

Optymalizacja sieciowa

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

Drzewo rozpinające

Minimalne drzewo rozpinające

Najkrótsza droga w sieci

Wierzchołek początkowy

Maksymalny przepływ w sieci

Źródło

Ujście

Sformułowanie zadania

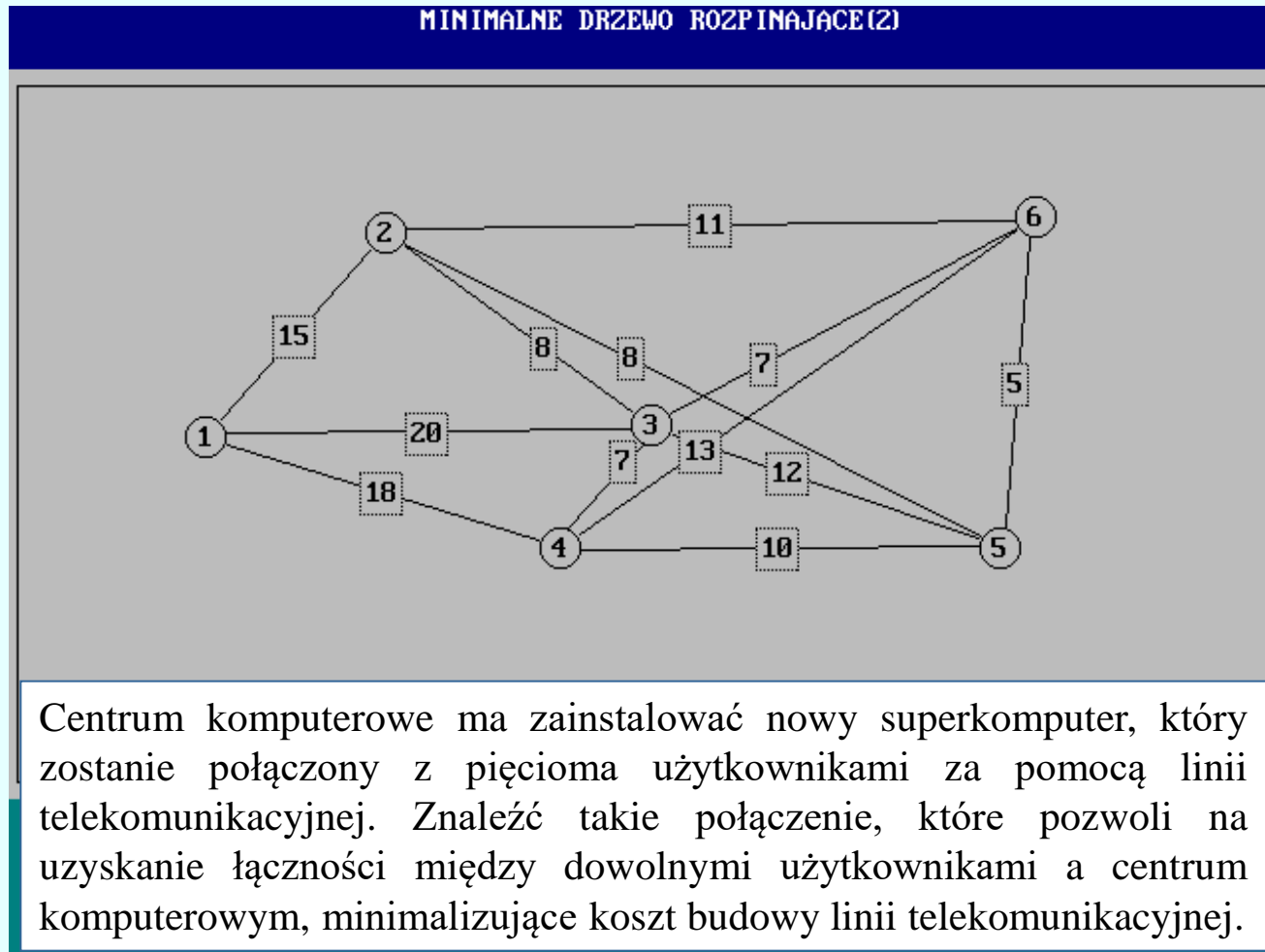
Drzewo rozpinające w grafie liczącym n wierzchołków to zbiór $n - 1$ jego krawędzi takich, że dowolne dwa wierzchołki grafu można połączyć przy pomocy krawędzi należących do tego zbioru.

Minimalne drzewo rozpinające to drzewo wybrane spośród wszystkich istniejących drzew rozpinających, dla którego łączna długość krawędzi jest najmniejsza.

Należy znaleźć minimalne drzewo rozpinające

8.2. Minimalne drzewo rozpinające

Przykład 8.1



8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.1. Reguły postępowania przy poszukiwaniu minimalnego drzewa rozpinającego (1/1)

Algorytm

Iteracja 1

Wybieramy w sposób arbitralny dowolny wierzchołek i łączymy go z wierzchołkiem leżącym najbliżej.

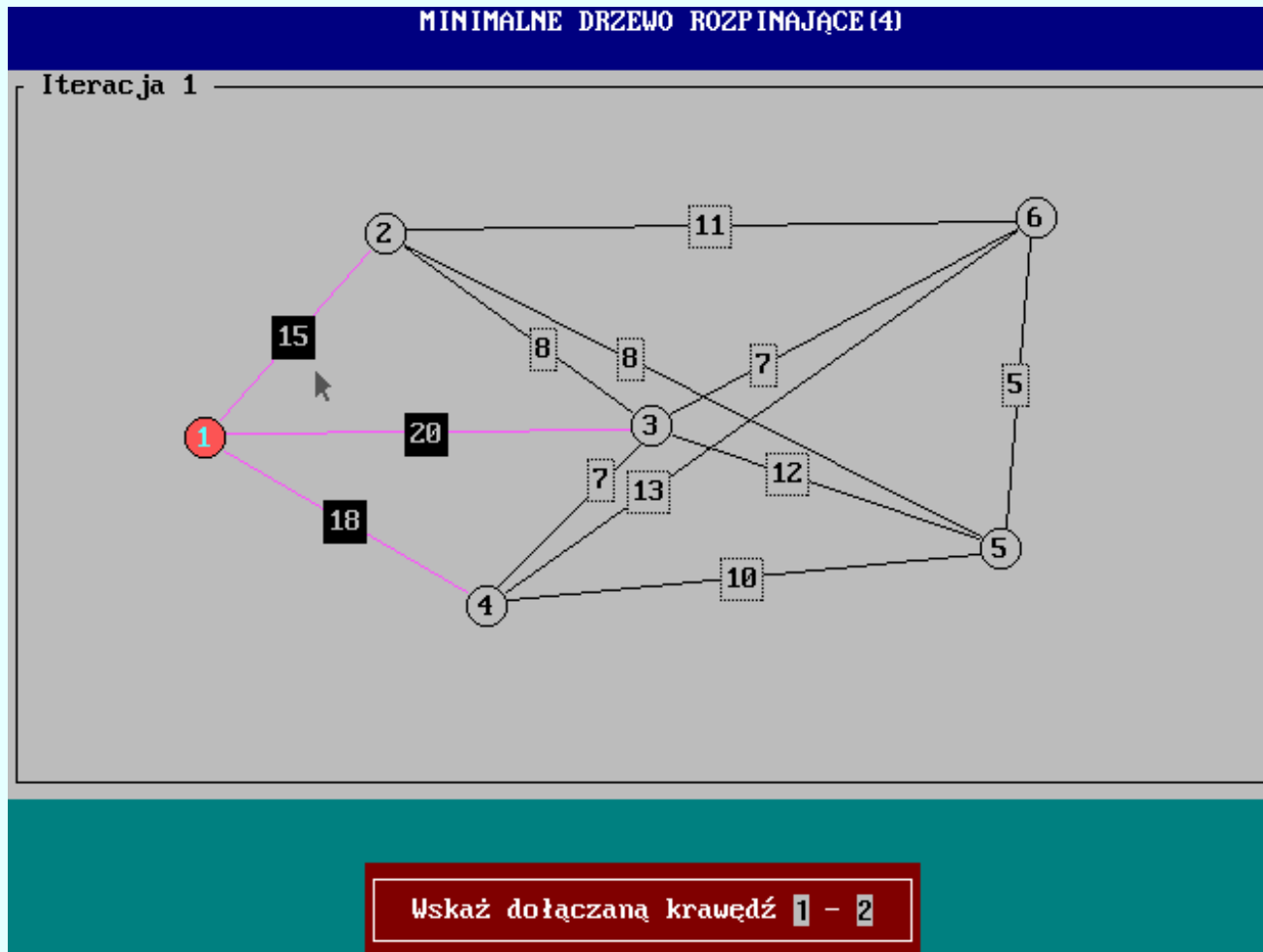
Iteracja k ($k = 2, \dots, n-1$)

W konstruowanym drzewie znajduje się już k wierzchołków połączonych i $k-1$ krawędzi. Identyfikujemy najbliższy wierzchołek niepołączony i dołączmy go do zbioru wierzchołków połączonych.

8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.2. Kolejne iteracje (1/6)

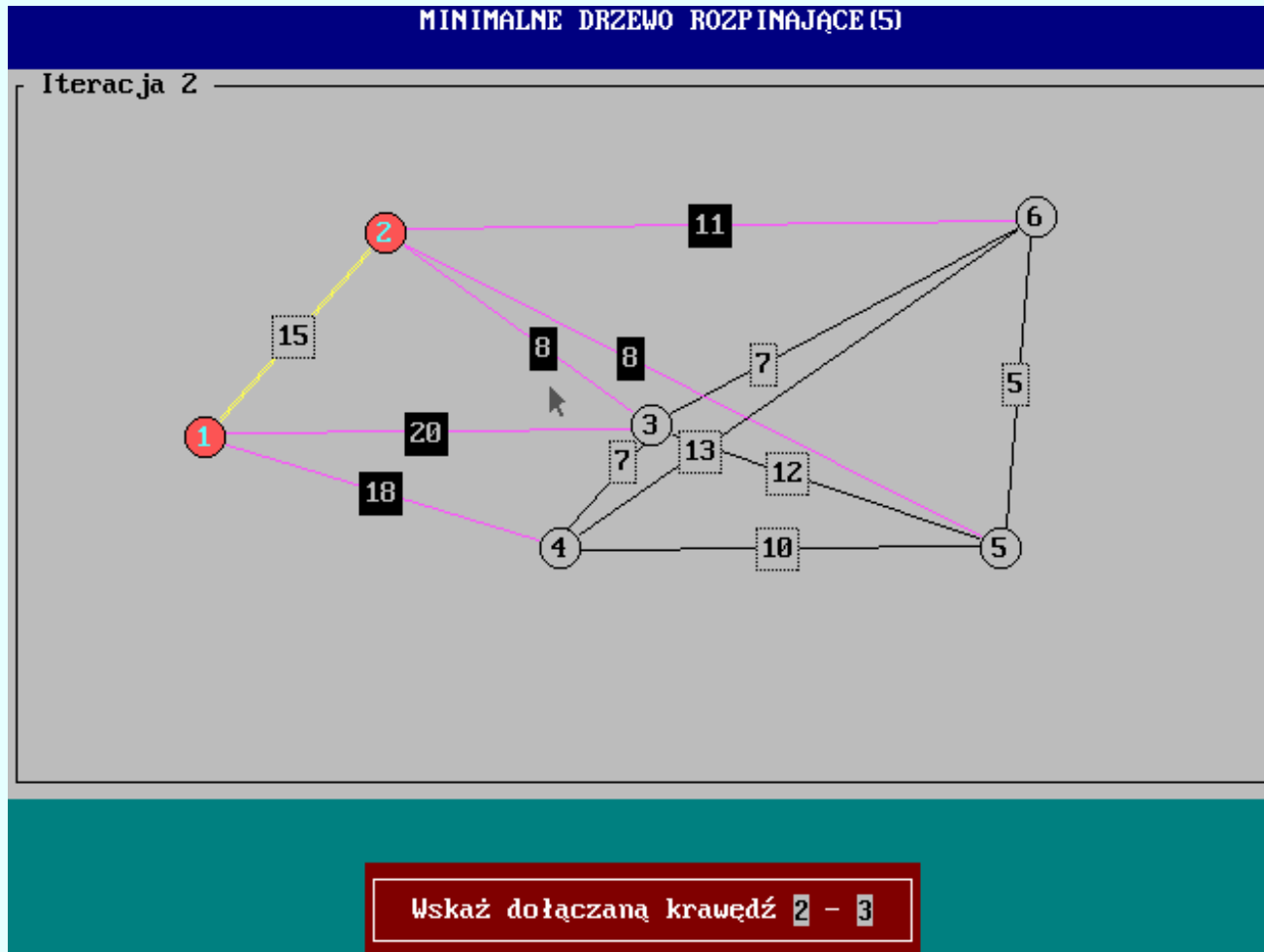
Iteracja 1



8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.2. Kolejne iteracje (2/6)

