Programowanie dynamiczne

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- **Wieloetapowe procesy decyzyjne**
- **Zmienne stanu**
- **Zmienne decyzyjne**
- **Funkcje przejścia**
- **Korzyści (straty etapowe)**
- **Funkcja kryterium**
- **Strategia**
- **Strategia optymalna**
- **Optymalna realizacja procesu**
- **Dekompozycja**
- **Zasada optymalności Bellmana**
- **Wektorowa wersja zasady optymalności Bellmana**

Przykład 9.1
Zadanie sterowania zapasami

Liczba etapów	$T = 3$
Stan magazynu na początku pierwszego etapu	$y_1 = 1$
Maksymalna możliwość uzupełniania zapasu w jednym etapie	$p_t = 4$
Maksymalne możliwości magazynowania	$h_t = 4$
Popyt (taki sam w każdym etapie)	$d_t = 3$
Koszty stałe uzupełniania zapasu	$k_t = 8$
Jednostkowe koszty zmienne uzupełniania zapasu	$c_t = 2$
Jednostkowe koszty magazynowania	$m_t = 3$
Pożądany stan magazynu na koniec ostatniego etapu	$y_{T+1} = 0$

Zminimalizować koszty zakupu i koszty magazynowania.

9.2.1. Składowe wieloetapowego procesu decyzyjnego (1/3)

Opis procesu

y_t - **stan procesu** na początku etapu *t*,
(stan magazynu na początku etapu *t*)

x_t - **decyzja dla etapu *t***,
(wielkość zamówienia, związana z uzupełnieniem zapasu)

$y_{t+1} = y_t + x_t - d_t$ **- funkcja przejścia,**

$Y_t = \{y_t : 0 \leq y_t \leq h_t\}$ **- zbiory stanów dopuszczalnych dla etapu *t*.**

9.2.1. Składowe wieloetapowego procesu decyzyjnego (2/3)

Zbiory decyzji dopuszczalnych

1. Popyt w każdym etapie musi być zaspokojony

$$y_t + x_t \geq d_t$$

2. Zapasy na końcu etapu nie mogą przekraczać pojemności magazynu

$$y_t + x_t - d_t \leq h_t$$

3. Nie mogą zostać przekroczone możliwości uzupełniania zapasu

$$x_t \leq p_t$$

4. Wielkość, o którą uzupełniamy zapasy jest nieujemna

$$x_t \geq 0$$

$$X_t(y_t) = \{ x_t : 0 \leq y_t + x_t - d_t \leq h_t, 0 \leq x_t \leq p_t \}$$

9.2.1. Składowe wieloetapowego procesu decyzyjnego (3/3)

Funkcje kosztów etapowych

$\xi_t(x_t)$ - koszty uzupełniania zapasu w etapie t,

$\mu_t(y_{t+1})$ - koszty magazynowania w etapie t,

$$\lambda(r) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } r > 0 \\ 0 & \text{gdy } r \leq 0 \end{cases}$$

$$\xi_t(x_t) = k_t \cdot \lambda(x_t) + c_t \cdot x_t$$

$$\mu_t(y_{t+1}) = m_t \cdot y_{t+1} = m_t \cdot (y_t + x_t - d_t)$$

$$f_t(y_t, x_t) = \mathbf{k_t \cdot \lambda(x_t) + c_t \cdot x_t + m_t \cdot (y_t + x_t - d_t)}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (1/9)

Etap 1

$$Y_1 = \{ 1 \}$$

$$X_1(1) = \{ x_1: \quad 0 \le 1 + x_1 - 3 \le 4, \quad 0 \le x_1 \le 4 \}$$

---

dla

$x_1 = 0$	$0 \not\le 1 + 0 - 3 \le 4$	czyli	$0 \notin X_1(1)$
$x_1 = 1$	$0 \not\le 1 + 1 - 3 \le 4$	czyli	$1 \notin X_1(1)$
$x_1 = 2$	$0 \le 1 + 2 - 3 \le 4$	czyli	$2 \in X_1(1)$
$x_1 = 3$	$0 \le 1 + 3 - 3 \le 4$	czyli	$3 \in X_1(1)$
$x_1 = 4$	$0 \le 1 + 4 - 3 \le 4$	czyli	$4 \in X_1(1)$

czyli

$$X_1(1) = \{ 2, 3, 4 \}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (2/9)

Etap 1 (c.d.)

$$y_2 = y_1 + x_1 - 3$$

---

dla

$x_1 = 2$ $\qquad y_2 = 1 + 2 - 3 = 0$

$x_1 = 3$ $\qquad y_2 = 1 + 3 - 3 = 1$

$x_1 = 4$ $\qquad y_2 = 1 + 4 - 3 = 2$

czyli

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (3/9)

