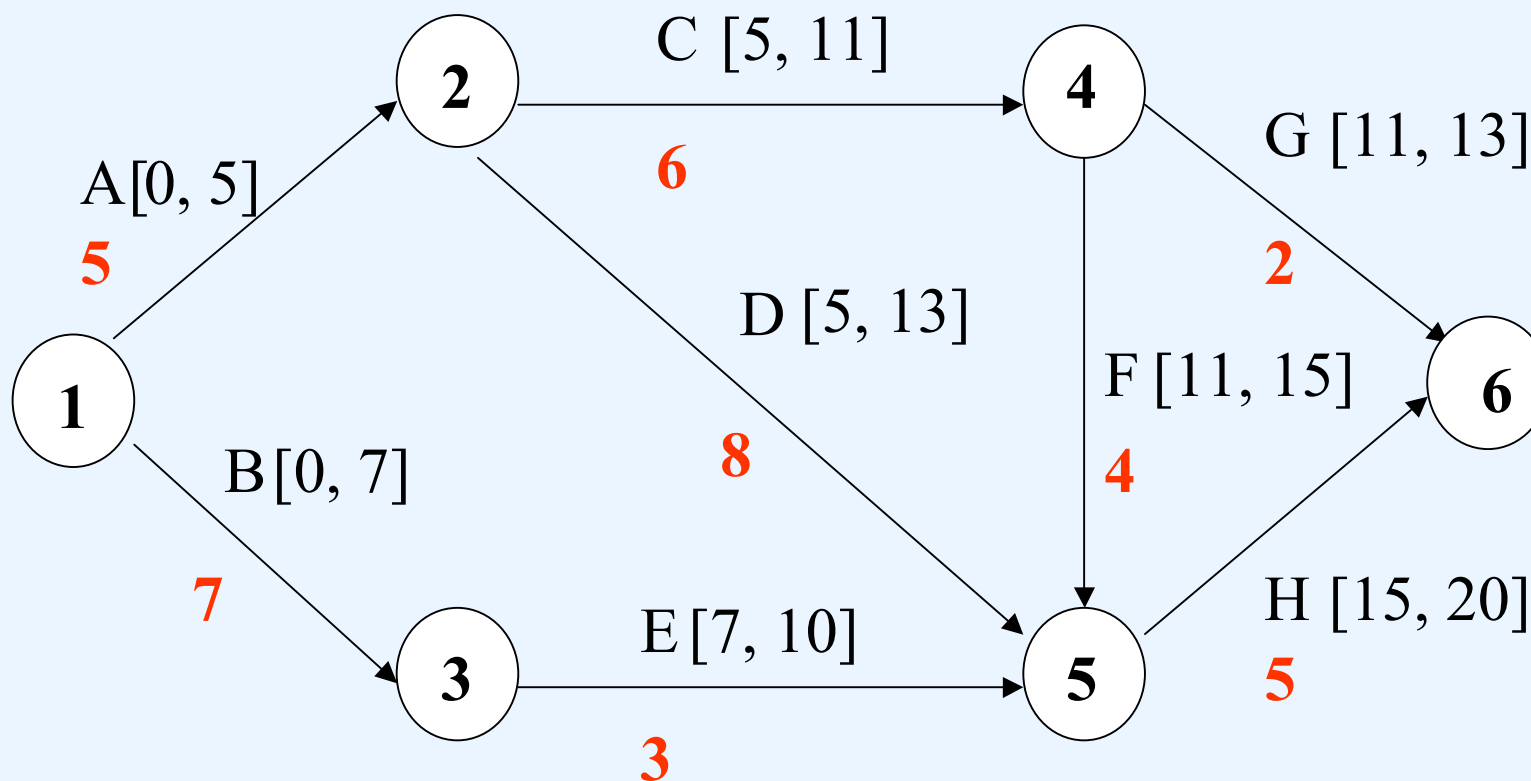
**t** - длительность выполнения рассматриваемой работы

$$\mathbf{EF = ES + t}$$

## Шаг вперед (2)

### Определение самых ранних моментов начала и окончания работ

$$EF = ES + t$$



## **Шаг назад (1)**

---

### **Самые поздние моменты**

**LS** - самый поздний момент начала работы (Latest Start)

**LF** - самый поздний момент окончания работы (Latest Finish)

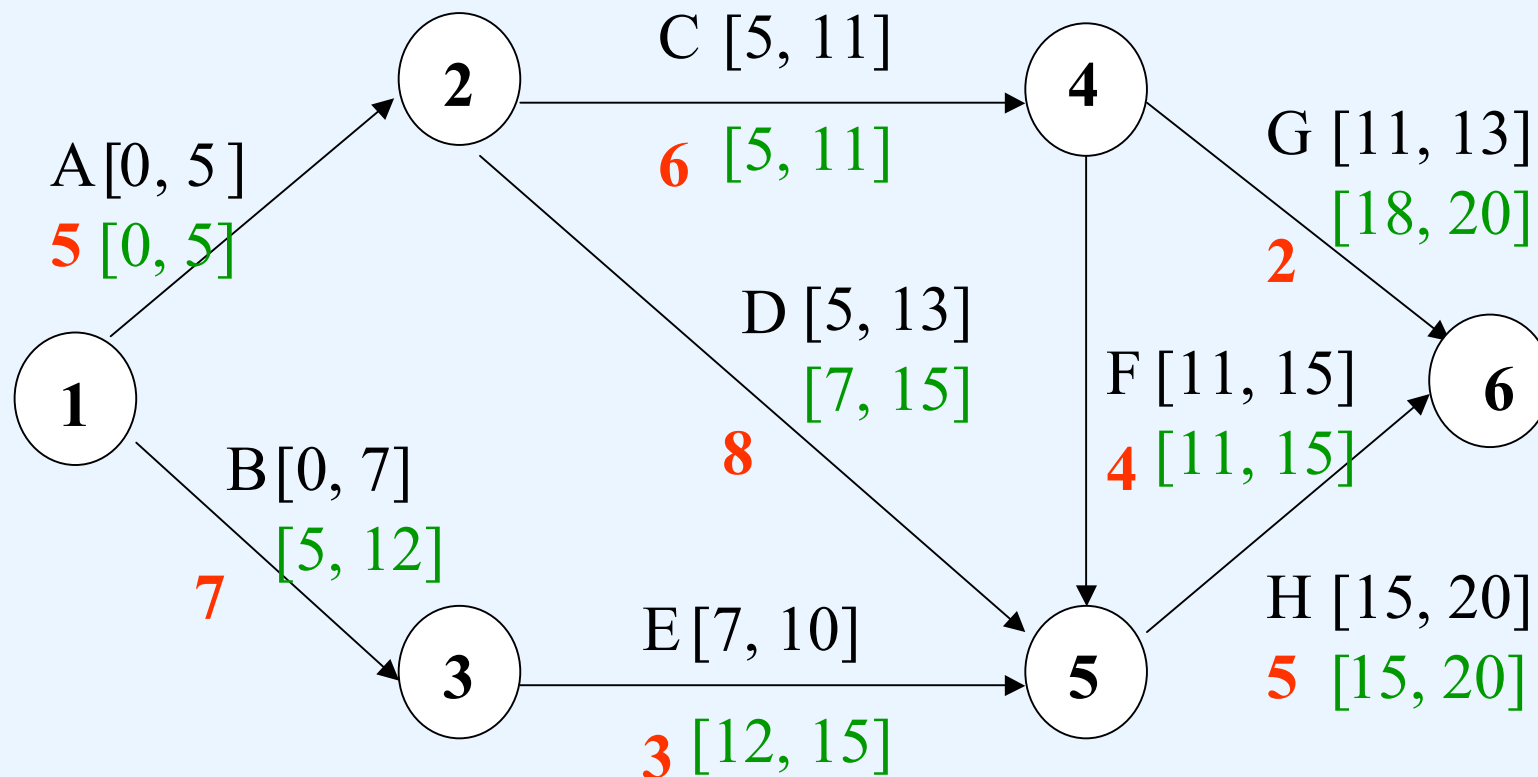
**t** - длительность выполнения рассматриваемой работы