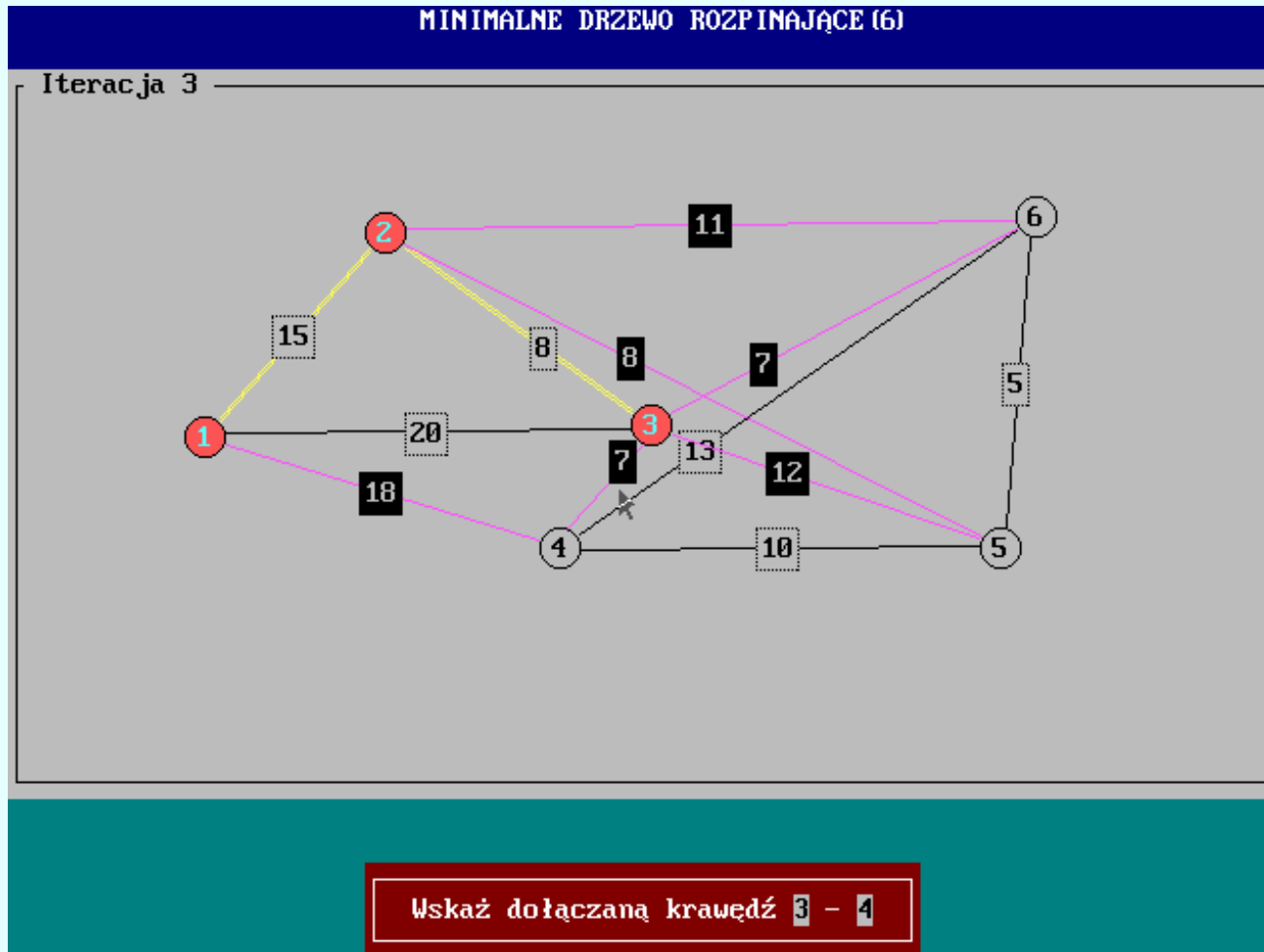
Iteracja 2



8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.2. Kolejne iteracje (3/6)

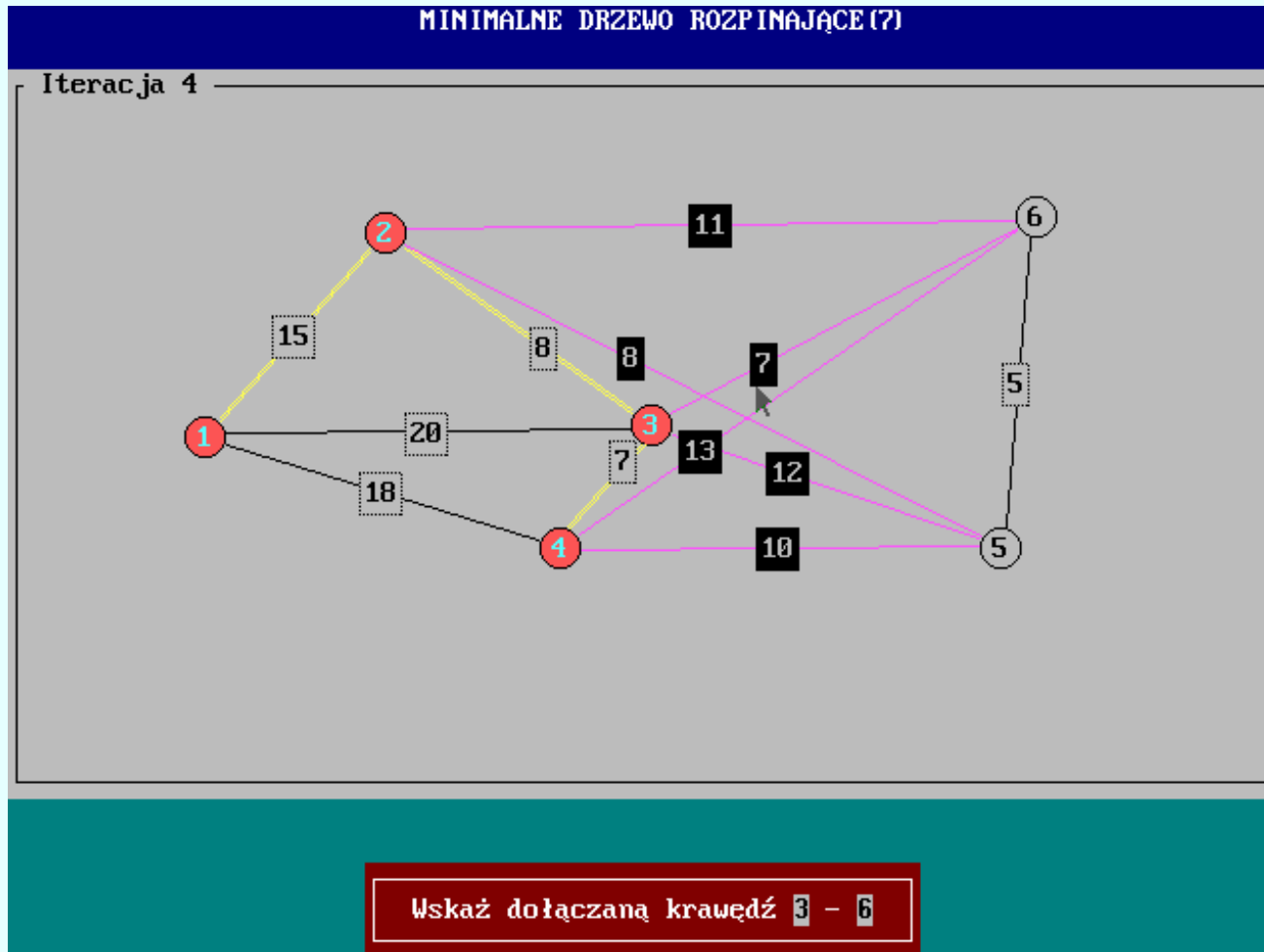
Iteracja 3



8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.2. Kolejne iteracje (4/6)

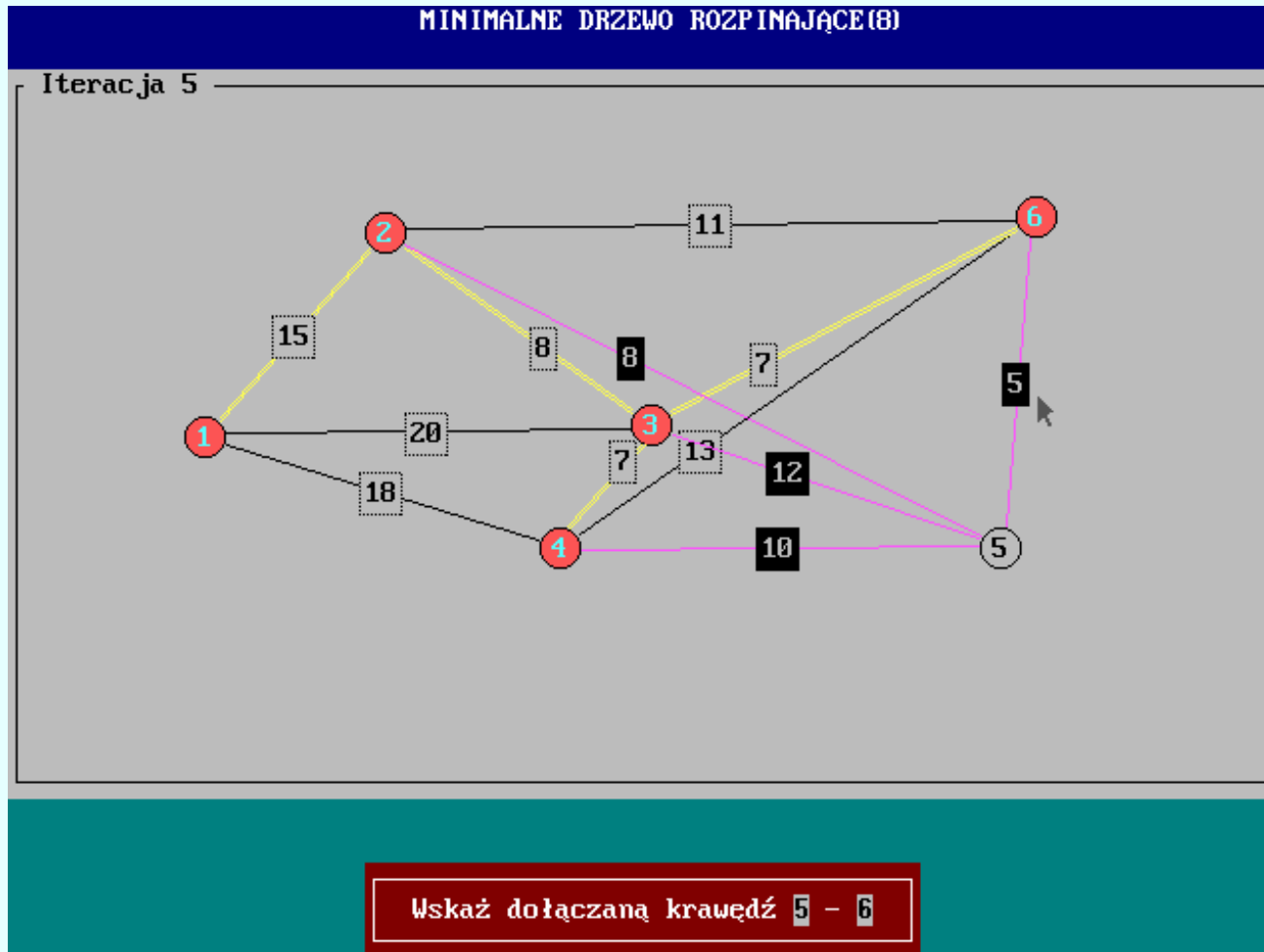
Iteracja 4



8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.2. Kolejne iteracje (5/6)