Etap 2

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(0) = \{ x_2\colon \quad 0 \le 0 + x_2 - 3 \le 4, \quad 0 \le x_2 \le 4 \}$$

dla

$x_2 = 0$	$0 \not\le 0 + 0 - 3 \le 4$	czyli	$0 \notin X_2(0)$
$x_2 = 1$	$0 \not\le 0 + 1 - 3 \le 4$	czyli	$1 \notin X_2(0)$
$x_2 = 2$	$0 \not\le 0 + 2 - 3 \le 4$	czyli	$2 \notin X_2(0)$
$x_2 = 3$	$0 \le 0 + 3 - 3 \le 4$	czyli	$3 \in X_2(0)$
$x_2 = 4$	$0 \le 0 + 4 - 3 \le 4$	czyli	$4 \in X_2(0)$

czyli

$$X_2(0) = \{ 3, 4 \}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (4/9)

Etap 2 (c.d.)

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(1) = \{ x_2: \quad 0 \leq 1 + x_2 - 3 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 4 \}$$

---

dla

$x_2 = 0$	$0 \not\leq 1 + 0 - 3 \leq 4$	czyli	$0 \notin X_2(1)$
$x_2 = 1$	$0 \not\leq 1 + 1 - 3 \leq 4$	czyli	$1 \notin X_2(1)$
$x_2 = 2$	$0 \leq 1 + 2 - 3 \leq 4$	czyli	$2 \in X_2(1)$
$x_2 = 3$	$0 \leq 1 + 3 - 3 \leq 4$	czyli	$3 \in X_2(1)$
$x_2 = 4$	$0 \leq 1 + 4 - 3 \leq 4$	czyli	$4 \in X_2(1)$

czyli

$$X_2(1) = \{ 2, 3, 4 \}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (5/9)

Etap 3

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(2) = \{ x_2: \quad 0 \le 2 + x_2 - 3 \le 4, \quad 0 \le x_2 \le 4 \}$$

dla

$x_2 = 0$	$0 \not\le 2 + 0 - 3 \le 4$	czyli	$0 \notin X_2(2)$
$x_2 = 1$	$0 \le 2 + 1 - 3 \le 4$	czyli	$1 \in X_2(2)$
$x_2 = 2$	$0 \le 2 + 2 - 3 \le 4$	czyli	$2 \in X_2(2)$
$x_2 = 3$	$0 \le 2 + 3 - 3 \le 4$	czyli	$3 \in X_2(2)$
$x_2 = 4$	$0 \le 2 + 4 - 3 \le 4$	czyli	$4 \in X_2(2)$

czyli

$$X_2(2) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (6/9)

Etap 3 (c.d.)

$$y_3 = y_2 + x_2 - 3$$

$\mathbf{y_2 = 0}$	$x_2 = 3$	$y_3 = 0 + 3 - 3 = 0$
	$x_2 = 4$	$y_3 = 0 + 4 - 3 = 1$
$\mathbf{y_2 = 1}$	$x_2 = 2$	$y_2 = 1 + 2 - 3 = 0$
	$x_2 = 3$	$y_3 = 1 + 3 - 3 = 1$
	$x_2 = 4$	$y_3 = 1 + 4 - 3 = 2$
$\mathbf{y_2 = 2}$	$x_2 = 1$	$y_2 = 2 + 1 - 3 = 0$
	$x_2 = 2$	$y_3 = 2 + 2 - 3 = 1$
	$x_2 = 3$	$y_3 = 2 + 3 - 3 = 2$
	$x_2 = 4$	$y_3 = 2 + 4 - 3 = 3$

czyli

$$Y_3 = \{\ 0, 1, 2, 3\}$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (7/9)

Etap 3 (c.d.)

Stan końcowy procesu jest ustalony i wynosi 0, stąd:

$$X_3(0) = \{ x_3 : 0 \leq 0 + x_3 - 3 = 0 \}$$
$$x_3 - 3 = 0 \,;\, x_3 = 3$$

$$X_3(1) = \{ x_3 : 0 \leq 1 + x_3 - 3 = 0 \}$$
$$x_3 - 2 = 0 \,;\, x_3 = 2$$

$$X_3(2) = \{ x_3 : 0 \leq 2 + x_3 - 3 = 0 \}$$
$$x_3 - 1 = 0 \,;\, x_3 = 1$$

$$X_3(3) = \{ x_3 : 0 \leq 3 + x_3 - 3 = 0 \}$$
$$x_3 = 0$$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (8/9)

Zestawienie

$Y_1 = \{ 1 \}$ $X_1(1) = \{ 2, 3, 4 \}$

$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$ $X_2(0) = \{ 3, 4 \}$

$X_2(1) = \{ 2, 3, 4 \}$

$X_2(2) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$Y_3 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ $X_3(0) = \{ 3 \}$