$$\mathbf{LS = LF - t}$$

## Шаг назад (2)

### Определение самых поздних моментов начала и окончания работ

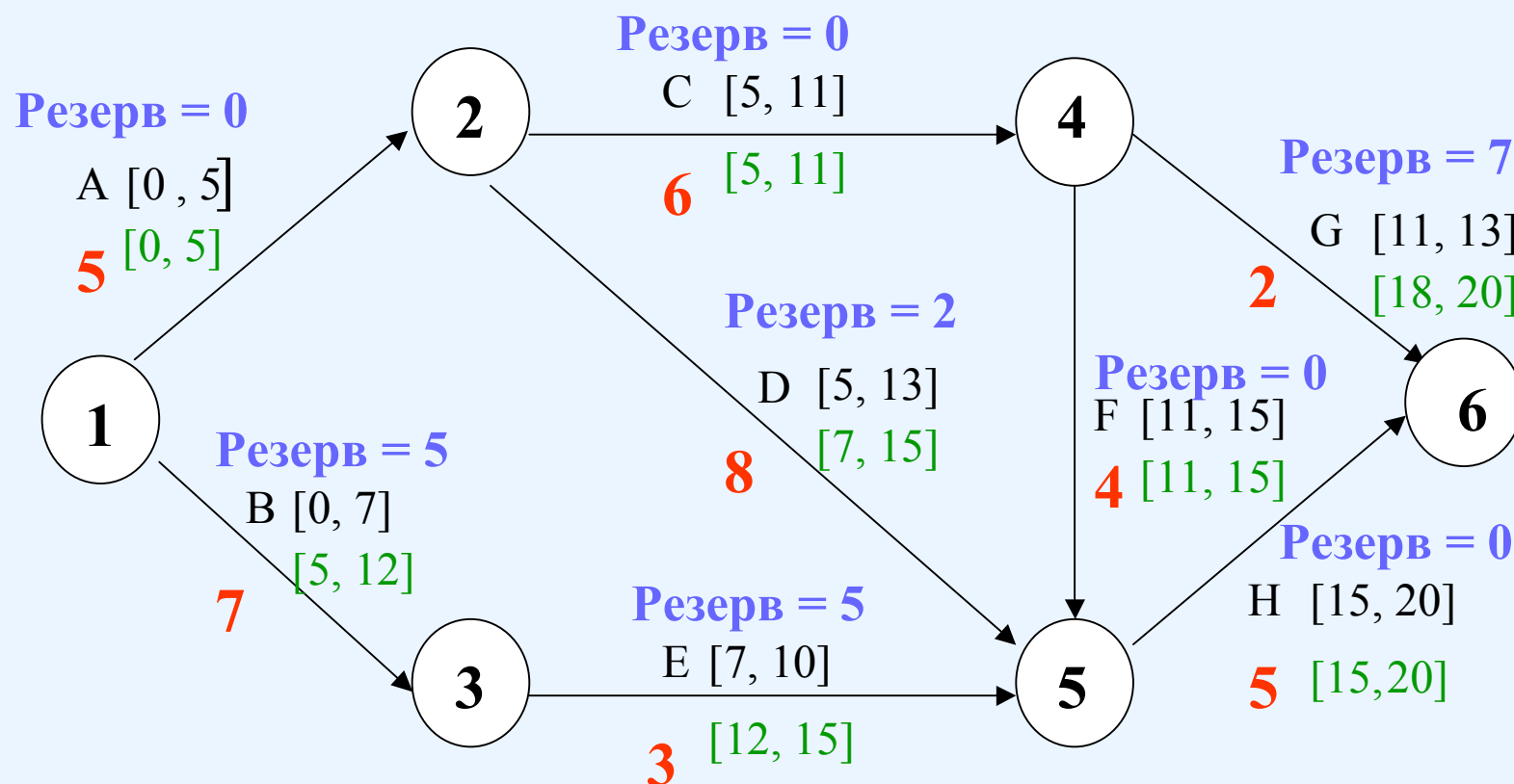
$$LS = LF - t$$



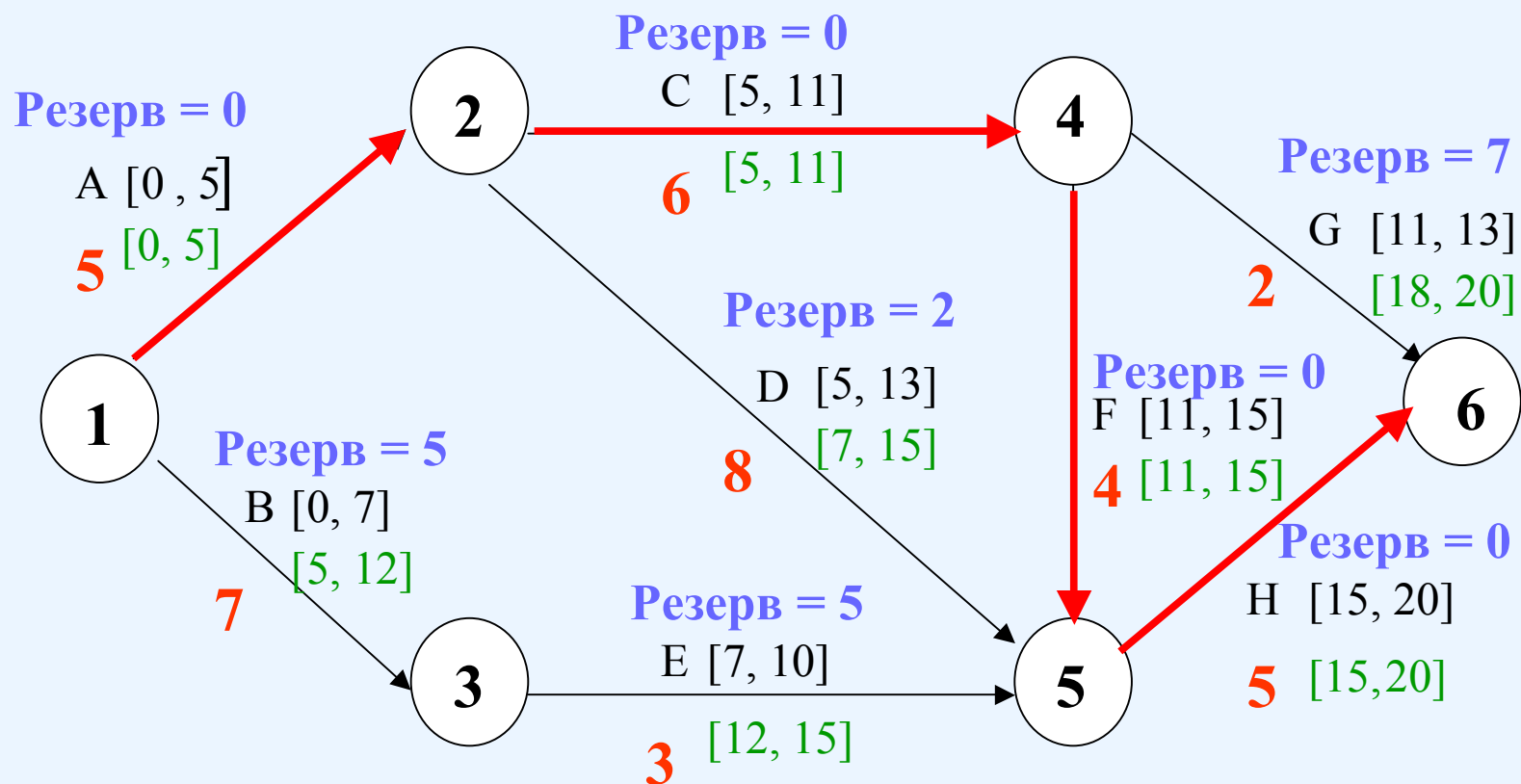


# Резервы времени

$$\text{Резерв} = \text{LS} - \text{ES} = \text{LF} - \text{EF}$$



# Критический путь

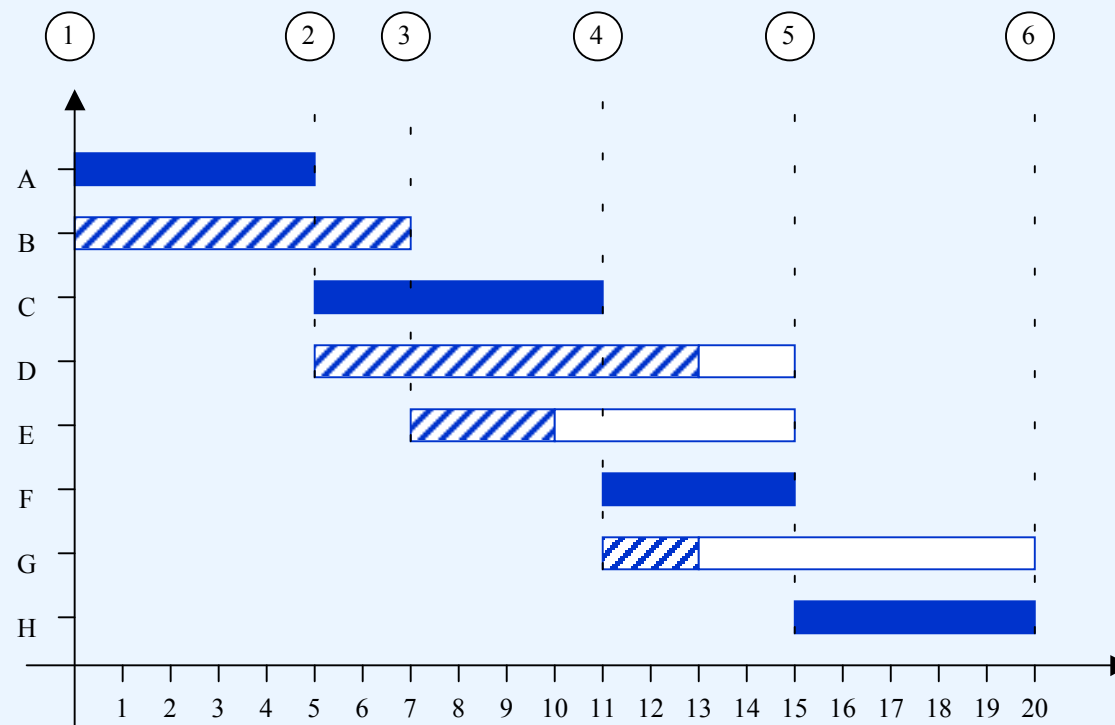


## Сводные результаты

Работа	Длит. вып-я	ES	EF	LS	LF	Резерв	Критич. работа
A	5	0	5	0	5	0	да
B	7	0	7	5	12	5	нет
C	6	5	11	5	11	0	да
D	8	5	13	7	15	2	нет
E	3	7	10	12	15	5	нет
F	4	11	15	11	15	0	да
G	2	11	13	18	20	7	нет
H	5	15	20	15	20	0	да