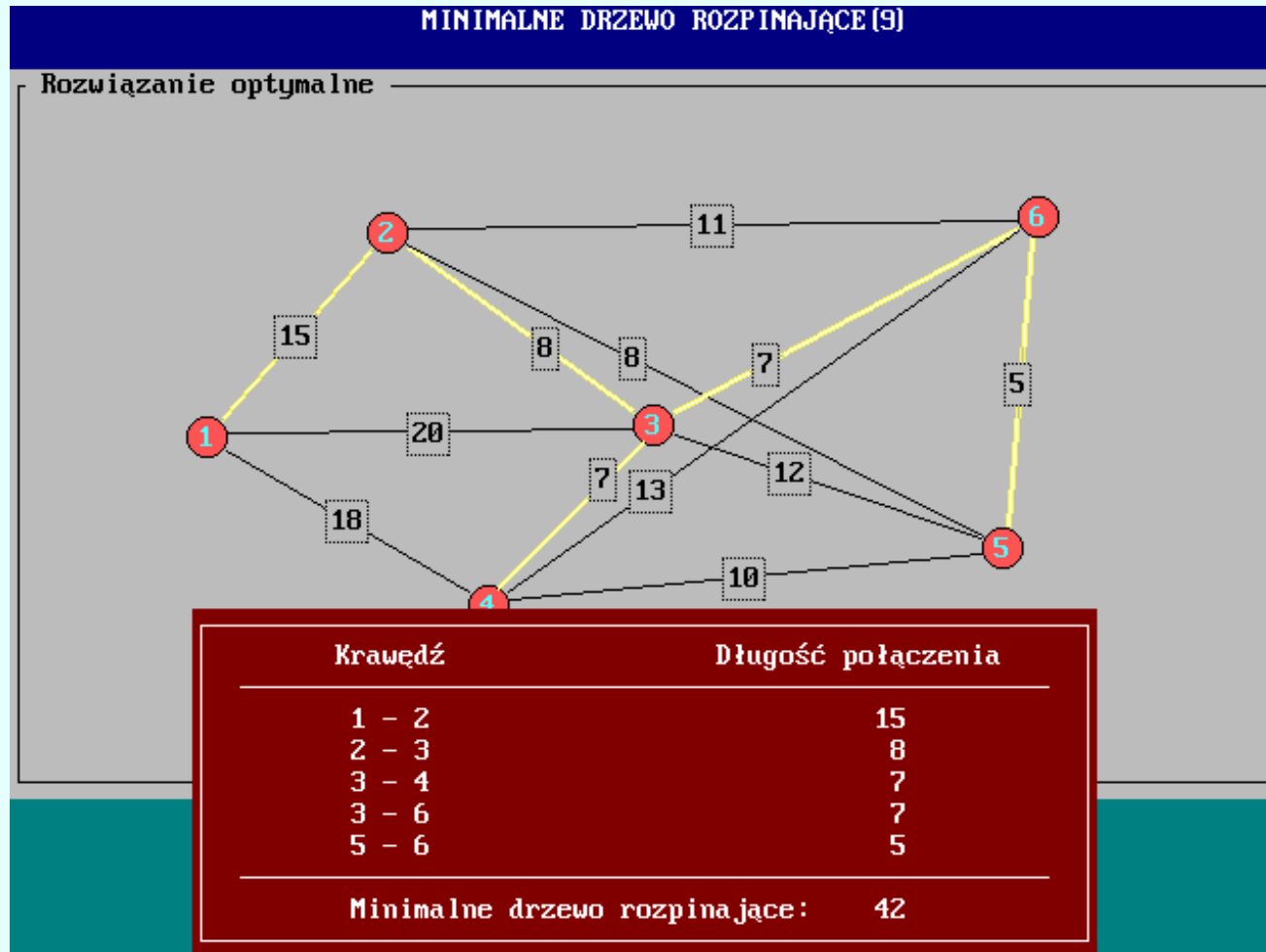
Iteracja 5



8.2. Minimalne drzewo rozpinające

8.2.2. Kolejne iteracje (6/6)

Rozwiązanie optymalne



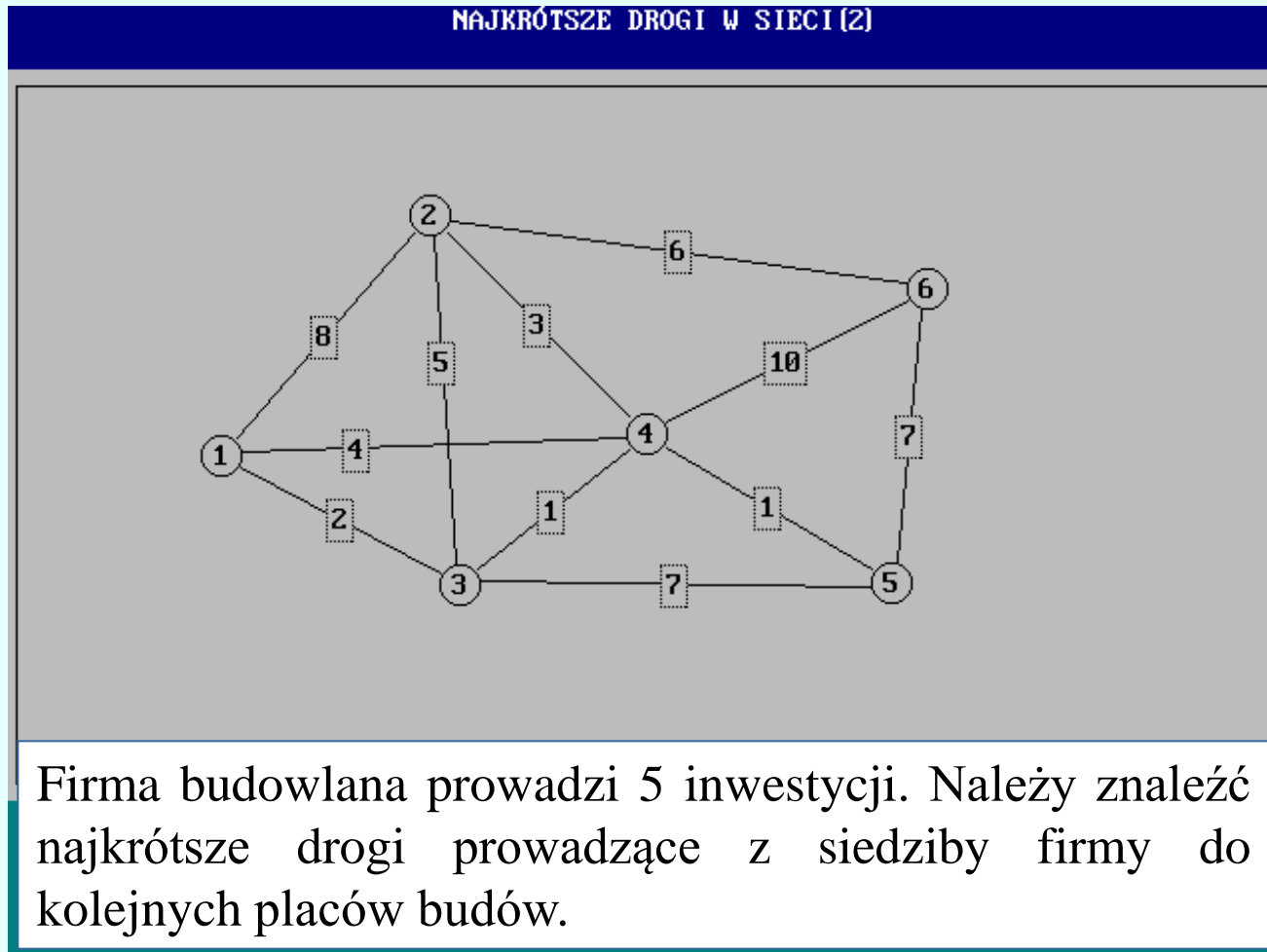
Sformułowanie zadania

Najkrótsza droga pomiędzy dwoma dowolnie wybranymi wierzchołkami w sieci to taki zbiór krawędzi łączących te wierzchołki, dla których suma długości jest najmniejsza.

Należy znaleźć najkrótsze drogi łączące wierzchołek początkowy (numer 1) ze wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu.

8.3. Najkrótsze drogi w sieci

Przykład 8.2



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.1. Reguły postępowania przy poszukiwaniu najkrótszych dróg w sieci (1/3)

Algorytm

Faza 1. Cechowanie wierzchołków.

Iteracja 1.

Wierzchołkiem cechowanym na stałe jest wierzchołek (1). Przyporządkowujemy mu etykietę stałą $[0, S]$. Znajdujemy krawędzie rozpoczynające się w wierzchołku początkowym. Wierzchołkom kończącym te krawędzie przyporządkowujemy etykiety tymczasowe

8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.1. Reguły postępowania przy poszukiwaniu najkrótszych dróg w sieci (2/3)

Algorytm (c.d.)

Iteracja k ($k \leq n$).

Z wierzchołków ocechowanych tymczasowo wybieramy wierzchołek, który cechujemy na stałe. Jest to ten wierzchołek, który ma pierwszą składową najmniejszą. Znajdujemy krawędzie prowadzące od wybranego wierzchołka do wierzchołków, które nie zostały dotychczas ocechowane na stałe i nadajemy im etykiety tymczasowe lub modyfikujemy istniejące

8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.1. Reguły postępowania przy poszukiwaniu najkrótszych dróg w sieci (3/3)

Algorytm (c.d.)

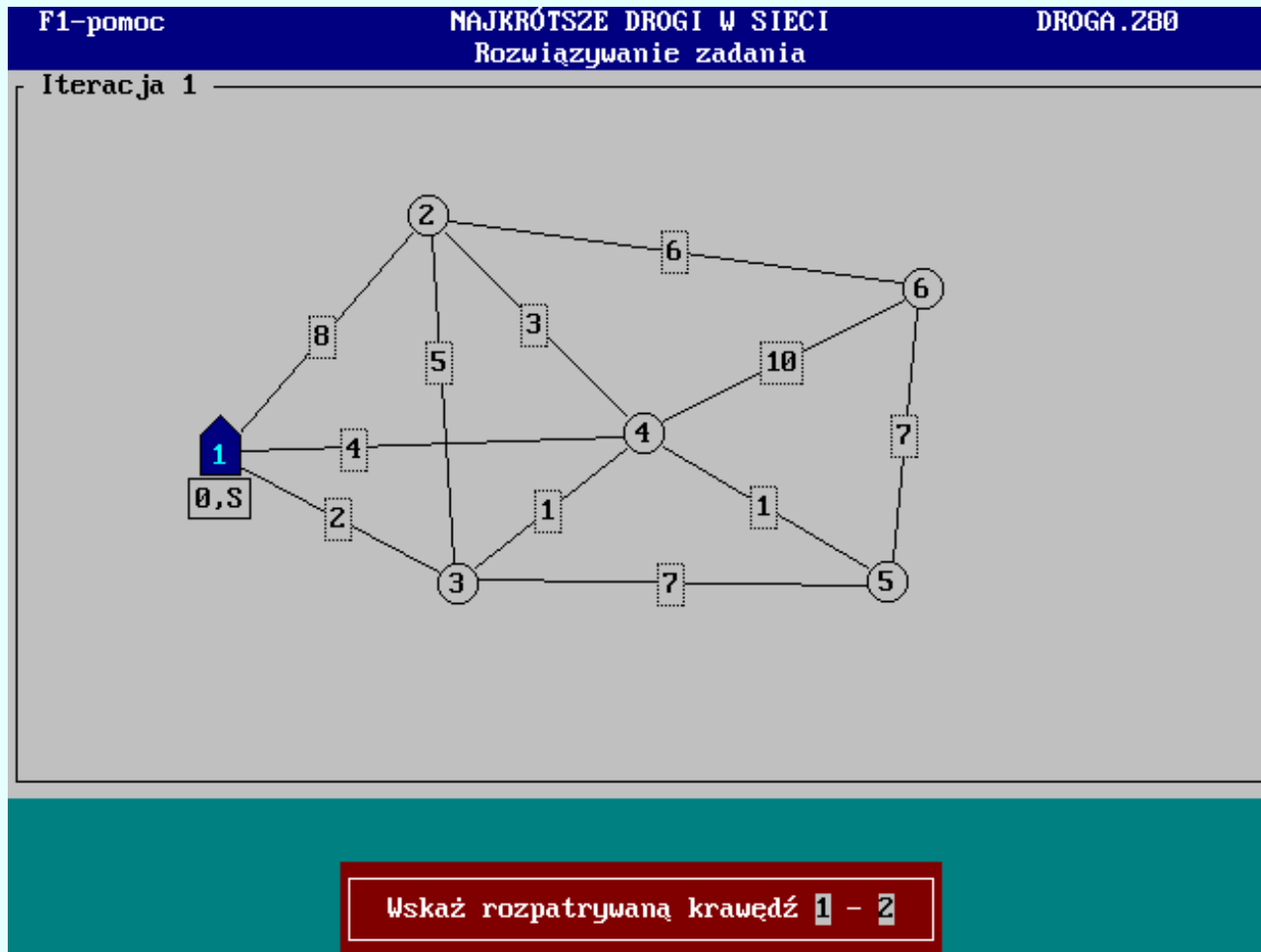
Faza 2. Identyfikacja najkrótszych dróg.

Dla kolejnych wierzchołków, rozpoczynając od wierzchołka 2 identyfikujemy krawędzie, wchodzące w skład najkrótszej drogi. Do tego celu służy druga składowa etykiety stałej.

8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (1/7)

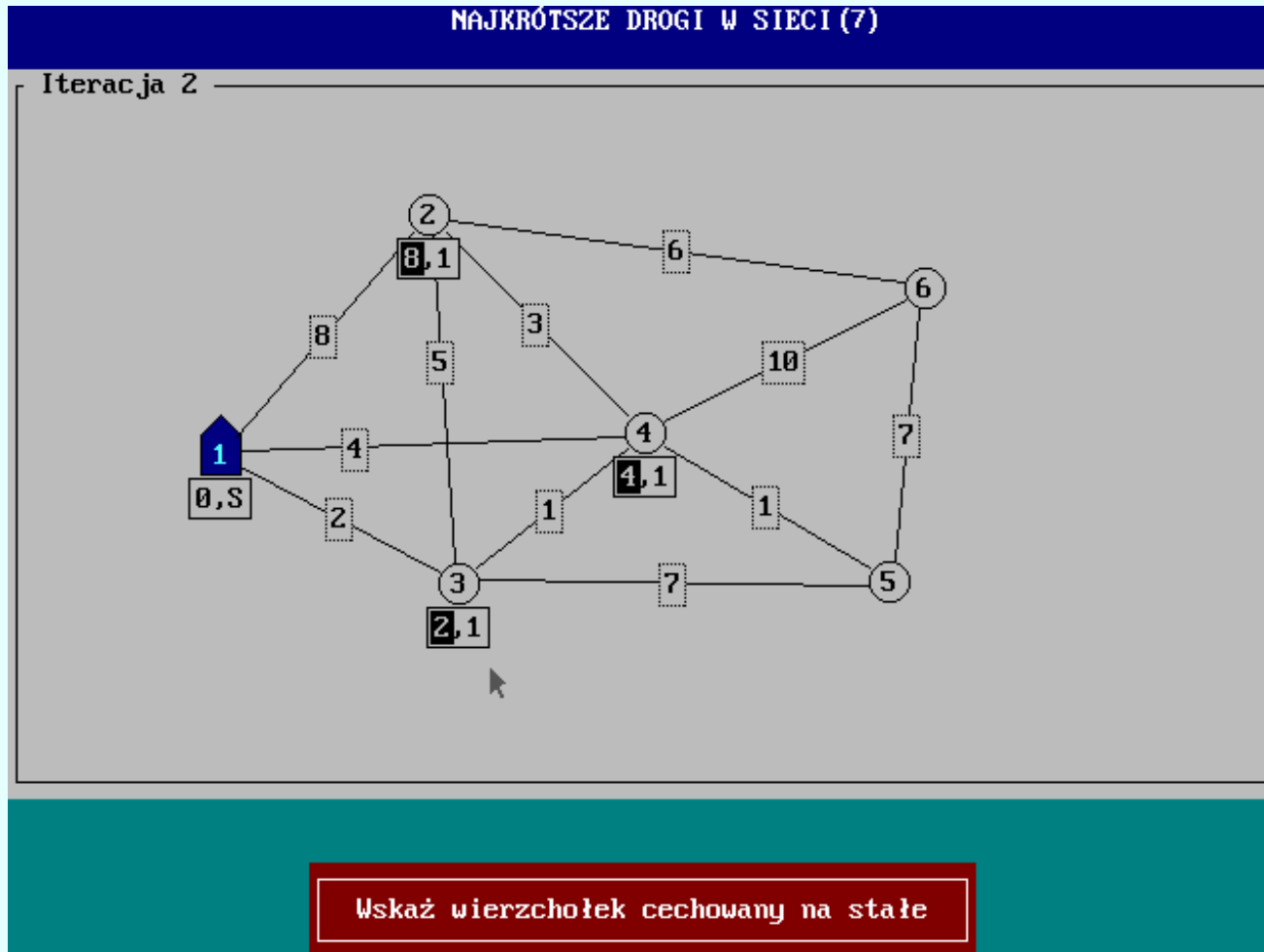
Iteracja 1



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (2/7)

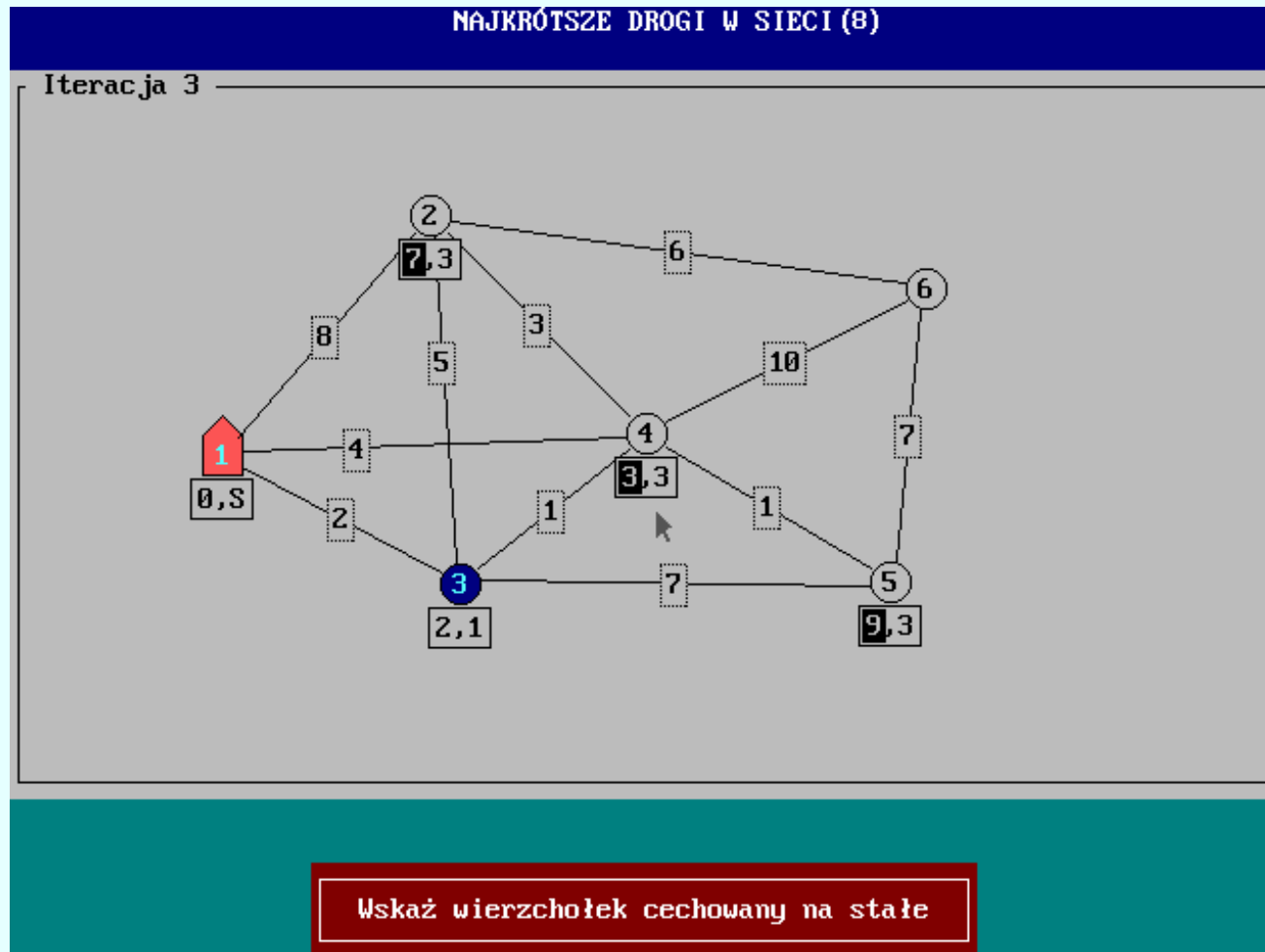
Iteracja 2



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (3/7)