$X_3(1) = \{ 2 \}$

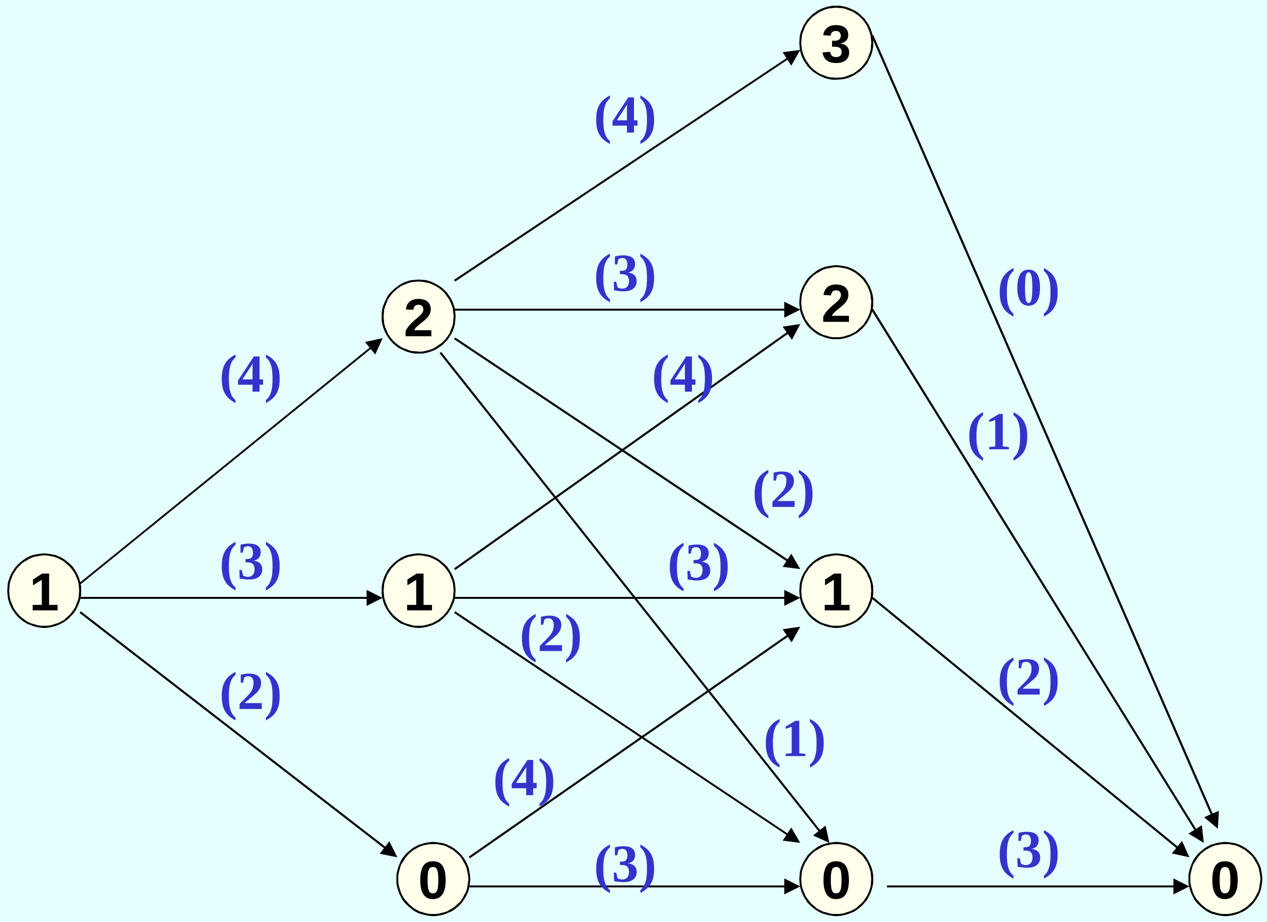
$X_3(2) = \{ 1 \}$

$X_3(3) = \{ 0 \}$

$Y_4 = \{ 0 \}$

9.2.2. Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych (9/9)

Graf procesu



9.2.3. Wartości funkcji kosztów etapowych (1/2)

Wartości liczbowe

$$f_t(y_t, x_t) = k_t \cdot \lambda(x_t) + c_t \cdot x_t + m_t \cdot (y_t + x_t - d_t)$$

$$f_t(0,3) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (0 + 3 - 3) = 14$$
$$f_t(0,4) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (0 + 4 - 3) = 19$$