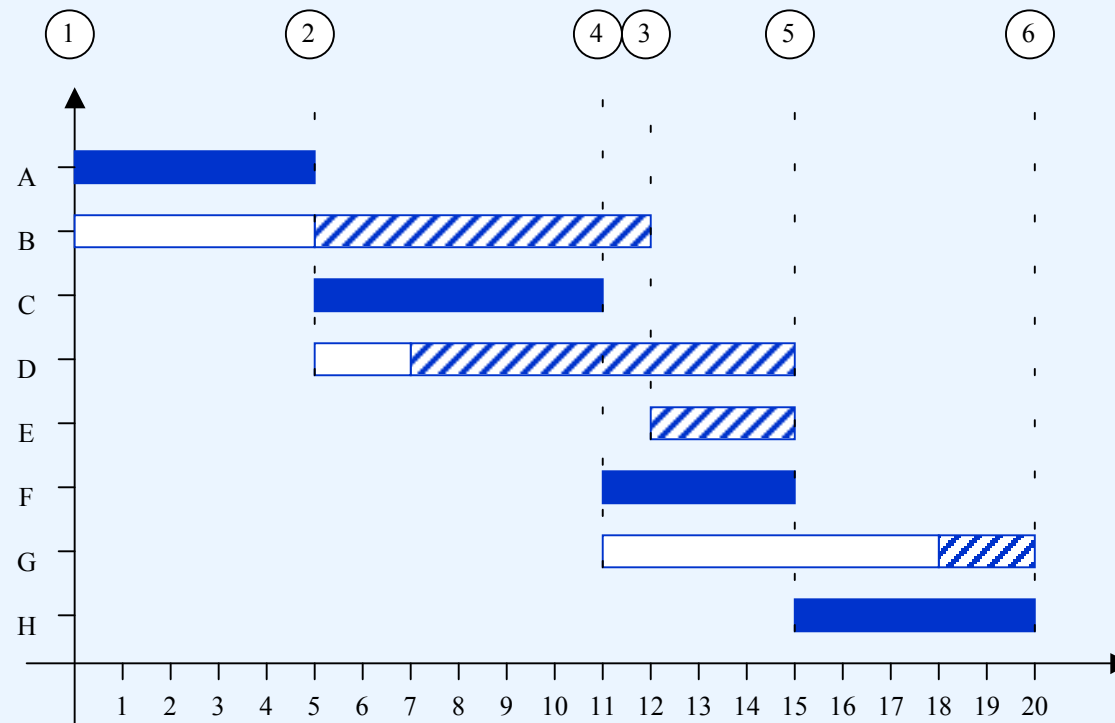
# Оптимальные временные диаграммы (1)

Начало и окончание всех работ  
в самые ранние моменты



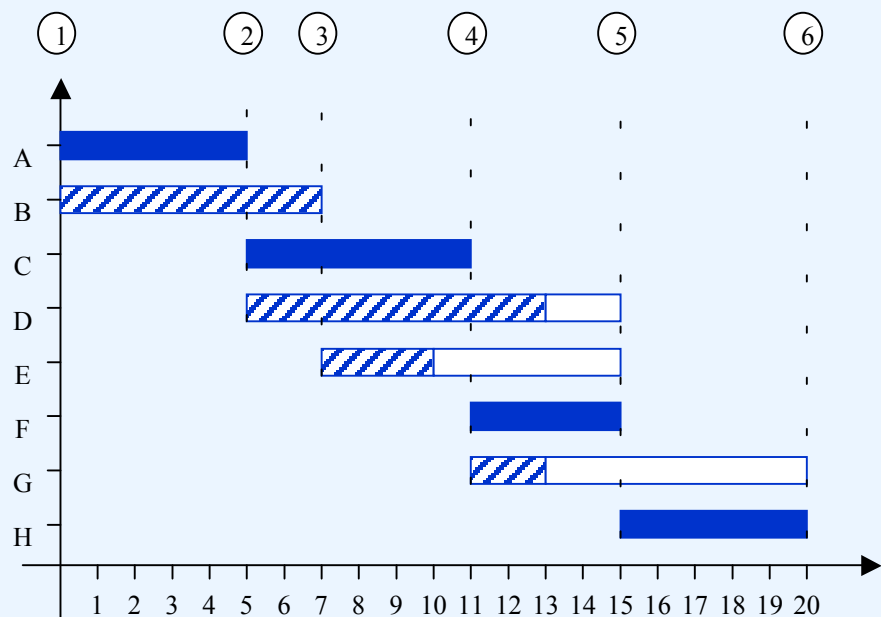
## Оптимальные временные диаграммы (2)

Начало и окончание всех работ  
в самые поздние моменты

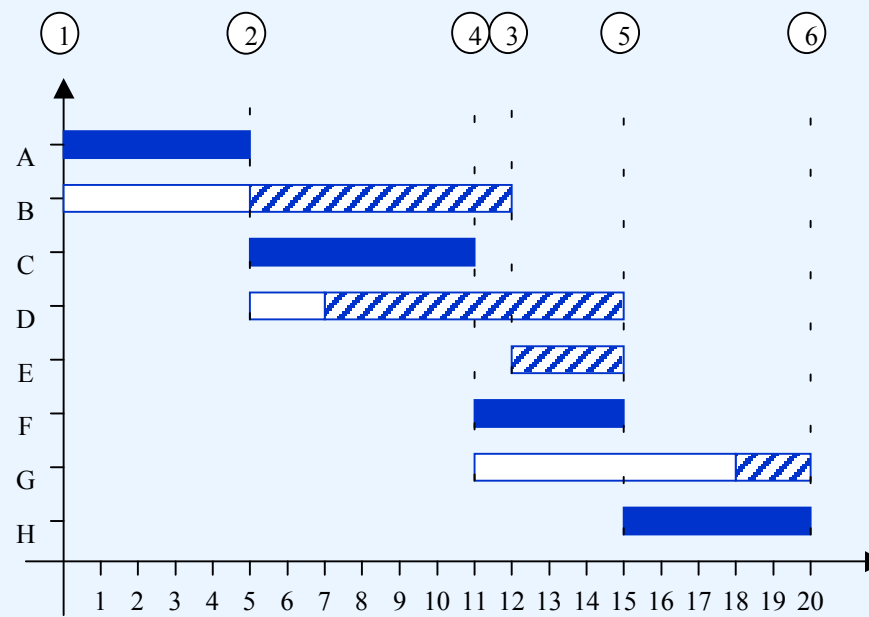


# Оптимальные временные диаграммы (3)

## Самые ранние моменты



## Самые поздние моменты



## Принципы построения сетевого графика

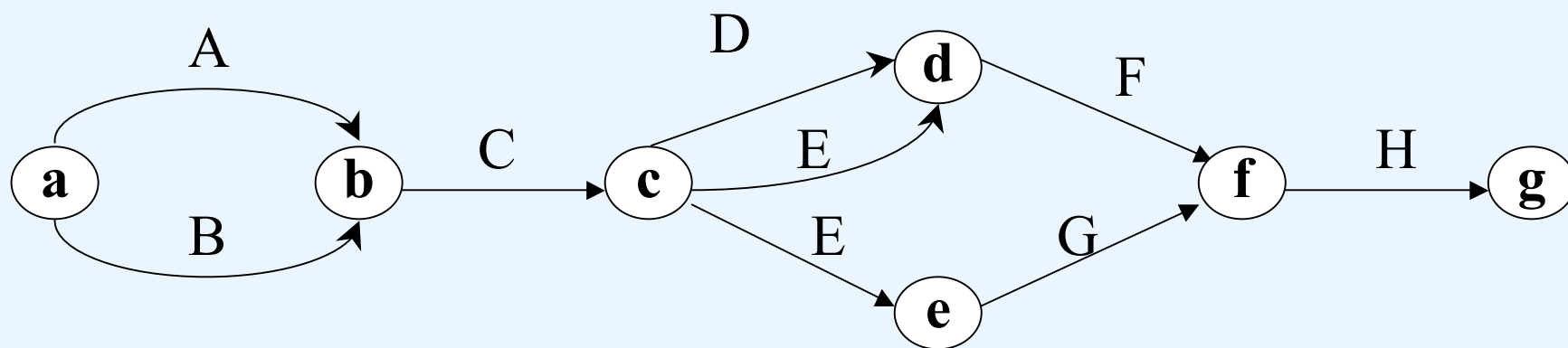
---

- ➔ Сетевой график реализации проекта должен быть ациклическим графом (не содержащим циклов и петель) и должен содержать только одну начальную и только одну конечную вершину.
- ➔ Два любых события может объединять только одна работа.
- ➔ Каждой работе соответствует в сети только одна дуга.