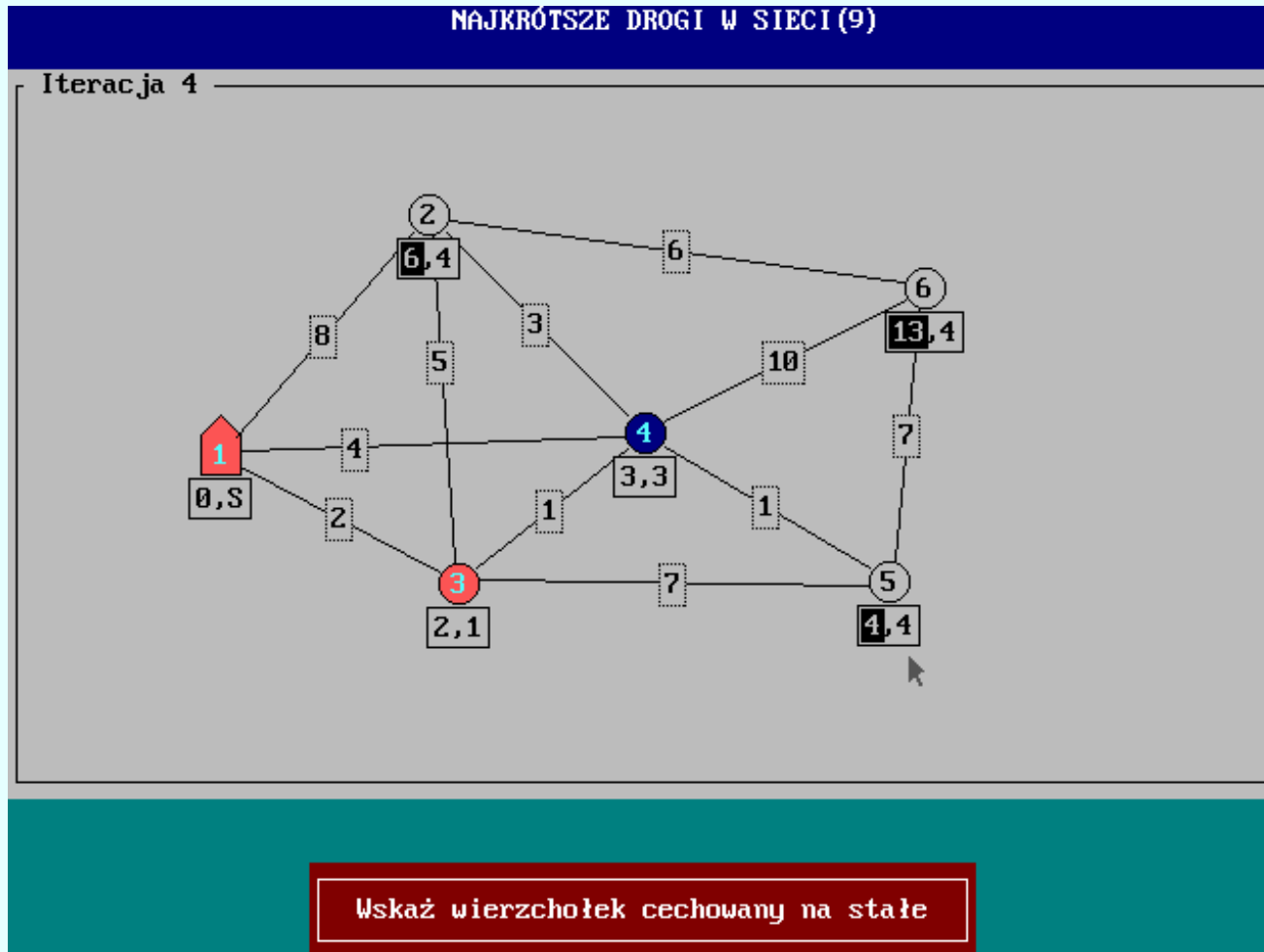
Iteracja 3



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (4/7)

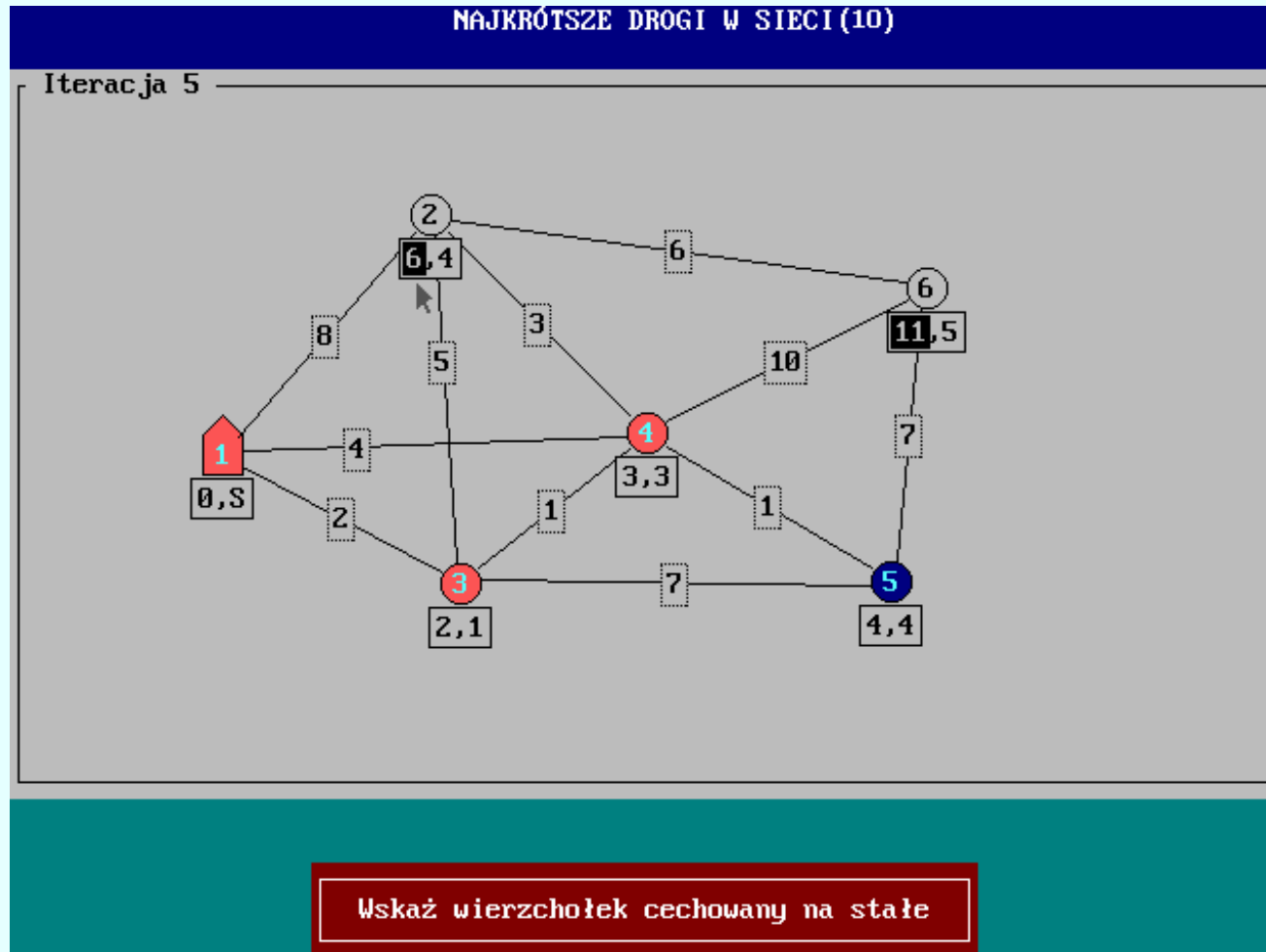
Iteracja 4



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (5/7)

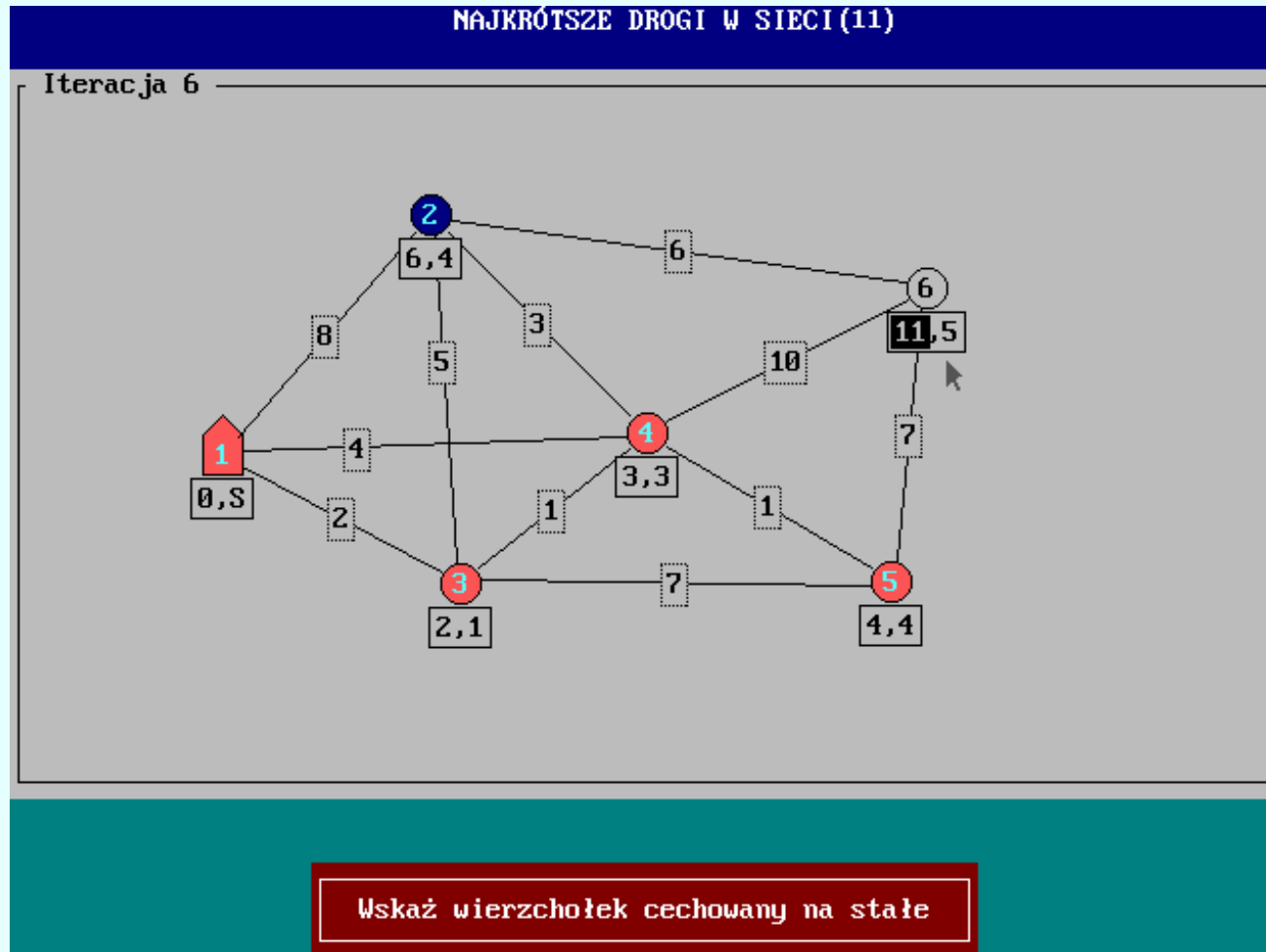
Iteracja 5



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (6/7)