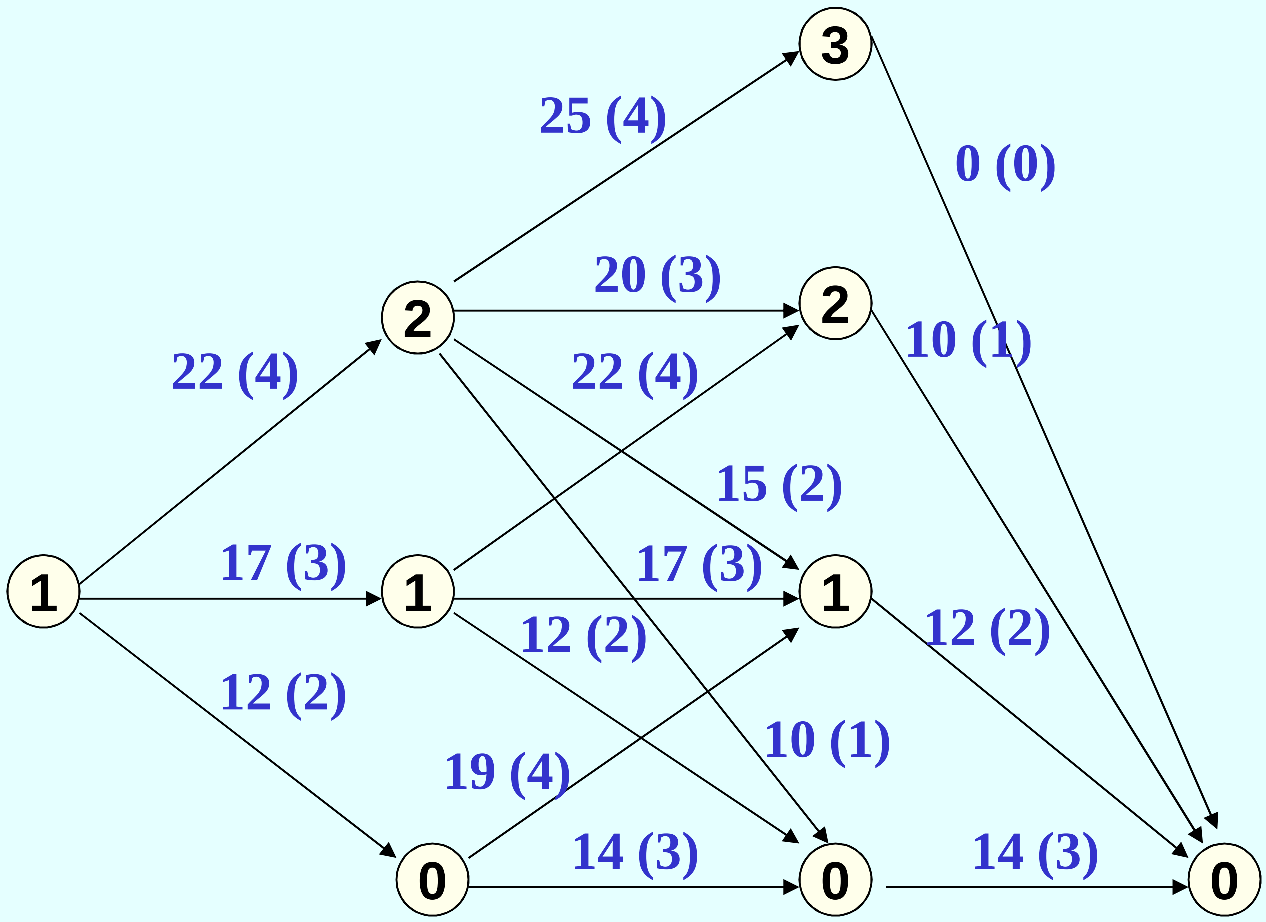
$$f_t(1,2) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (1 + 2 - 3) = 12$$
$$f_t(1,3) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (1 + 3 - 3) = 17$$
$$f_t(1,4) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (1 + 4 - 3) = 22$$

$$f_t(2,1) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (2 + 1 - 3) = 10$$
$$f_t(2,2) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2 + 2 - 3) = 15$$
$$f_t(2,3) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 + 3 - 3) = 20$$
$$f_t(2,4) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (2 + 4 - 3) = 25$$