# Фиктивные события и работы (1)

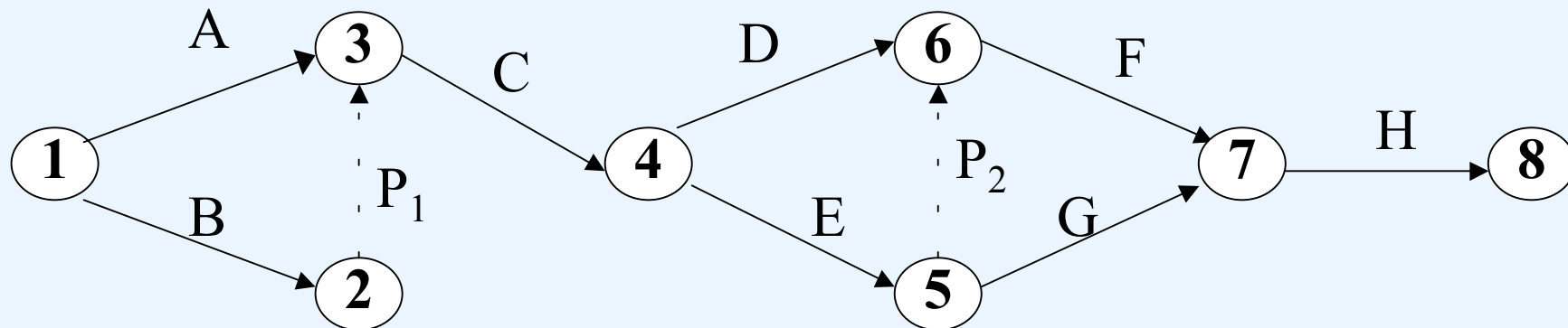
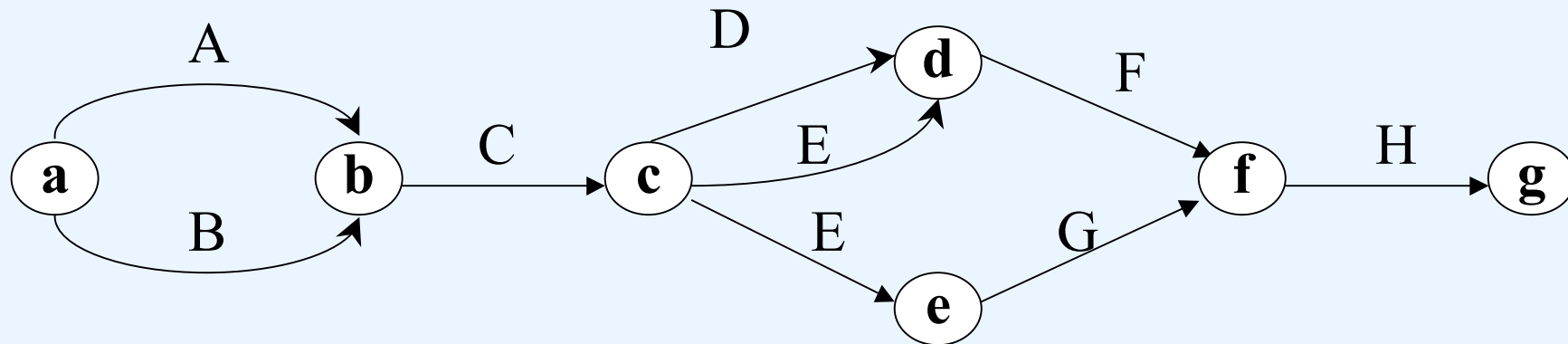
## Пример 7.2

Работа	Описание	Предшеств. работа	Длит. вып-я
A	Исследование грунта	-	6
B	Эскизное проектирование	-	8
C	Получение согласия ректора	A, B	12
D	Выбор архитектора	C	4
E	Планирование бюджета	C	6
F	Рабочее проектирование	D, E	15
G	Подбор источников проектирования	E	12
H	Заключение договора с подрядчиком	F, G	8





## Фиктивные события и работы (2)



# Метод PERT (1)

## Оценивание длительности выполнения работ:

- **оптимистическая длительность  $a$**  выполнения работы в благоприятных условиях
- **наиболее вероятная длительность  $m$**  выполнения работы в нормальных условиях
- **пессимистическая длительность  $b$**  выполнения работы в неблагоприятных условиях

## Математическое ожидание длительности выполнения работы и его дисперсия

$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

## Метод PERT (2)

---

1. Чему равны математическое ожидание и дисперсия длительности реализации проекта в целом?
2. Какова вероятность реализации проекта в заданное время?
3. Как определить момент завершения реализации проекта с заданной вероятностью?

## Математическое ожидание длительности реализации проекта и его дисперсия

### Пример 7.3

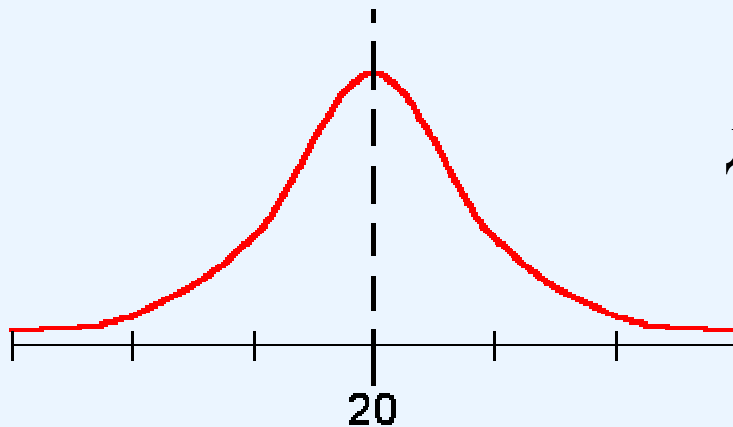
$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

Работа	a	m	b	$\bar{t}$	$\sigma^2$
A	3	4	11	5	1,78
B	5	6,5	11	7	1,00
C	4,5	5,5	9,5	6	0,69
D	6	7	14	8	1,78
E	2	3	4	3	0,11
F	3	4	5	4	0,11
G	1	1,5	5	2	0,44
H	3,5	4,5	8,5	5	0,69

$$\bar{t} = 5 + 6 + 4 + 5 = 20 \quad \sigma^2 = 1,78 + 0,69 + 0,11 + 0,69 = 3,27$$

$$\sigma = \sqrt{3,27} = 1,81$$

## Вероятность реализации проекта в заданное время

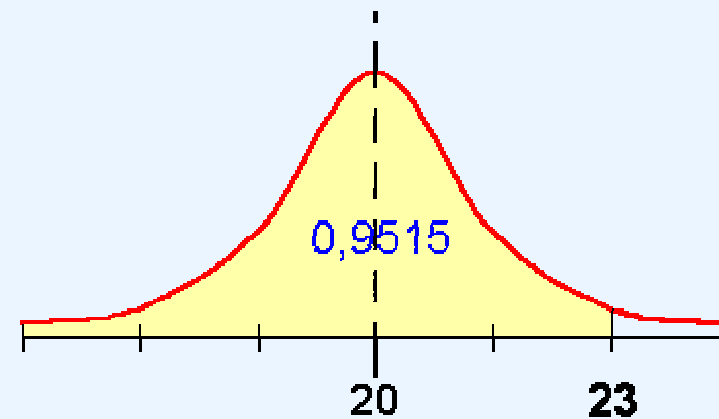


Длительность реализации проекта  $t = 23$

$$z = \frac{t - \bar{t}}{\sigma}$$

$$z = \frac{23 - 20}{1,81} = 1,66$$

<i>z</i>	...	0,05	0,06	0,07	...
...	...	...	...	...	...
1,5	...	0,9394	0,9406	0,9418	...
1,6	...	0,9505	0,9515	0,9525	...
1,7	...	0,9599	0,9608	0,9616	...
...	...	...	...	...	...