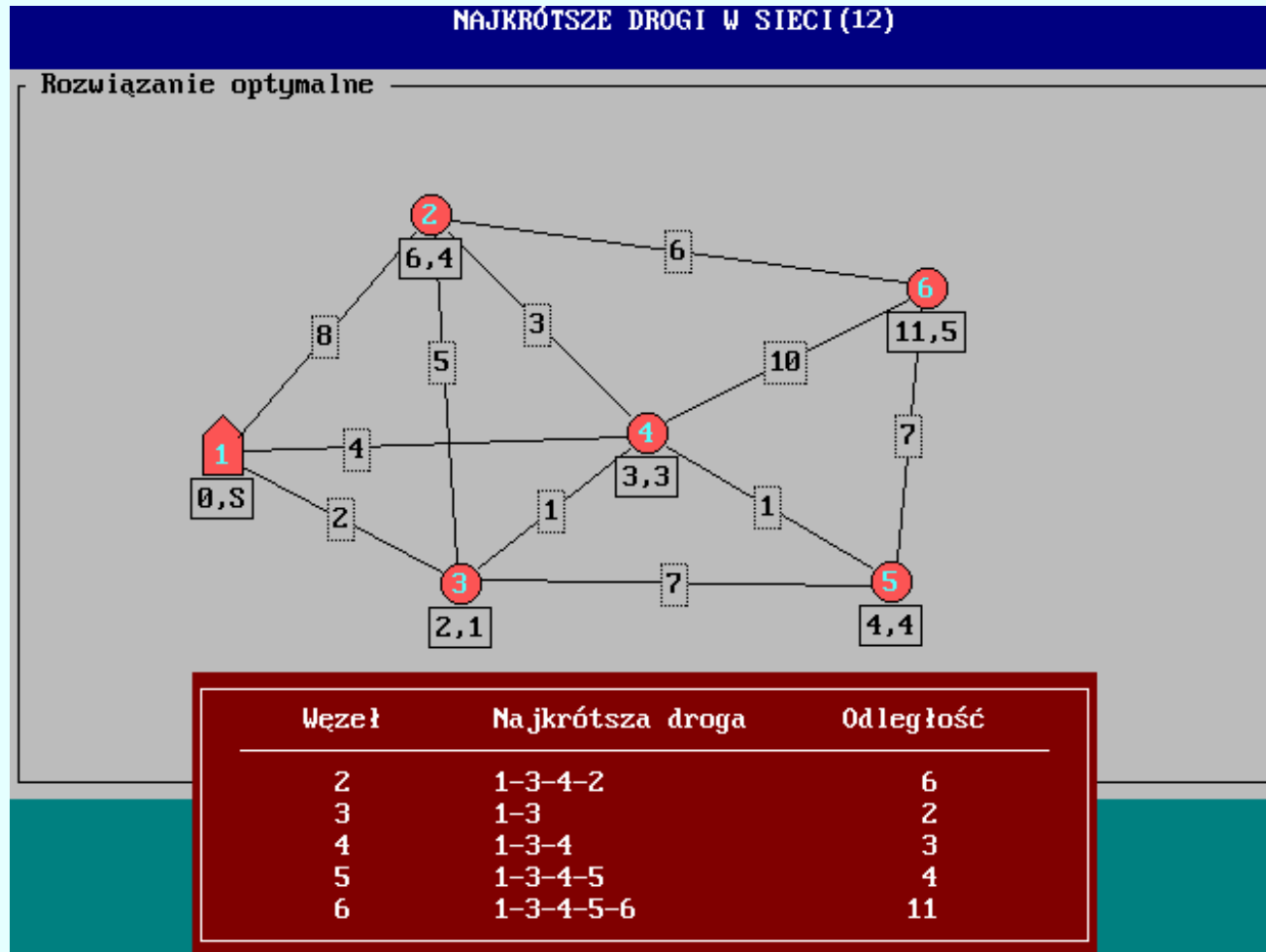
Iteracja 6



8.3. Najkrótsze drogi w sieci

8.3.2. Kolejne iteracje (7/7)

Rozwiązanie optymalne



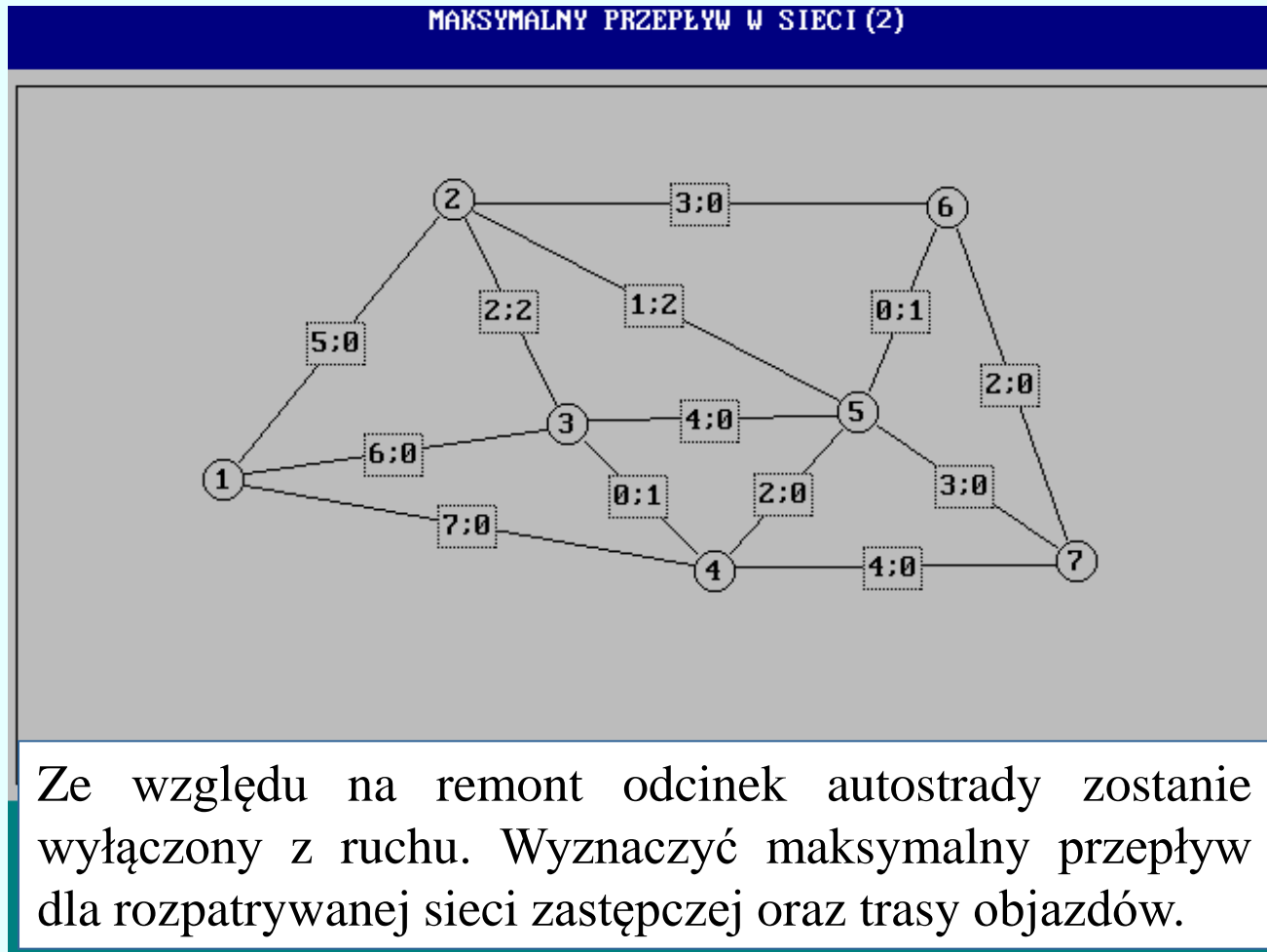
Sformułowanie zadania

Wyróżniamy wierzchołek początkowy, zwany **źródłem** oraz wierzchołek końcowy, zwany **ujściem**. Każda krawędź grafu opisana jest dwoma liczbami, charakteryzującymi przepustowość krawędzi

Zaplanować przepływ pomiędzy źródłem i ujściem, uwzględniając przepustowość wszystkich krawędzi, by łączna wielkość tego przepływu była największa

8.4. Maksymalny przepływ w sieci

Przykład 8.3



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.1. Reguły postępowania przy poszukiwaniu maksymalnego przepływu w sieci (1/1)

Algorytm

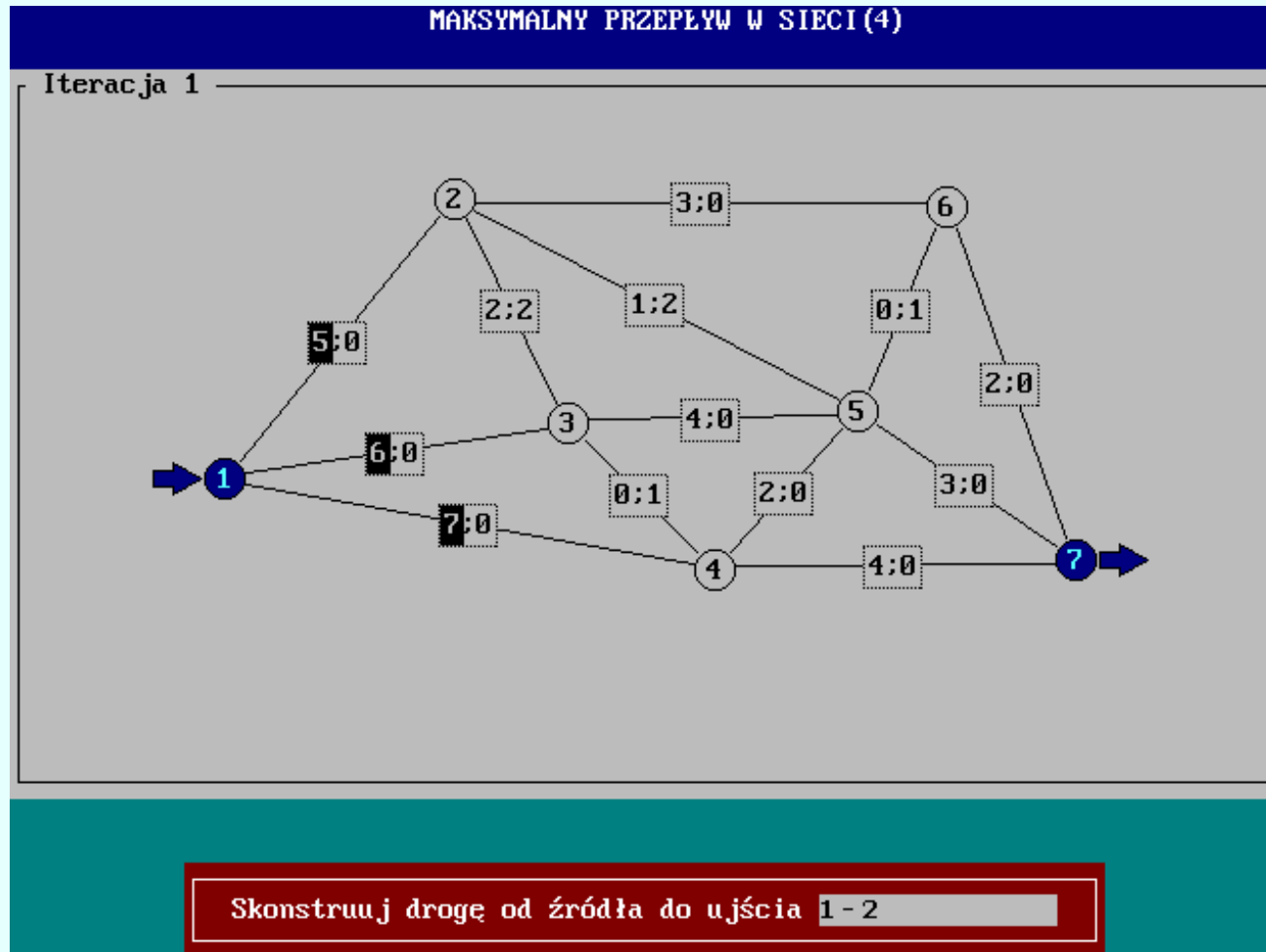
W każdej iteracji wykonujemy następujące kroki:

- 1.** Znajdujemy dowolną ścieżkę prowadzącą od źródła do ujścia, dla której przepustowości wszystkich łuków są większe od zera. O ile takiej ścieżki nie można wyznaczyć, to przepływ nie istnieje (lub maksymalny przepływ wyznaczono już w poprzednich krokach).
- 2.** Na wyznaczonej drodze znajdujemy krawędź o najmniejszej przepustowości p w rozpatrywanym kierunku.
- 3.** Zmniejszamy przepustowość łuków leżących na znalezionej ścieżce o p i zwiększamy o tę samą wartość odpowiednie przepustowości residualne. Wracamy do kroku 1.

8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (1/9)

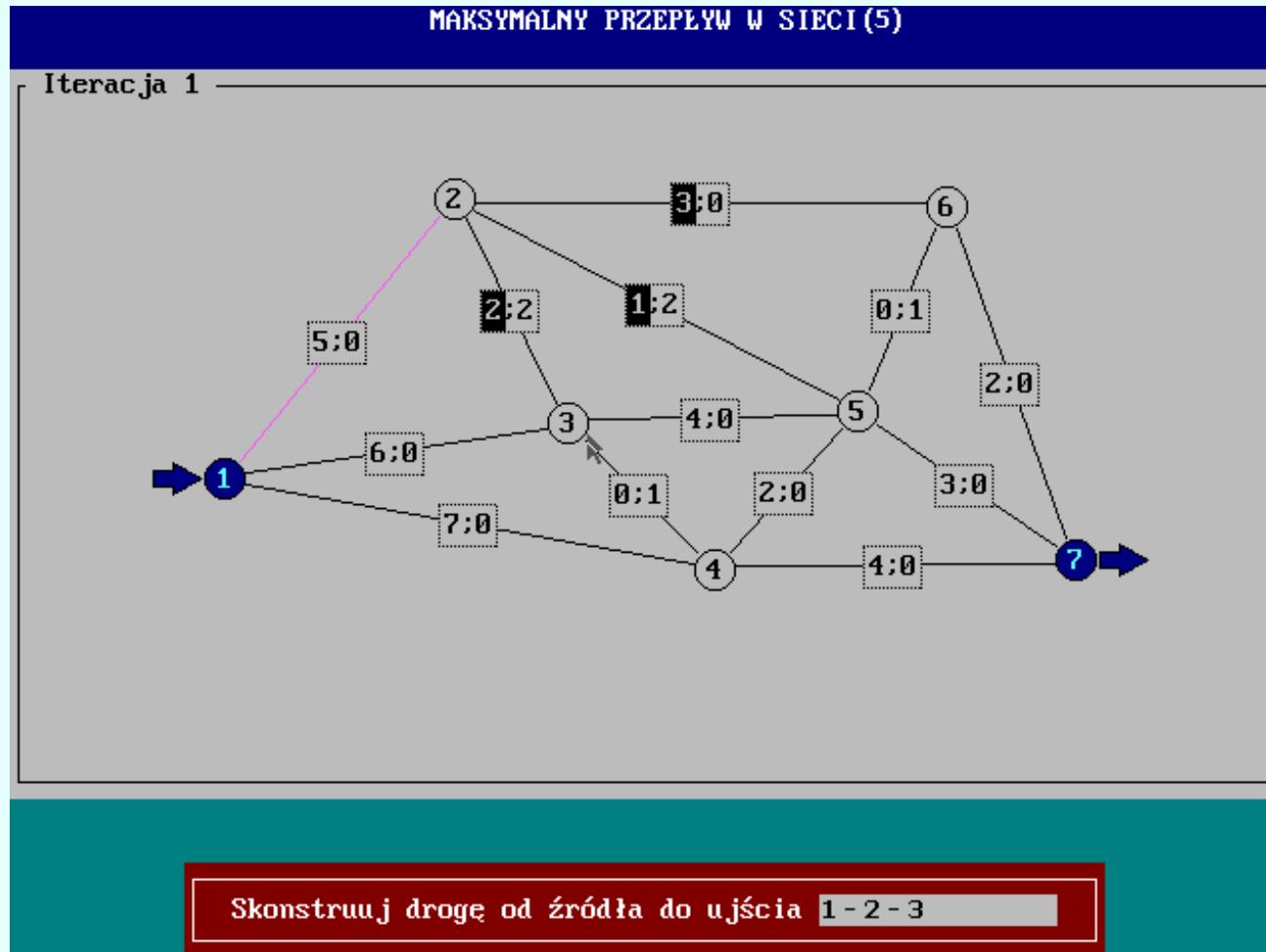
Iteracja 1



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (2/9)