$$f_t(3,0) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (3 + 0 - 3) = 0$$

9.2.3. Wartości funkcji kosztów etapowych (2/2)

Graf procesu z kosztami etapowymi



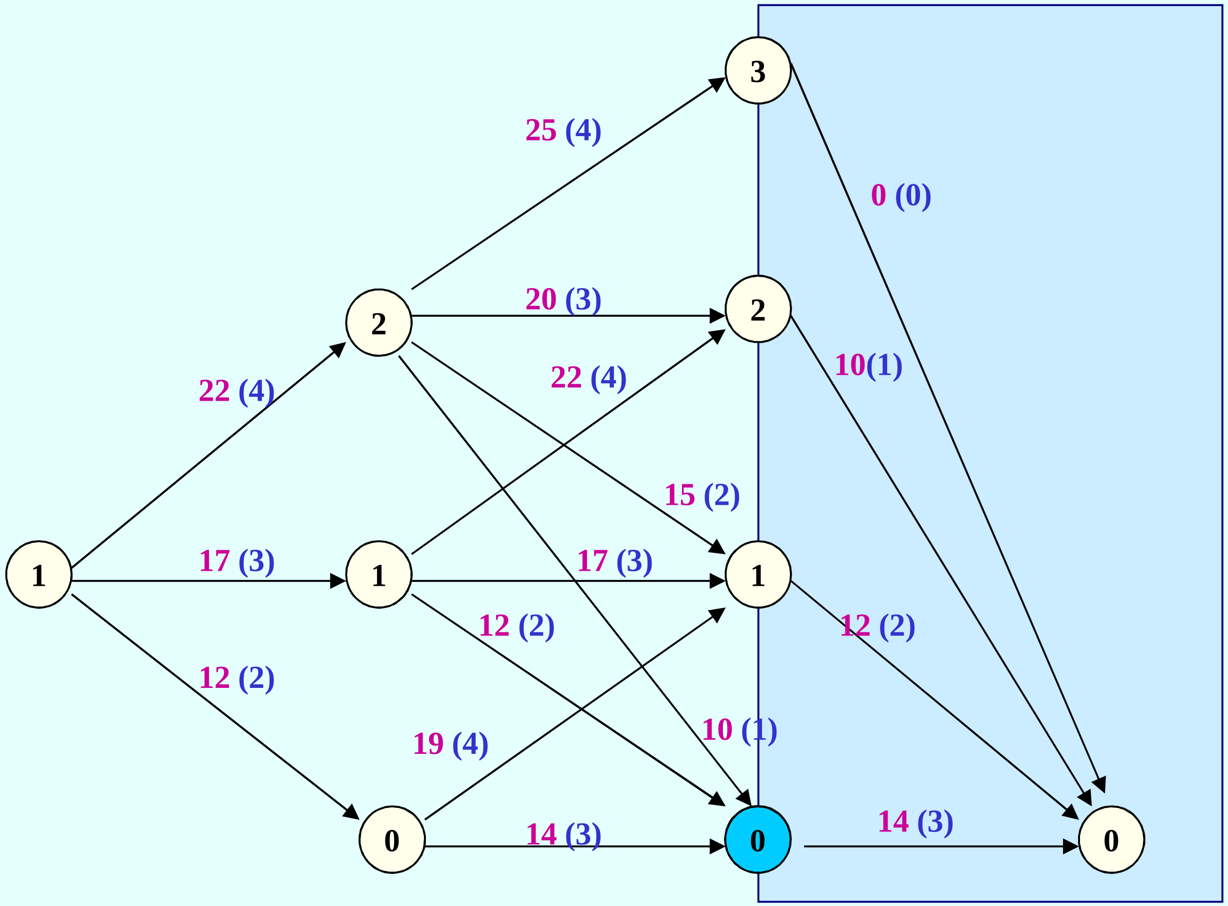
9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (1/11)

Zasada optymalności

Strategia optymalna ma tę własność, że niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji, pozostałe decyzje muszą stanowić ciąg optymalny ze względu na stan wynikający z pierwszej decyzji.

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (2/11)