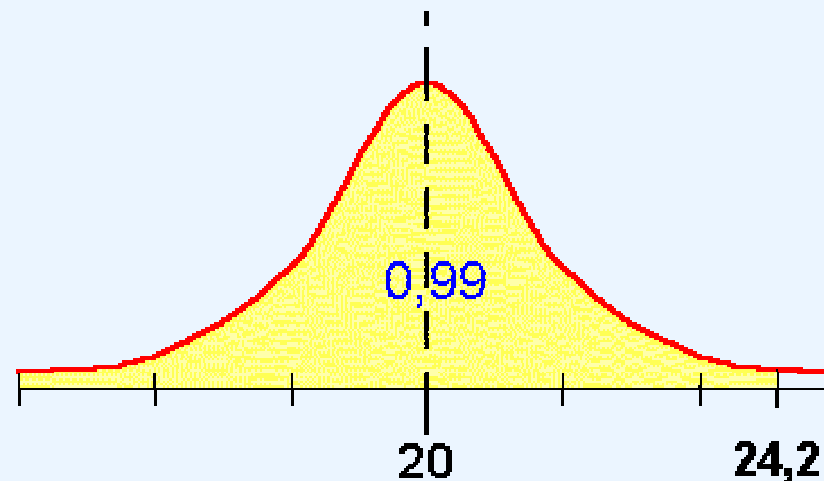


## Длительность реализации проекта с заданной вероятностью

Вероятность реализации проекта: 0,99

p	...	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...
0,6	...	0,4125	0,4399	0,4677	0,4958
0,7	...	0,7063	0,7388	0,7722	0,8064
0,8	...	1,0803	1,1264	1,1750	1,2265
0,9	...	1,7507	1,8808	2,0537	2,3263

$$2,33 = \frac{x - 20}{1,81}$$



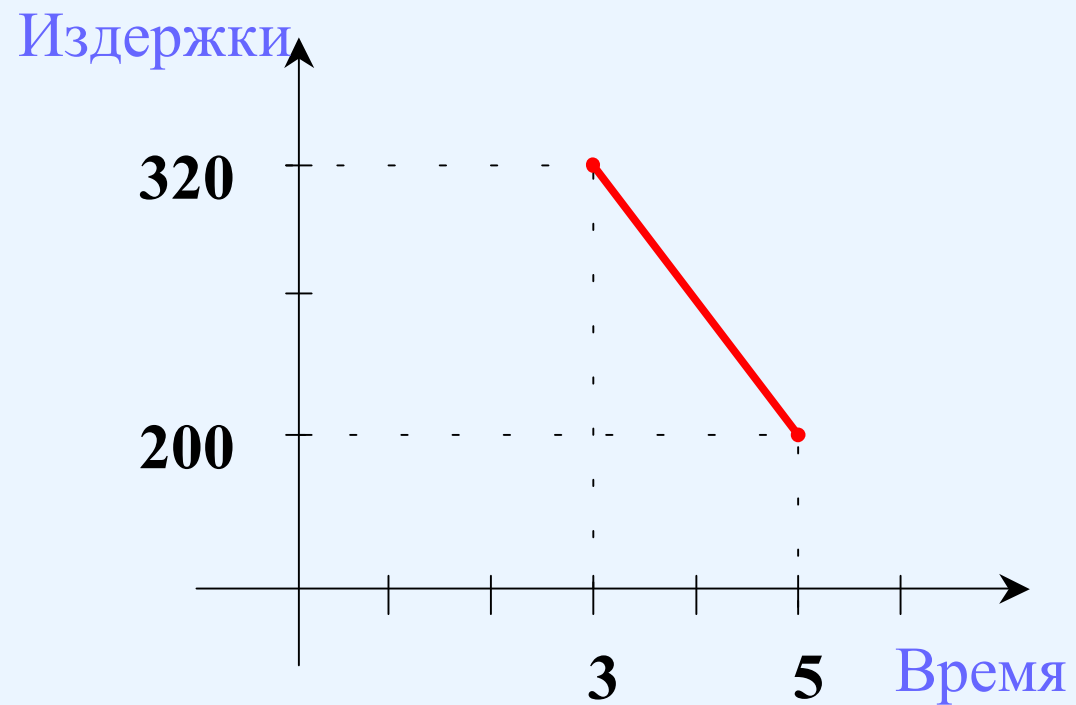
## Затратно-временной анализ (1)

### Пример 7.4

Работа	Нормальная длит-ть	Длит-ть ускор. вып-я	Максим. ускорение	Нормальн. издержки	Издержки ускор. вып-я	Издержки ускор. на 1 времени
A	5	3	2	200	320	60
B	7	4	3	260	395	45
C	6	4	2	220	330	55
D	8	5	3	300	450	50
E	3	2	1	150	215	65
F	4	3	1	150	210	60
G	2	1	1	100	170	70
H	5	3	2	200	330	65

## Затратно-временной анализ (2)

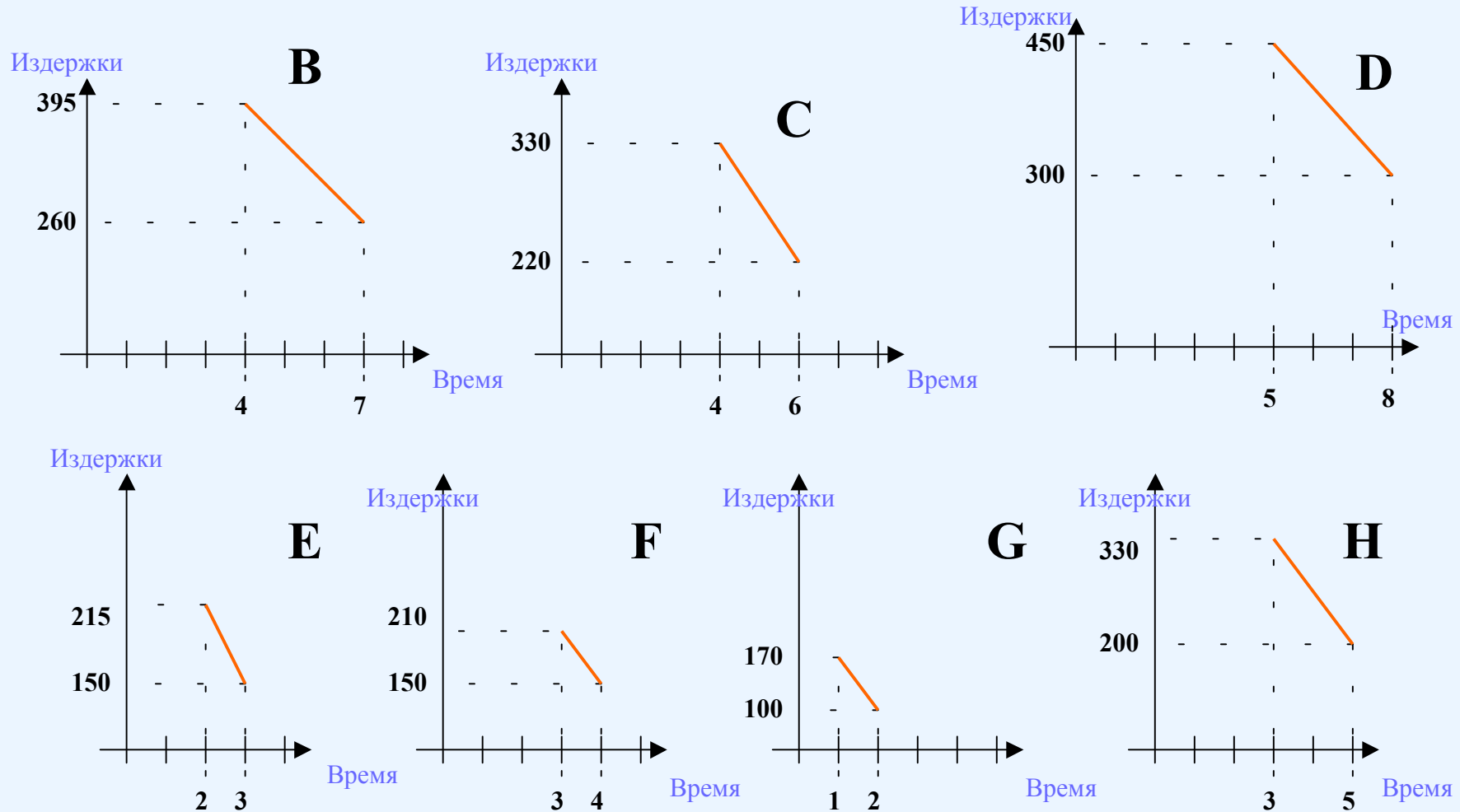
### Работа А





# Затратно-временной анализ (3)

## Работы В-Н



## Минимизация издержек при директивно заданных сроках (1)

### Постановка задачи

Определить способ ускорения выполнения работ, минимизирующий издержки при директивно заданном сроке реализации проекта, равном 15.

$x_i$  - ( $i = 1, \dots, 6$ ) - моменты наступления событий 1 - 6,  
 $y_A, \dots, y_H$  - время, на которое сокращается выполнение работ А - Н.