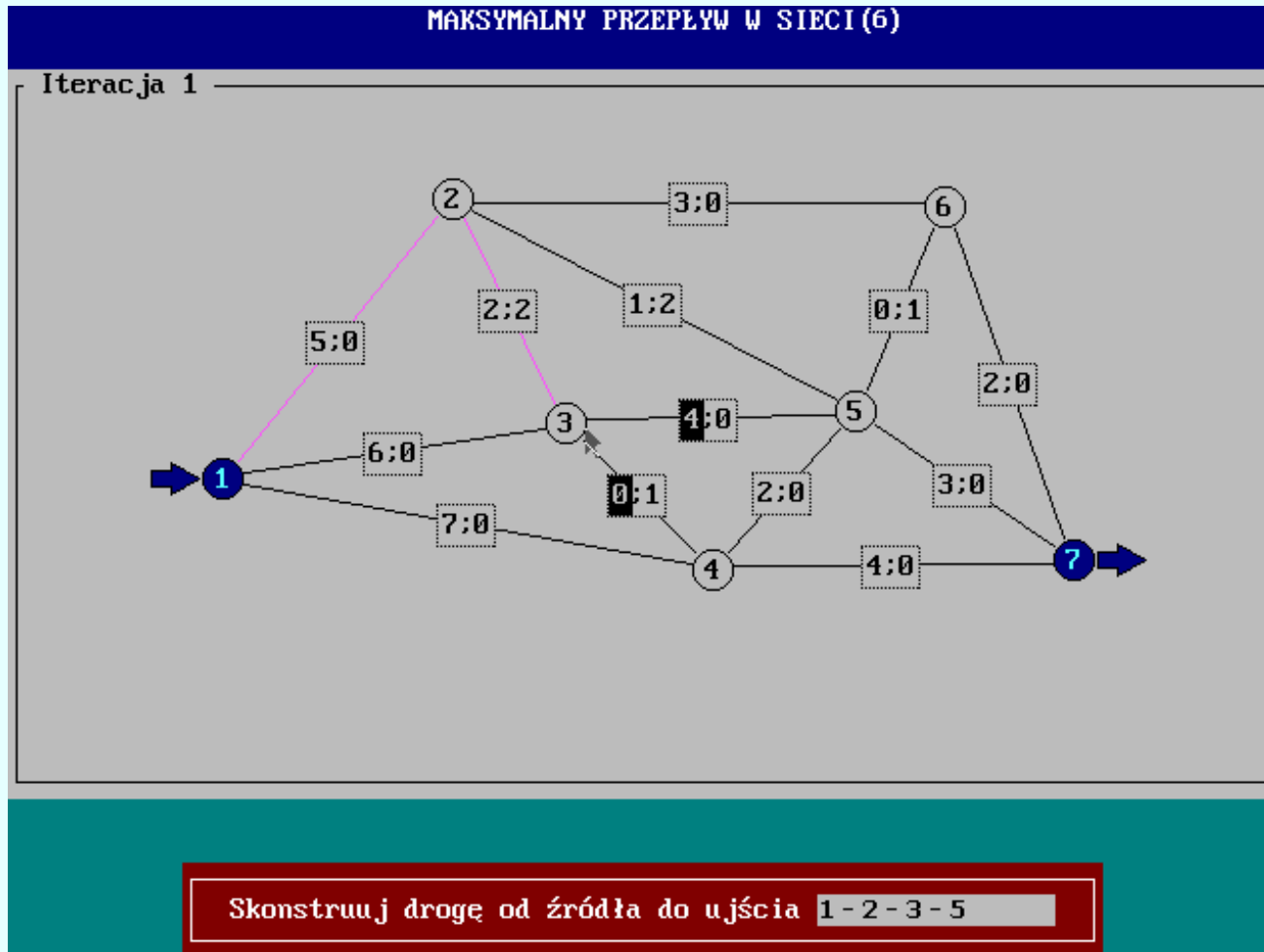
Iteracja 1 (c.d.)



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (3/9)

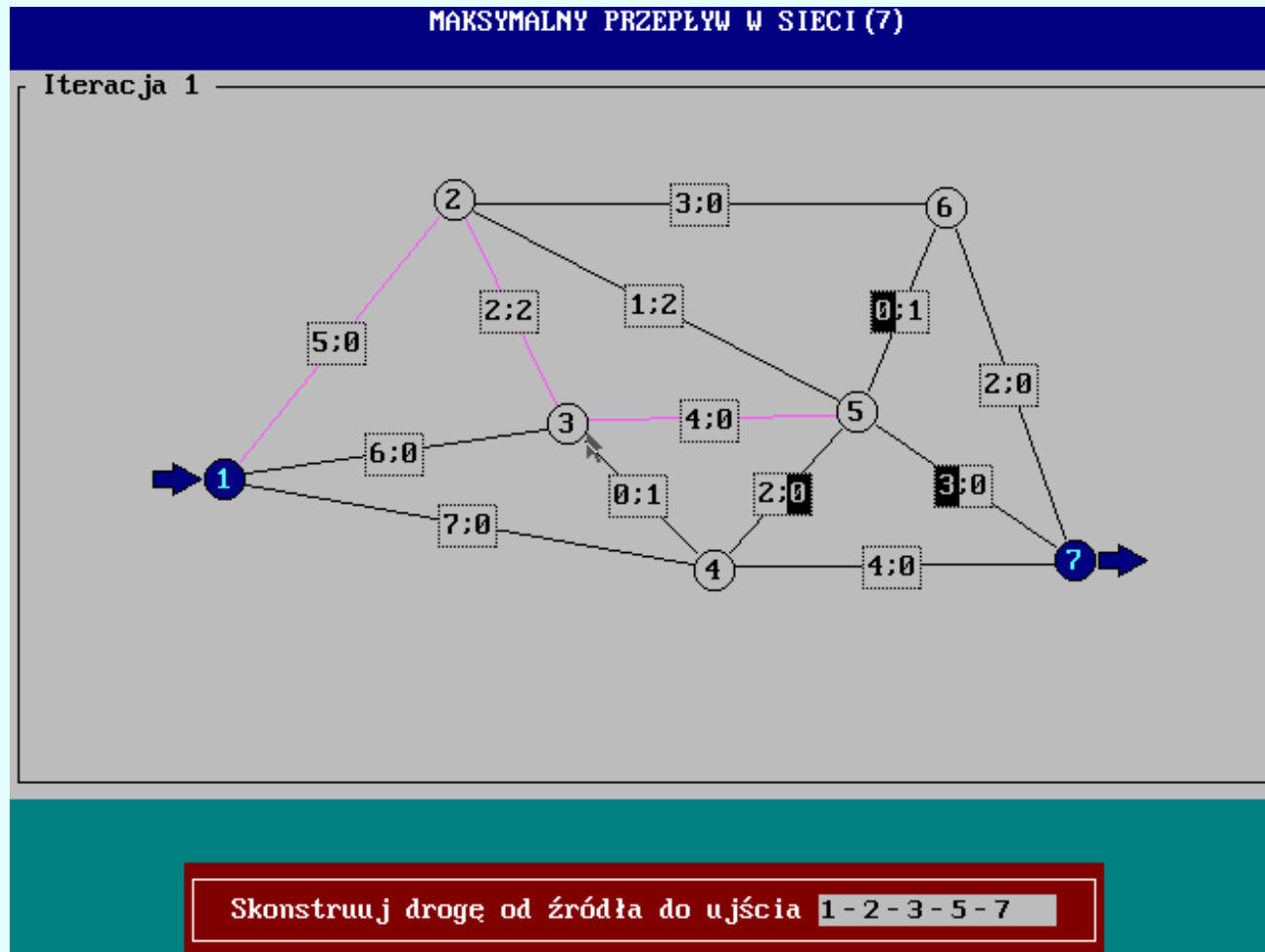
Iteracja 1 (c.d.)



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (4/9)

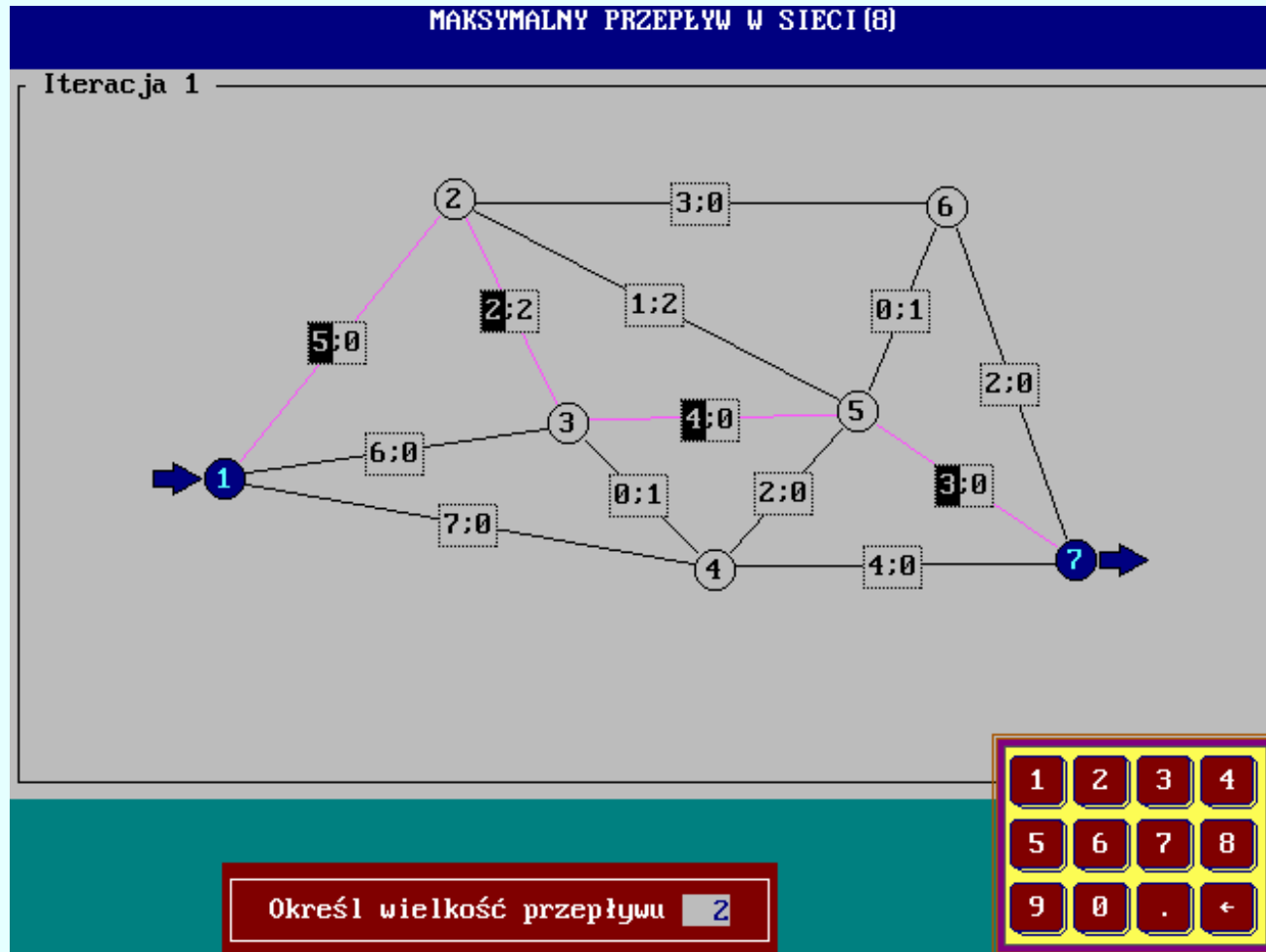
Iteracja 1 (c.d.)



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (5/9)

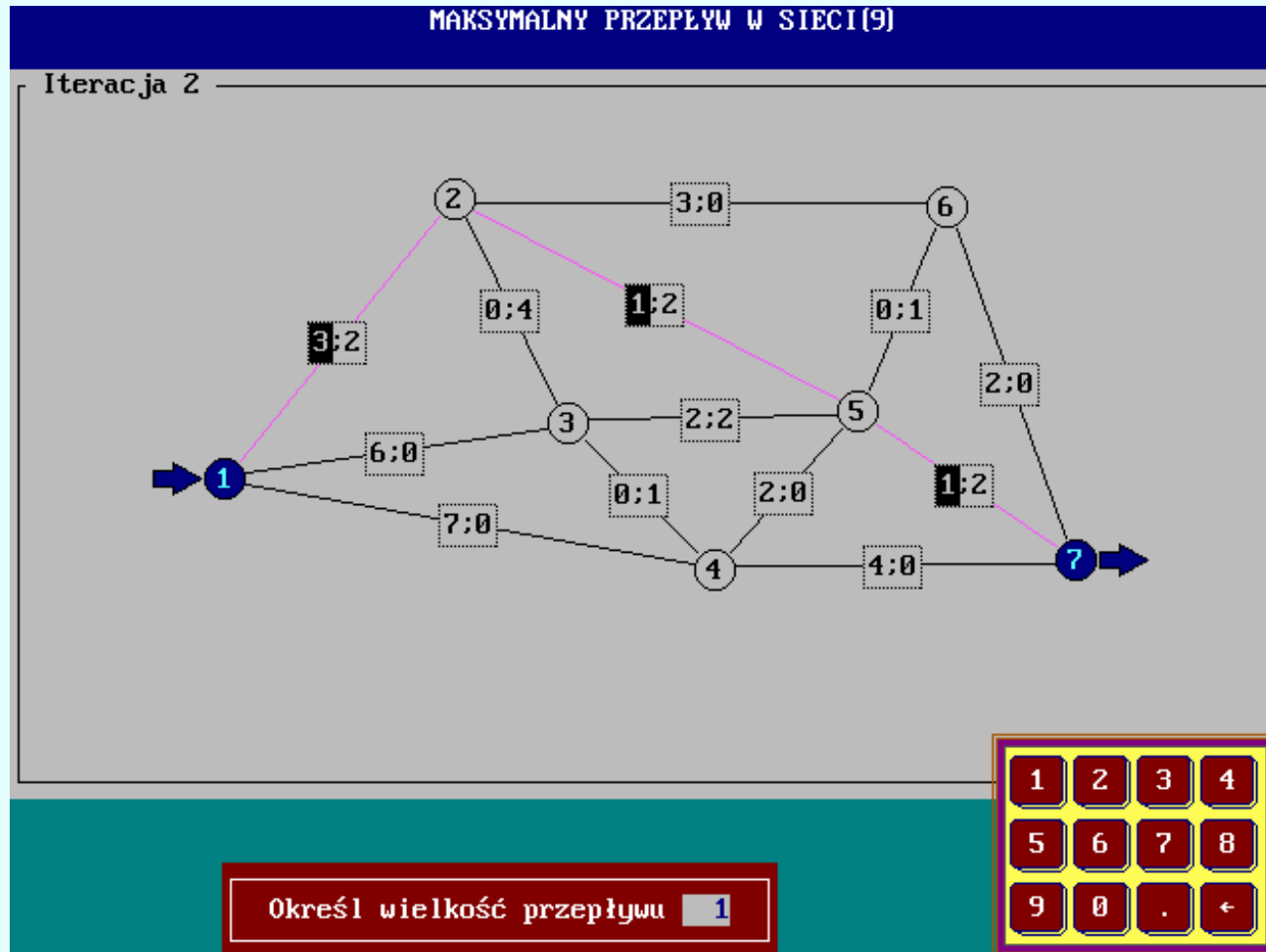
Iteracja 1 (c.d.)