Etap 3

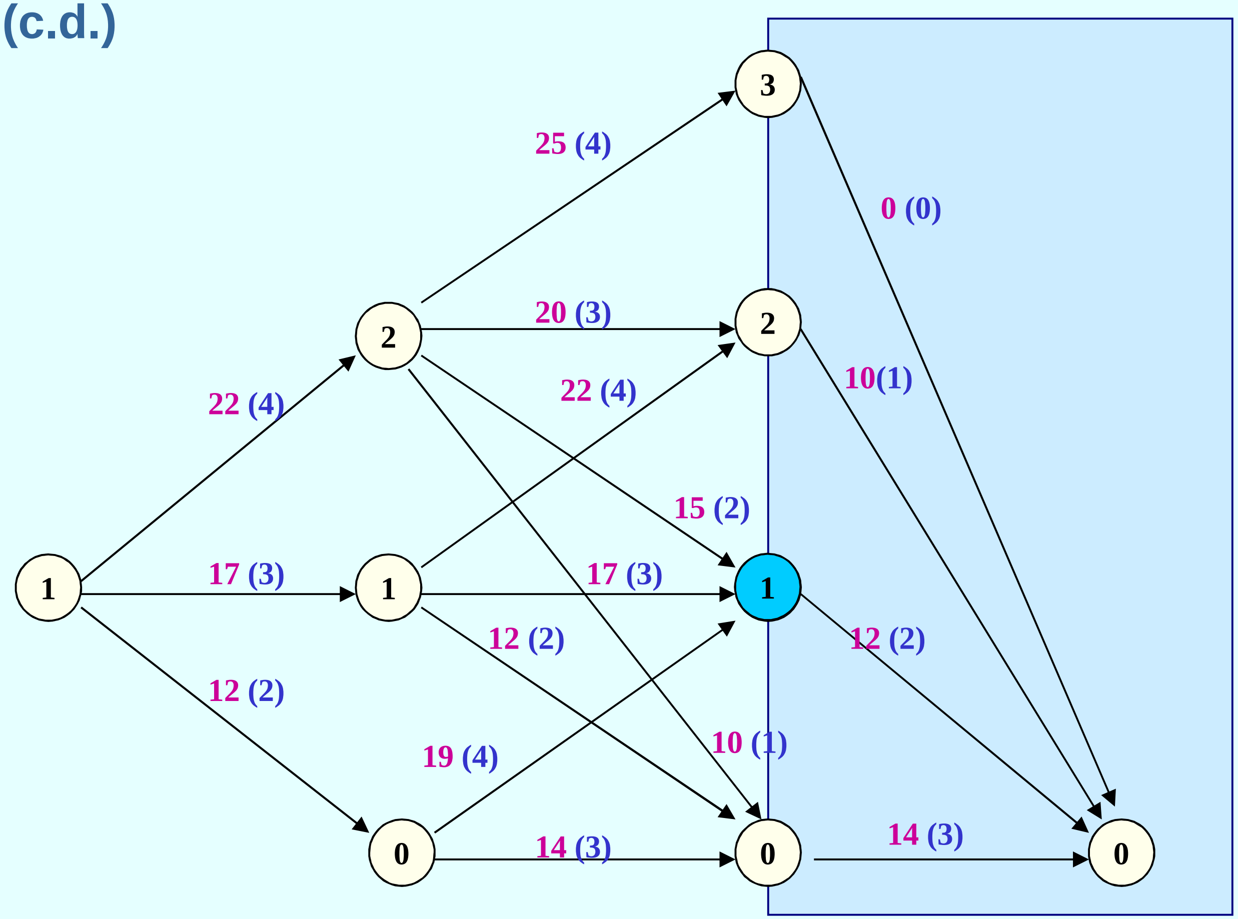


$g^*_3(0) = \min\{ 14 \}$ $\quad x^*_3(0) = 3$

$g^*_3(0) = 14$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (3/11)

Etap 3 (c.d.)