### Издержки ускорения реализации проекта:

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \rightarrow \min$$

### Директивная длительность:

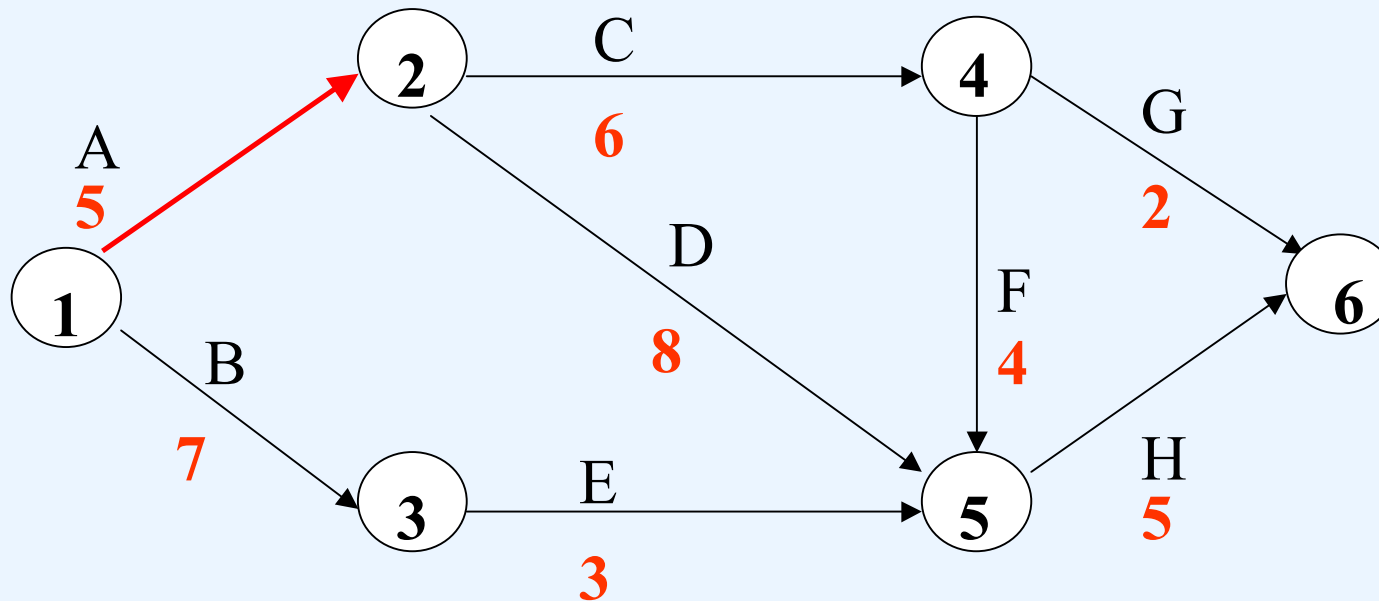
$$x_6 \leq 15$$

# Отображение структуры сетевого графика системой неравенств (1)

## Событие 2

$$x_2 \geq 5 - y_A + x_1$$

Момент наступления события 2      Нормальная длительность      Ускорение вып-я работы А      Момент начала работы А

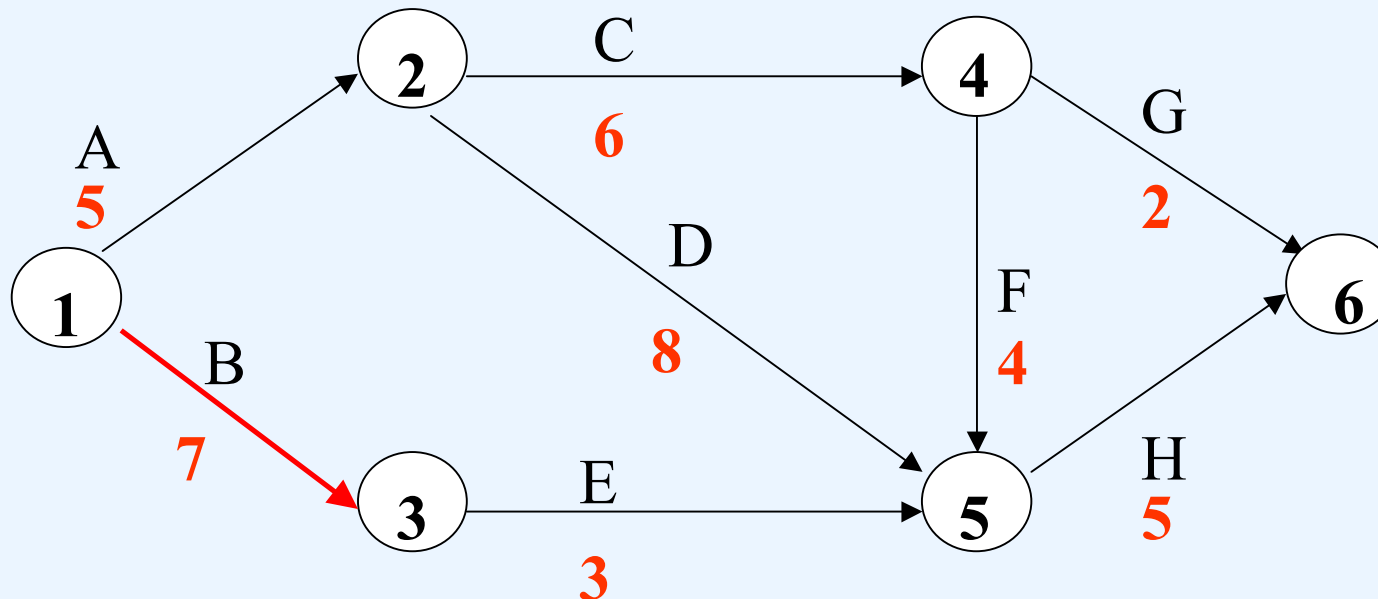


## Отображение структуры сетевого графика системой неравенств (2)

### Событие 3

$$x_3 \geq 7 - y_B + x_1$$

Момент наступления события 3      Нормальная длительность      Ускорение вып-я работы В      Момент начала работы В

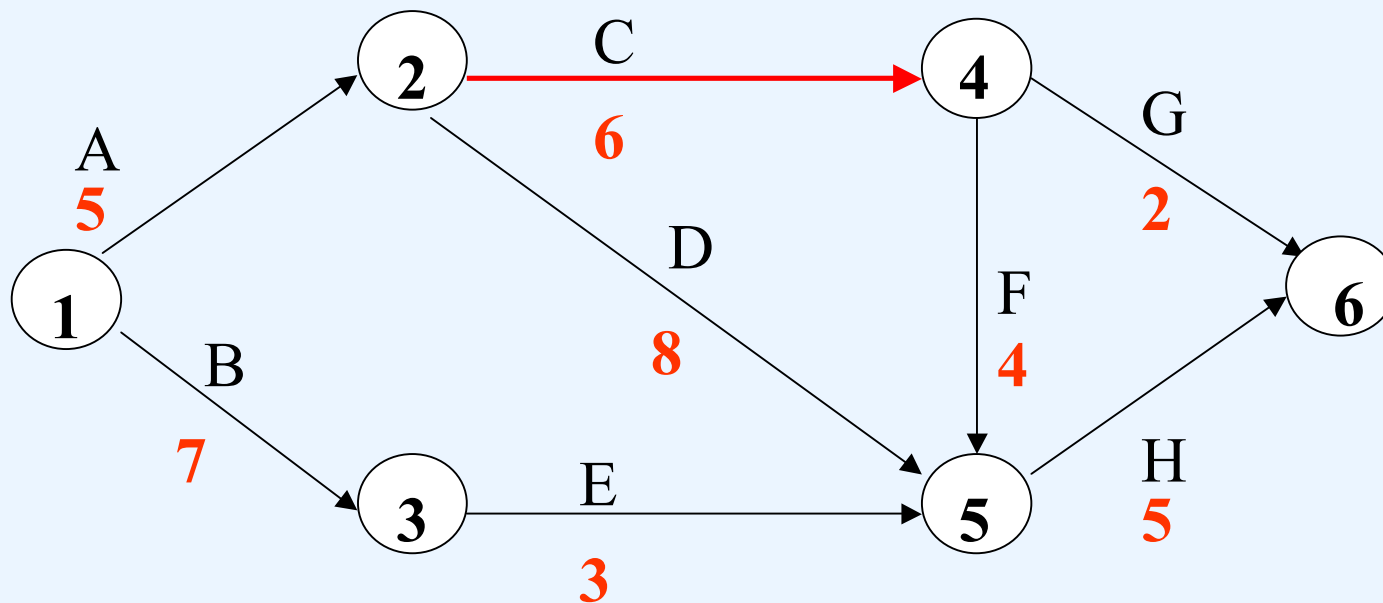


## Отображение структуры сетевого графика системой неравенств (3)

### Событие 4

$$x_4 \geq 6 - y_C + x_2$$

Момент наступления события 4      Нормальная длительность      Ускорение вып-я работы С      Момент начала работы С