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (6/9)

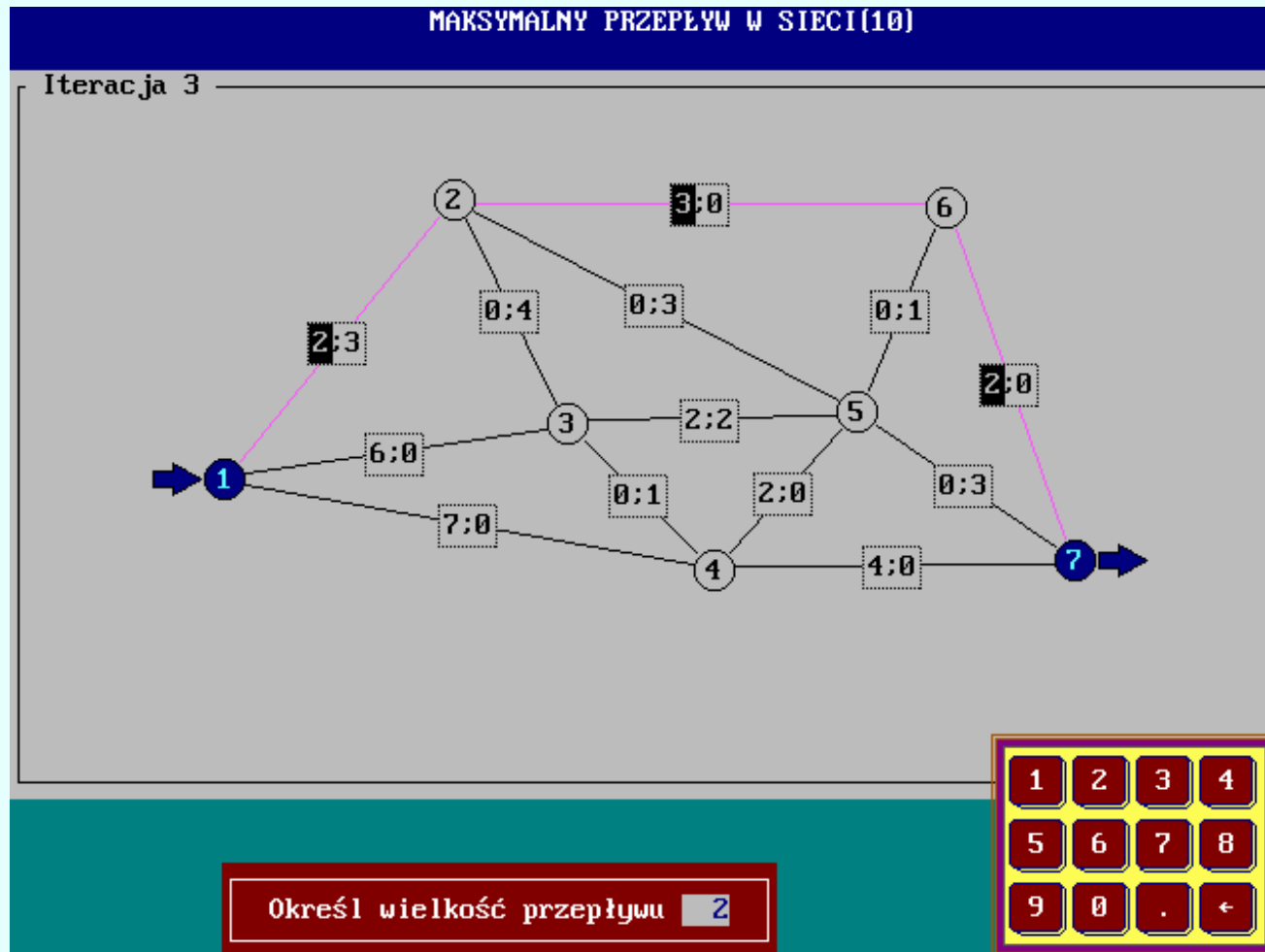
Iteracja 2



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (7/9)

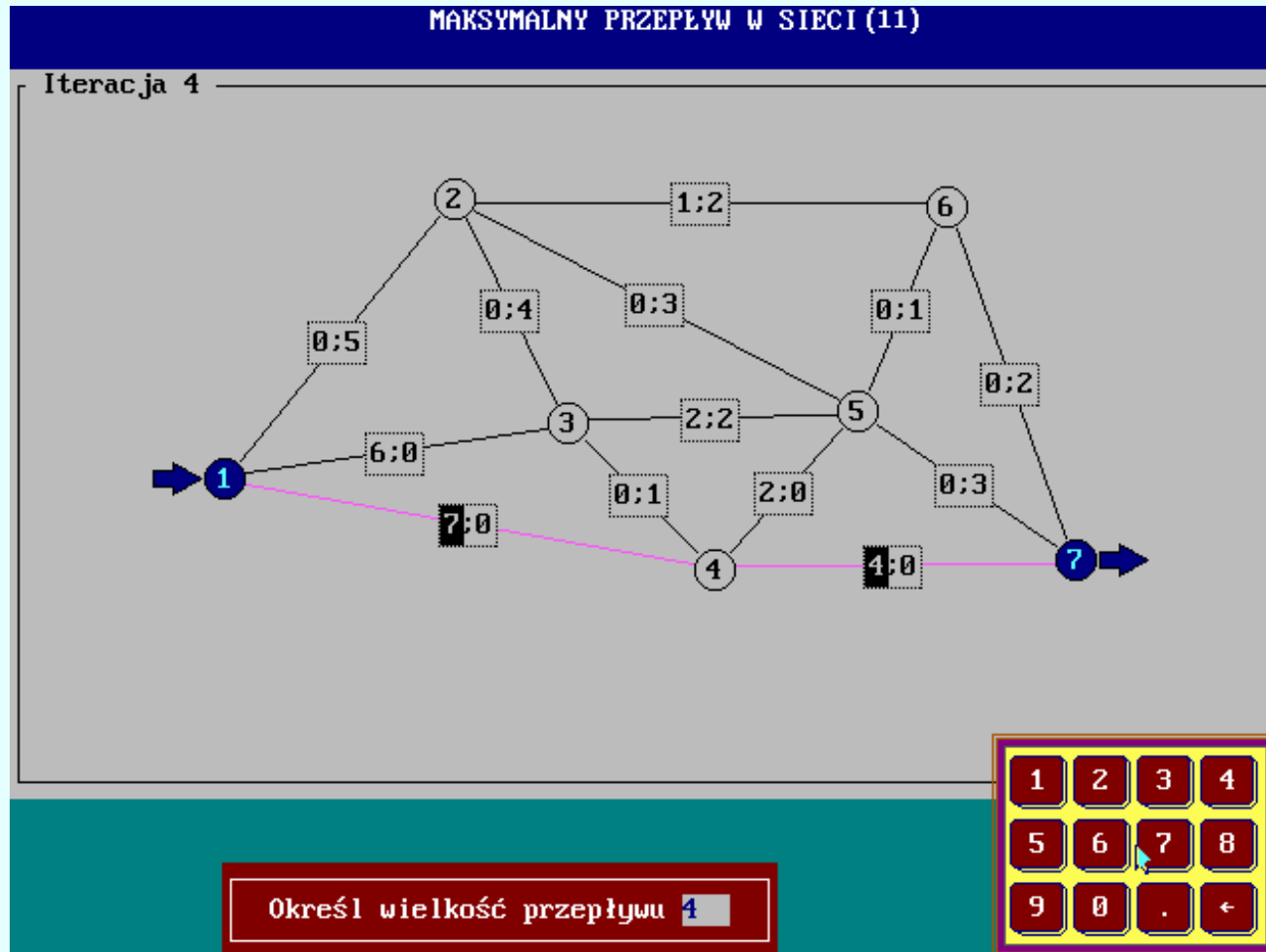
Iteracja 3



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (8/9)

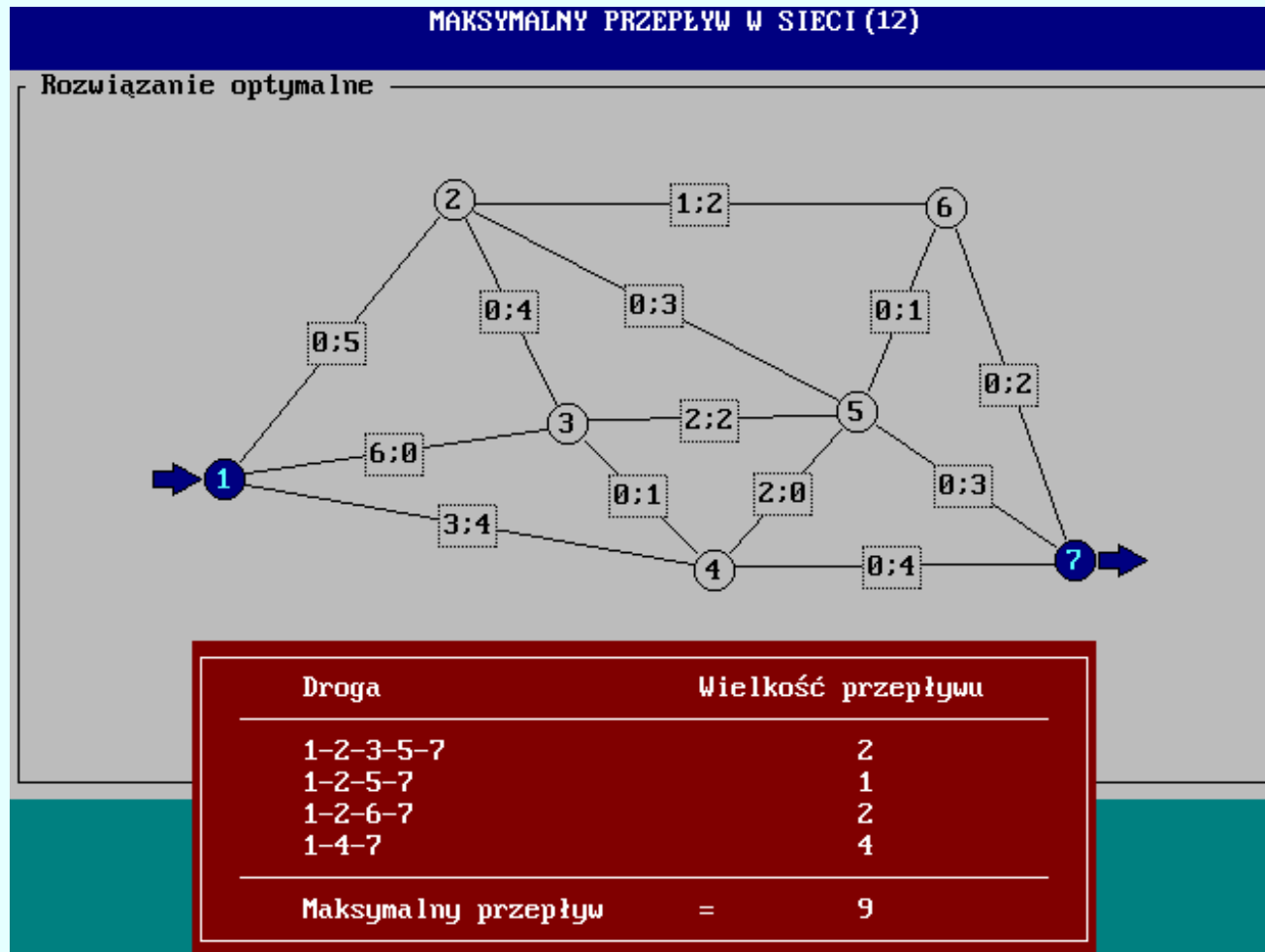
Iteracja 4



8.4. Maksymalny przepływ w sieci

8.4.2. Kolejne iteracje (9/9)

Rozwiązanie optymalne



8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.1. Optymalizacja przebiegu linii światłowodowej (1/4)

Przykład 8.4

Wyższa uczelnia planuje wyposażenie ośrodka akademickiego w sieć komputerową. W tym celu konieczne jest połączenie budynków liniami światłowodowymi. Ponieważ koszt założenia linii jest bardzo wysoki, uczelnia chce zaprojektować taką sieć połączeń, która łączyłaby wszystkie budynki przy jak najmniejszym koszcie, nawet jeśli oznaczałoby to, że nie wszystkie budynki są ze sobą bezpośrednio połączone. Informacje dotyczące przewidywanych kosztów budowy linii między poszczególnymi budynkami przedstawione są w tablicy. Ze względu na topografię terenu niektóre połączenia są niemożliwe, co zostało zaznaczone w tablicy jako –. Zminimalizować koszty budowy sieci umożliwiającej przesyłanie informacji między dowolnymi budynkami uczelni.