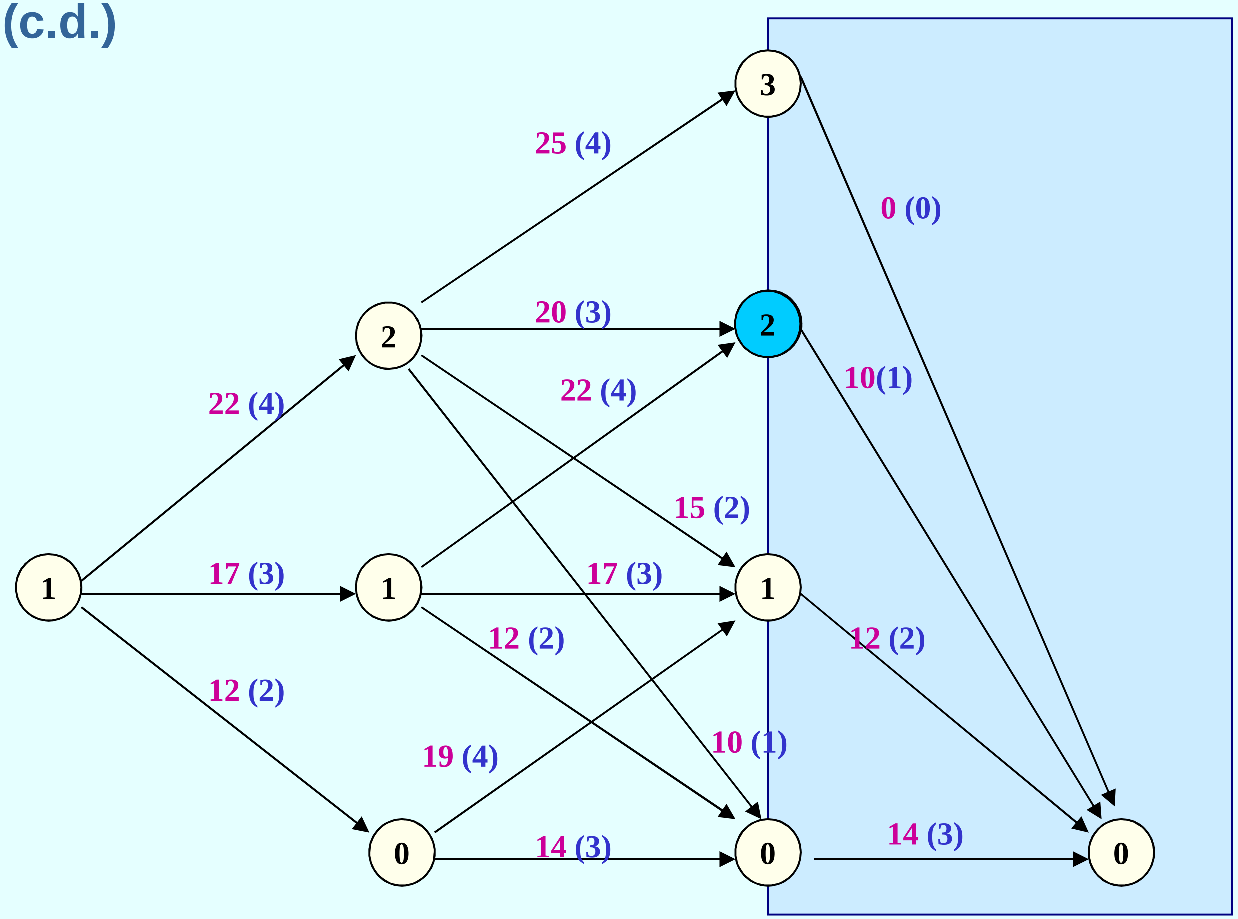


$g^*_3(1) = \min \{ 12 \}$ $\quad x^*_3(1) = 2$

$g^*_3(1) = 12$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (4/11)

Etap 3 (c.d.)