## Отображение структуры сетевого графика системой неравенств (4)

### Событие 5

$$x_5 \geq 8 - y_D + x_2$$

Момент наступления события 5    Нормальная длительность    Ускорение вып-я работы D    Момент начала работы D

$$x_5 \geq 3 - y_E + x_3$$

Момент наступления события 5    Нормальная длительность    Ускорение вып-я работы E    Момент начала работы E

$$x_5 \geq 4 - y_F + x_4$$

Момент наступления события 5    Нормальная длительность    Ускорение вып-я работы F    Момент начала работы F

## Отображение структуры сетевого графика системой неравенств (5)

### Событие 6

$$x_6 \geq 2 - y_G + x_4$$

Момент наступления события 6      Нормальная длительность      Ускорение вып-я работы G      Момент начала работы G

$$x_6 \geq 5 - y_H + x_5$$

Момент наступления события 6      Нормальная длительность      Ускорение вып-я работы H      Момент начала работы H

## Ускорение выполнения работ

### Ограничение возможности ускорения выполнения работ

Работа	Нормальн. длит-ть	Сокращ. длит-ть	Максим. сокращ. времени
A	5	3	2
B	7	4	3
C	6	4	2
D	8	5	3
E	3	2	1
F	4	3	1
G	2	1	1
H	5	3	2

$$0 \leq y_A \leq 2$$

$$0 \leq y_E \leq 1$$

$$0 \leq y_B \leq 3$$

$$0 \leq y_F \leq 1$$

$$0 \leq y_C \leq 2$$

$$0 \leq y_G \leq 1$$

$$0 \leq y_D \leq 3$$

$$0 \leq y_H \leq 2$$





## Минимизация издержек при директивно заданных сроках (2)

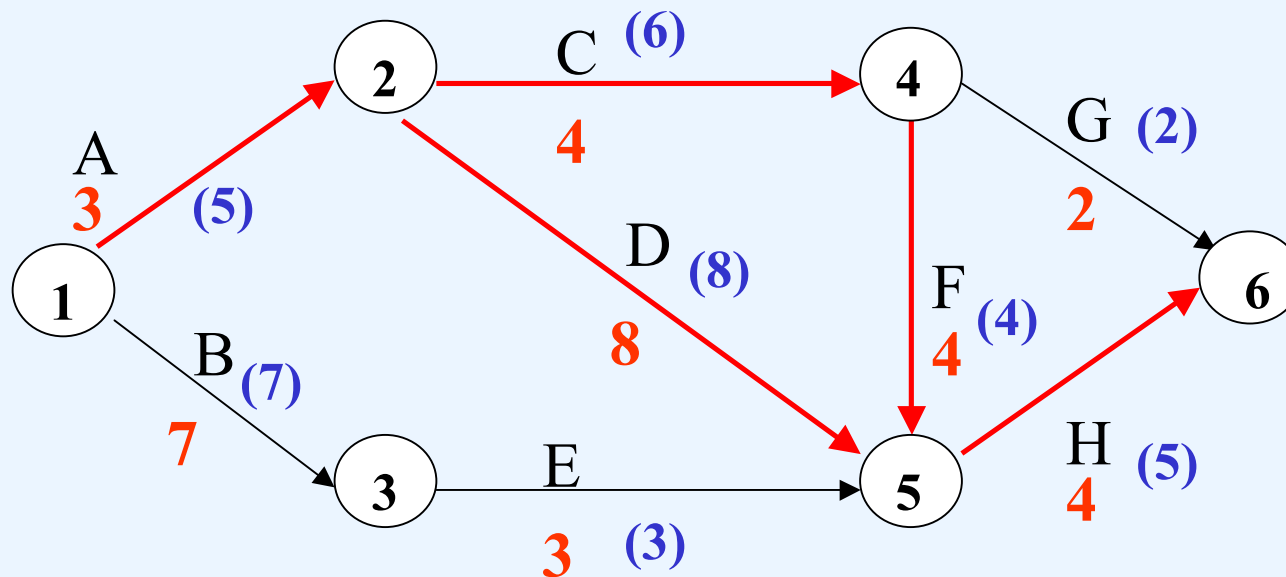
### Моменты начала и окончания работ

Работа	Длит-ть вып-я	ES	EF	LS	LF	Резерв
A	3 (5)	0	3	0	3	0 (0)
B	7 (7)	0	7	1	8	1 (5)
C	4 (6)	3	7	3	7	0 (0)
D	8 (8)	3	11	3	11	0 (2)
E	3 (3)	7	10	8	11	1 (5)
F	4 (4)	7	11	7	11	0 (0)
G	2 (2)	7	9	13	15	6 (7)
H	4 (5)	11	15	11	15	0 (0)

Длительность реализации проекта: 15 Дополнительные издержки: 295

## Минимизация издержек при директивно заданных сроках (3)

### Критический путь



## Минимизация издержек при директивно заданных сроках (4)

### Численный анализ

Директивная длительность	Издержки сокращения длит-ти	Величина сокращения
19	55	$y_C = 1$
18	110	$y_C = 2$
17	170	$y_A = 1, y_C = 2$
16	230	$y_A = 2, y_C = 2$
15	295	$y_A = 2, y_C = 2, y_H = 1$
14	360	$y_A = 2, y_C = 2, y_H = 2$
13	470	$y_A = 2, y_C = 2, y_D = 1, y_F = 1$ $y_H = 2$
12		<b>Допустимое решение отсутствует</b>

# Минимизация сроков при директивно заданных издержках (1)

## Постановка задачи

Определить способ ускорения выполнения работ, минимизирующий срок реализации проекта при максимальном уровне издержек ускорения всех работ, равном 360.

## Срок реализации проекта:

$$x_6 \rightarrow \min$$

## Издержки ускорения реализации проекта:

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \leq 360$$

## Минимизация сроков при директивно заданных издержках (2)

### Задача линейного программирования

$$x_6 \rightarrow \min$$

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \leq 360$$

$$x_2 + y_A \geq 5$$

$$x_3 + y_B \geq 7$$

$$-x_2 + x_4 + y_C \geq 6$$

$$-x_2 + x_5 + y_D \geq 8$$

$$-x_3 + x_5 + y_E \geq 3$$

$$x_4 + x_5 + y_F \geq 4$$

$$-x_4 + x_6 + y_G \geq 2$$

$$-x_5 + x_6 + y_H \geq 5$$

$$0 \leq y_A \leq 2 \quad 0 \leq y_C \leq 2 \quad 0 \leq y_E \leq 1 \quad 0 \leq y_G \leq 1$$

$$0 \leq y_B \leq 3 \quad 0 \leq y_D \leq 3 \quad 0 \leq y_F \leq 1 \quad 0 \leq y_H \leq 2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

## Минимизация сроков при директивно заданных издержках (3)

### Численный анализ

Объем дополнит. средств	Длительность реализации проекта	Сокращение длительности выполнения работ
60	18,90	$y_C = 1,10$
120	17,83	$y_A = 0,17, y_C = 2,00$
180	16,83	$y_A = 1,67, y_C = 2,00$
240	15,85	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_H = 0,15$
300	14,92	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_H = 1,08$
360	14,00	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_H = 2,00$
420	13,45	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_D = 0,54,$ $y_F = 0,54, y_H = 2,00$
480	13,00	$y_A = 2,00, y_C = 2,00, y_D = 1,00,$ $y_F = 1,00, y_H = 2,00$

## Компьютеризация склада (1)

### Пример 7.5

Работа	Описание работы	Предшествующая работа
A	Определение потребностей	-
B	Анализ аналогов	-
C	Выбор системы	A, B
D	Заказ системы	C
E	Проект. реконструкции помещений	C
F	Реализация проекта реконструкции	E
G	Проект. компьютерного интерфейса	C
H	Установка компьютеров	D, F, G
I	Установка прогр. обеспечения	D, F
J	Обучение персонала	H
K	Комплексное тестирование системы	I, J



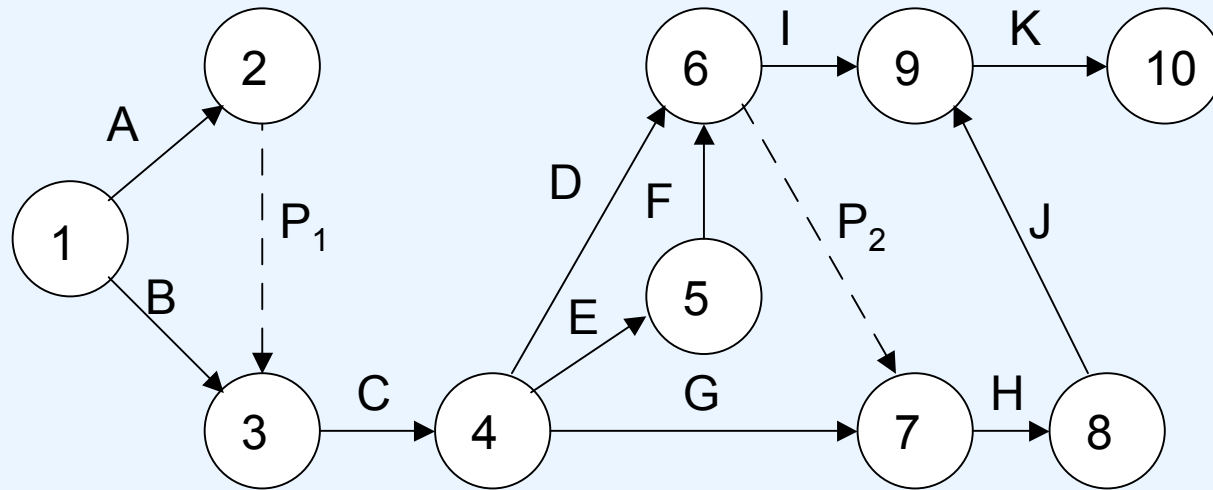
## Компьютеризация склада (2)