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.1. Optymalizacja przebiegu linii światłowodowej (2/4)

Koszty połączeń		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Rektorat	Budynek A	Budynek B	Budynek C	Budynek D	Budynek E	Budynek F	Biblioteka	Akademik 1	Akademik 2
1	Rektorat		8	7	9	-	18	-	-	-	-
2	Budynek A	8		7	8	-	-	-	-	5	-
3	Budynek B	7	7		8	7	12	10	16	-	-
4	Budynek C	9	8	8		18	-	-	-	9	-
5	Budynek D	-	-	7	18		15	9	-	15	-
6	Budynek E	18	-	12	-	15		6	14	-	-
7	Budynek F	-	-	10	-	9	6		12	14	20
8	Biblioteka	-	-	16	-	-	14	12		5	-
9	Akademik 1	-	5	-	9	15	-	14	5		5
10	Akademik 2	-	-	-	-	-	-	20	-	5	

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.1. Optymalizacja przebiegu linii światłowodowej (3/4)

Konstrukcja sieci

krawędź	koszt
1-2	8
1-3	7
1-4	9
1-6	18
2-3	7
2-4	8
2-9	5
3-4	8
3-5	7
3-6	12

krawędź	koszt
4-5	18
4-9	9
5-6	15
5-7	9
5-9	15
6-7	6
6-8	14
7-8	12
7-9	14
7-10	20
8-9	5
9-10	5

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.1. Optymalizacja przebiegu linii światłowodowej (4/4)

Rozwiązanie optymalne

krawędź	koszt
1-2	7
2-3	7
2-4	8
2-9	5
3-5	7
5-7	9
6-7	6
8-9	5
9-10	5
suma	59

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.2. Dynamiczny problem wielkości zamówienia (1/4)

Przykład 8.5

Na początku każdego okresu można złożyć zamówienie w wysokości, która pokrywa popyt z jednego lub kilku następujących po sobie miesięcy. Określić, w jakich okresach utworzyć zapas i w jakiej wysokości, tak aby zminimalizować łączny koszt zaspokojenia popytu podczas okresu objętego planowania.

Koszt zakupu = 120. Jednostkowy koszt utrzymania zapasu niezależny od długości okresu magazynowania = 3

Popyt:

miesiąc	popyt
1	35
2	70
3	17
4	52
5	42
6	20

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.2. Dynamiczny problem wielkości zamówienia (2/4)

Koszty zakupu i utrzymania zapasu

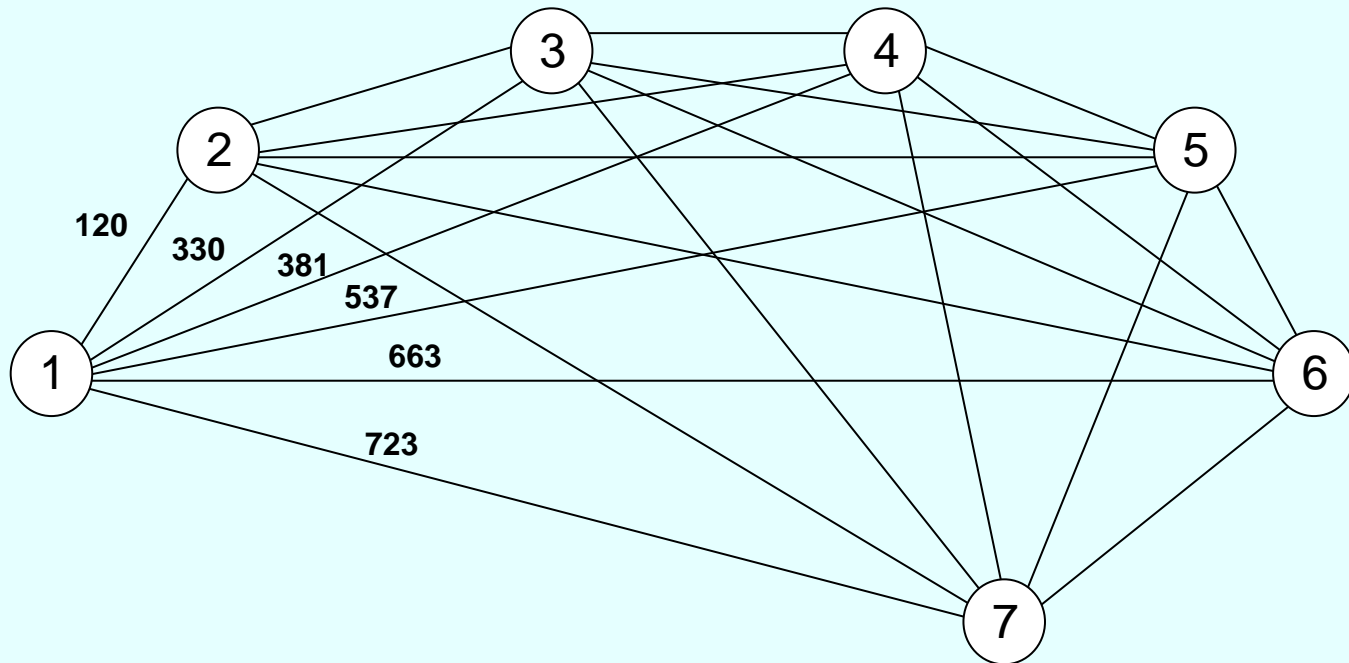
Krawędź	Koszt
1-2	120
1-3	$120 + 70 \cdot 3 = 330$
1-4	$120 + 87 \cdot 3 = 381$
1-5	$120 + 139 \cdot 3 = 537$
1-6	$120 + 181 \cdot 3 = 663$
1-7	$120 + 201 \cdot 3 = 723$
2-3	120
2-4	$120 + 17 \cdot 3 = 171$
2-5	$120 + 69 \cdot 3 = 327$
2-6	$120 + 111 \cdot 3 = 453$
2-7	$120 + 131 \cdot 3 = 513$

Krawędź	Koszt
3-4	120
3-5	$120 + 52 \cdot 3 = 276$
3-6	$120 + 94 \cdot 3 = 402$
3-7	$120 + 114 \cdot 3 = 462$
4-5	120
4-6	$120 + 42 \cdot 3 = 246$
4-7	$120 + 62 \cdot 3 = 306$
5-6	120
5-7	$120 + 20 \cdot 3 = 180$
6-7	120

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.2. Dynamiczny problem wielkości zamówienia (3/4)

Zastosowanie algorytmu najkrótszych dróg w sieci



8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.2. Dynamiczny problem wielkości zamówienia (4/4)

Rozwiązanie i interpretacja

Rozwiązanie optymalne

Najkrótsza droga od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego przechodzi przez wierzchołki 1-2-4-5-7. Koszt przejścia tej drogi wynosi 591.

Interpretacja rozwiązania

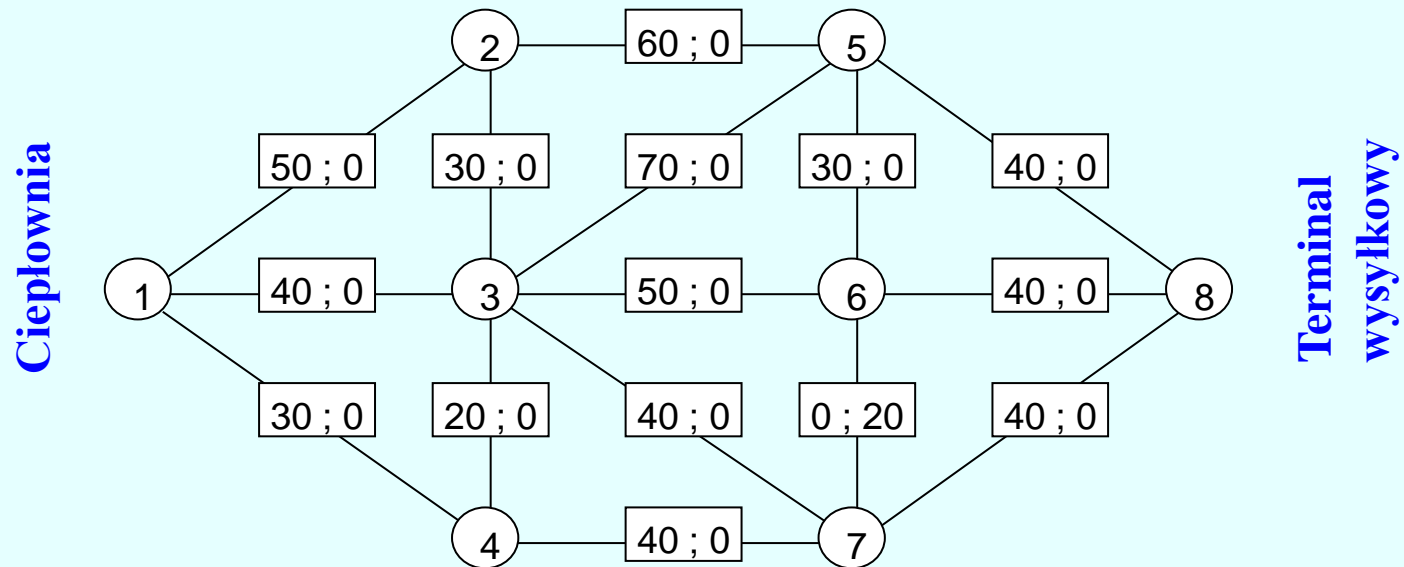
Optymalny plan zakupów przewiduje dokonanie zakupu 35 jednostek w pierwszym miesiącu (krawędź 1-2: 35), 87 jednostek na dwa kolejne miesiące (krawędź 2-4: 70 + 17), następnie 52 jednostek (krawędź 4-5: 52) i 62 jednostek na ostatnie dwa miesiące (krawędź 5-7: 42 + 20).

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.3 Optymalizacja transportu gorącej wody z ciepłowni do terminala wysyłkowego (1/4)

Przykład 8.6

Elektrociepłownia zbudowała system rurociągów do transportu gorącej wody z ciepłowni do terminala wysyłkowego. Rysunek ilustruje plan rurociągów, stacji pomp oraz przepustowość poszczególnych połączeń. Przepływ przez rurociąg może odbywać się w dowolnym (ale tylko jednym) kierunku, a jego wielkość nie może przekroczyć przepustowości danego odcinka.



Znaleźć wielkość maksymalnego przepływu z ciepłowni do terminala oraz określić, ilości ciepłej wody płynące przez poszczególne odcinki.

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.3. Optymalizacja transportu gorącej wody z ciepłowni do terminala wysyłkowego (2/4)

Rozwiązanie optymalne

droga	wielkość przepływu
1-2-3-4-7-8	20
1-2-3-5-8	10
1-2-5-8	20
1-3-2-5-8	10
1-3-2-5-6-8	20
1-3-5-6-8	10
1-4-3-6-8	10
1-4-3-7-8	10
1-4-7-8	10

Maksymalny przepływ = 120

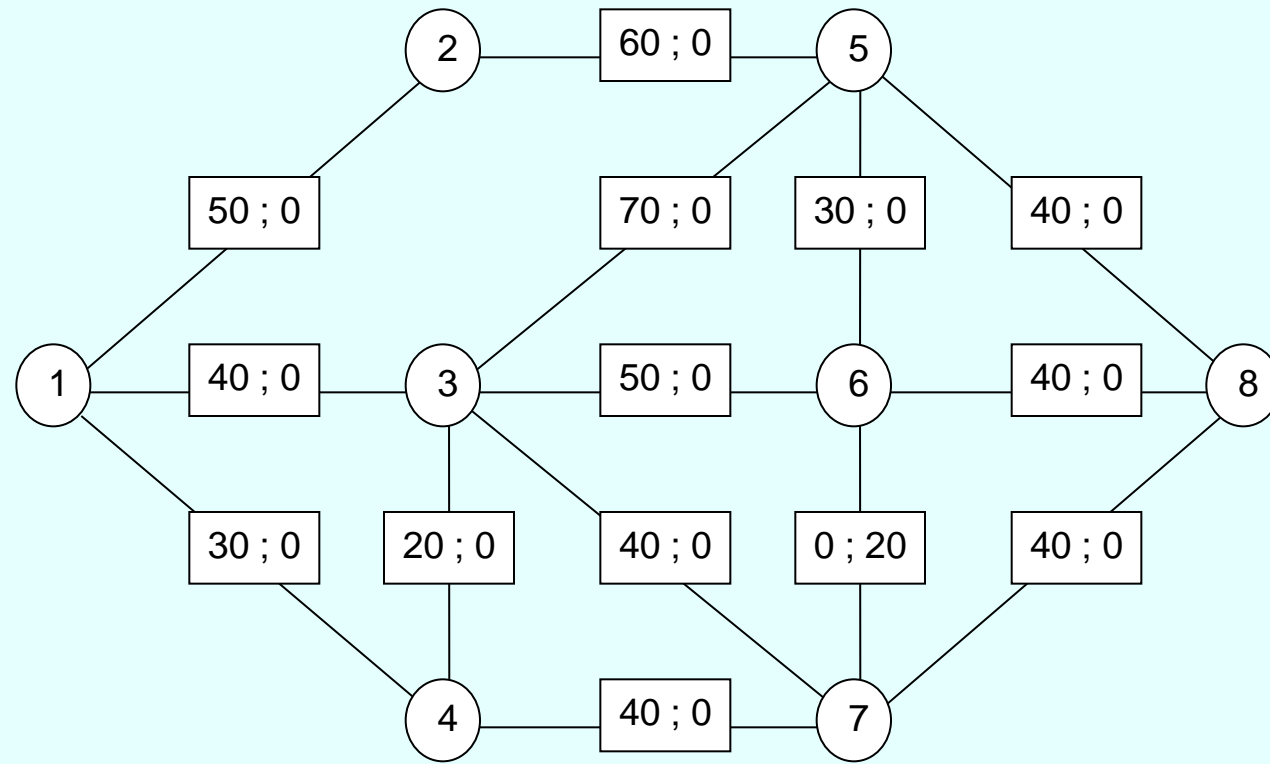
odcinek	przepływ
1-2	50
1-3	40
1-4	30
2-3	30
2-5	50
3-2	30
3-5	20
3-6	10
3-7	10
4-3	20
4-7	30
5-8	40
6-8	40
7-8	40

8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.3. Optymalizacja transportu gorącej wody z ciepłowni do terminala wysyłkowego (3/4)

Modyfikacja sieci

Jeżeli nastąpi awaria odcinka 2–3, to czy będzie miała ona wpływ na przepływ przez sieć?



8.5. Przykłady wykorzystania optymalizacji sieciowej

8.5.3. Optymalizacja transportu gorącej wody z ciepłowni do terminala wysyłkowego (4/4)

Rozwiązanie optymalne zadania zmodyfikowanego

droga	wielkość przepływu
1-2-5-8	40
1-2-5-6-8	10
1-3-4-7-8	20
1-3-5-6-8	20
1-4-3-6-8	10
1-4-3-7-8	10
1-4-7-8	10

Maksymalny przepływ = 120

Pora na relaks