### Длительности выполнения работ

Работа	Длительности выполнения работ		
	Оптимистическая	Наиболее вероятная	Пессимистическая
A	6	7	9
B	9	10	11
C	4	5	6
D	10	11	12
E	10	12	14
F	5	7	9
G	5	7	15
H	4	5	6
I	5	6	13
J	3	5	7
K	3	5	5

## Компьютеризация склада (3)

### Сетевой график



### Оптимальное решение

Математическое ожидание длительности реализации проекта: 48

Дисперсия длительности реализации проекта: 1,8

Окончание проекта через 47 недель — вероятность = 0,23

Окончание проекта с вероятностью 0,80 — длительность реализации = 49,1 недели

## Компьютеризация склада (4)

### Ускорение реализации проекта

Работа	Длительность		Издержки выполнения	
	нормальная	ускоренная	нормального	ускоренного
A	7	6	70	85
B	10	9	100	115
C	5	4	50	65
D	11	10	110	125
E	12	11	120	135
F	7	6	70	85
G	8	7	80	95
H	5	4	50	65
I	7	6	70	85
J	5	4	50	65
K	7	6	70	85

## Компьютеризация склада (5)

### Оптимальное решение

Нормальная длительность - 48 недель

Реализация проекта в течение 47 недель

$y_K = 1$ , издержки сокращения срока реализации = 15

Реализация проекта в течение 41 недели

$y_B = 1, y_C = 1, y_E = 1, y_F = 1, y_H = 1, y_J = 1,$

издержки сокращения срока реализации = 105

## Определение критического пути как задача линейного программирования

### Пример 7.6

$$x_6 \rightarrow \min$$

$$x_2 \geq 5 + x_1$$

$$x_3 \geq 7 + x_1$$

$$x_4 \geq 6 + x_2$$

$$x_5 \geq 8 + x_2$$

$$x_5 \geq 3 + x_3$$

$$x_5 \geq 4 + x_4$$

$$x_6 \geq 2 + x_4$$

$$x_6 \geq 5 + x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

### Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 12, x_4 = 5, x_5 = 15, x_6 = 20$$

Симплекс-метод позволяет найти самые поздние моменты наступления всех событий

## Ускорение реализации проекта как двухкритериальная задача (1)

### Пример 7.7

Цель - оптимальное распределение средств на ускорение реализации проекта.

#### Критериальные функции

1. Минимизация издержек ускорения проекта.
2. Минимизация времени выполнения проекта.

#### Ограничения

- условия, описывающие структуру проекта,
- условия, описывающие возможности ускорения каждой работы,
- условия неотрицательности.

## Ускорение реализации проекта как двухкритериальная задача (2)

### Задача векторной оптимизации

$$x_6 \rightarrow \min$$

$$60y_A + 45y_B + 55y_C + 50y_D + 65y_E + 60y_F + 70y_G + 65y_H \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{rcccccccc} -x_1 + x_2 + & & & & & & & & y_A & & & & & & & & & & & & & \geq 5 \\ -x_1 + & & x_3 + & & & & & & & & & & & & & & & & & & & y_B & \geq 7 \\ & -x_2 + & & x_4 + & & & & & & & & & & & & & & & & & & y_C & \geq 6 \\ & -x_2 + & & & x_5 + & & & & & & & & & & & & & & & & & y_D & \geq 8 \\ & & -x_3 + & & x_5 + & & & & & & & & & & & & & & & & & y_E & \geq 3 \\ & & & x_4 + & x_5 + & & & & & & & & & & & & & & & & & y_F & \geq 4 \\ & & & -x_4 + & & x_6 + & & & & & & & & & & & & & & & & y_G & \geq 2 \\ & & & & -x_5 + x_6 + & & & & & & & & & & & & & & & & & & y_H \geq 5 \\ 0 \leq y_A \leq 2 & & 0 \leq y_B \leq 3 & & 0 \leq y_C \leq 2 & & 0 \leq y_D \leq 3 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 \leq y_E \leq 1 & & 0 \leq y_F \leq 1 & & 0 \leq y_G \leq 1 & & 0 \leq y_H \leq 2 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

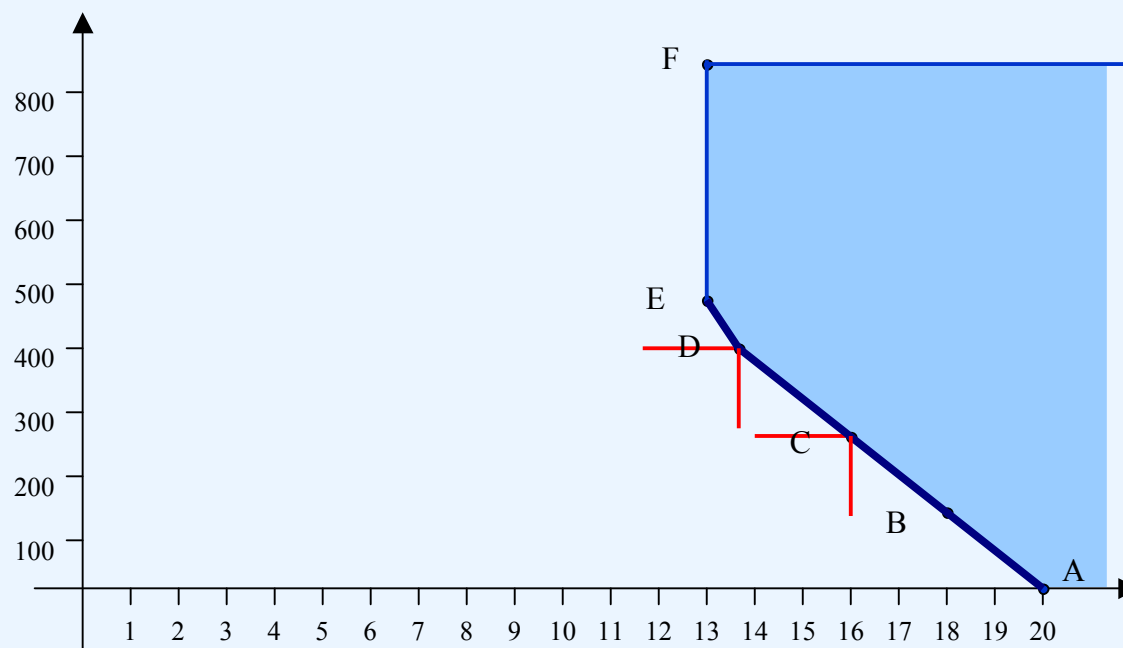
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

## Ускорение реализации проекта как двухкритериальная задача (3)

### Интерпретация в пространстве критериев

A (20, 0)      C (16, 230)      E (13, 470)

B (18, 110)      D (14, 360)      F (13, 840)





# **Резюме (1)**

---

## **Ключевые слова**

**Проект**

**Сетевой график**

**Непосредственно предшествующая работа**

**Событие, Начальное событие, Конечное событие**

**Корректная нумерация событий**

**Длительность выполнения работ**

**Метод критического пути СРМ**

**Шаг вперед**

**Шаг назад**

**Резервы работ**

**Оптимальный временной график**

## **Резюме (2)**

---

### **Ключевые слова (продолжение)**

**Фиктивные работы и события**

**Метод PERT**

**Оценивание времени выполнения работ**

**Оптимистическая длительность**

**Пессимистическая длительность**

**Наиболее вероятная длительность**

**Матем. ожидание длительности реализации проекта и его дисперсия**

**Вероятность реализации проекта в заданное время**

**Длительность реализации проекта с заданной вероятностью**

**Затратно-временной анализ**

**Нормальная длительность**

## **Резюме (3)**

---

### **Ключевые слова (продолжение)**

**Длительность ускоренной реализации, максимальное ускорение**

**Нормальные издержки**

**Издержки ускоренной реализации**

**Издержки ускорения на единицу времени**

**Минимизация издержек ускорения при заданном директивном времени**

**Минимизация сроков при заданных издержках**

**Можно отдыхать!**