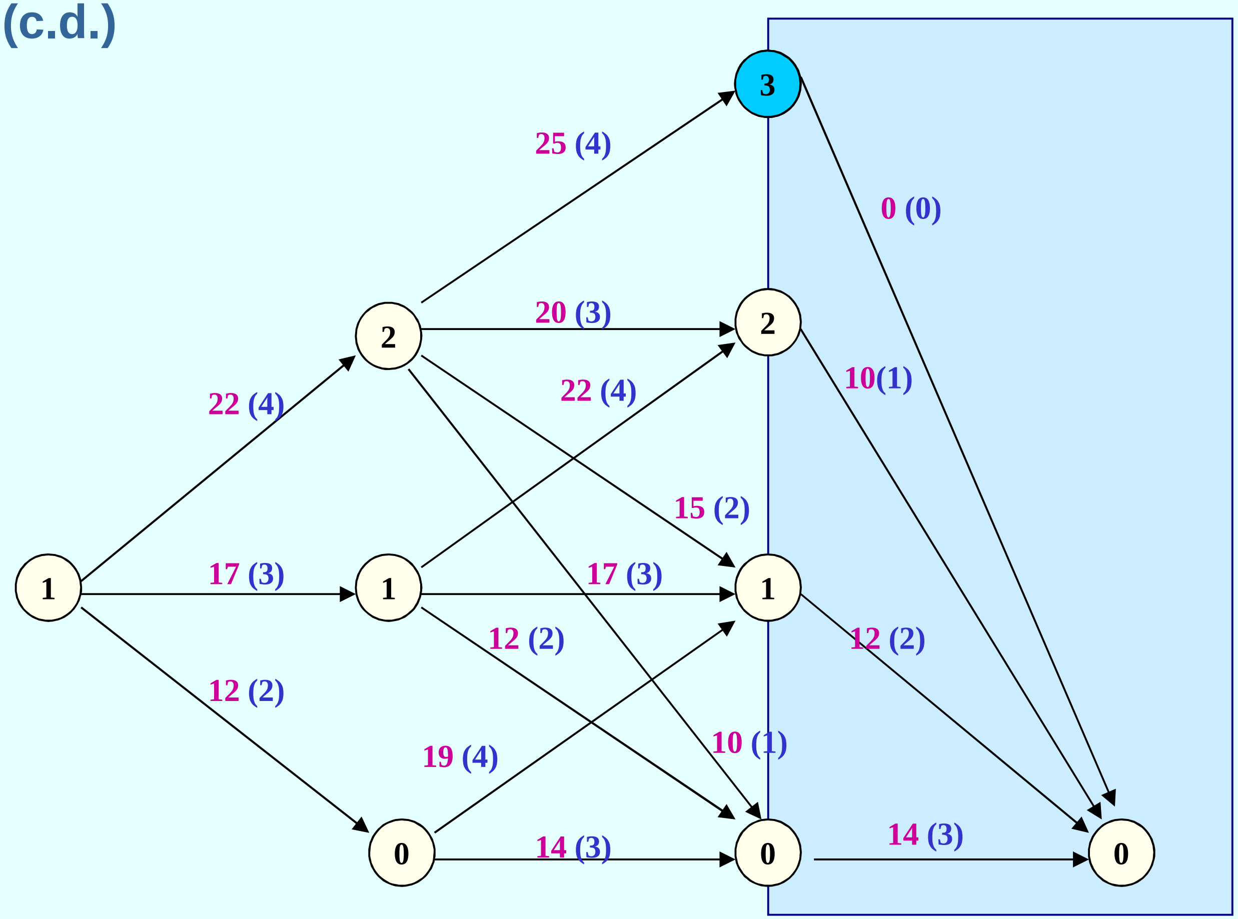


$$g^*_3(2) = \min \{ 10 \} \qquad x^*_3(2) = 1$$

$$g^*_3(2) = 10$$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (5/11)

Etap 3 (c.d.)

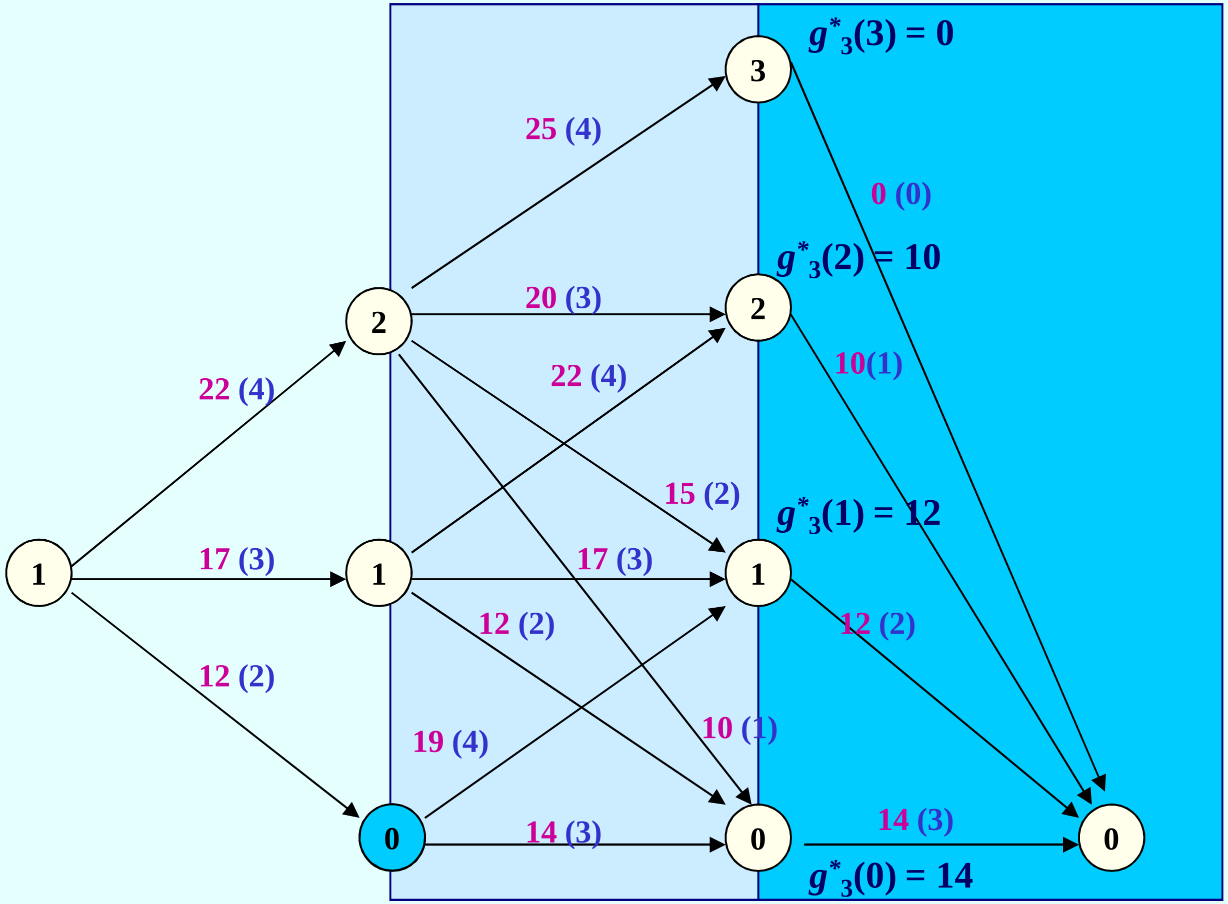


$g^*_3(3) = \min \{ 0 \}$ $\qquad x^*_3(3) = 0$

$g^*_3(3) = 0$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (6/11)

Etap 2

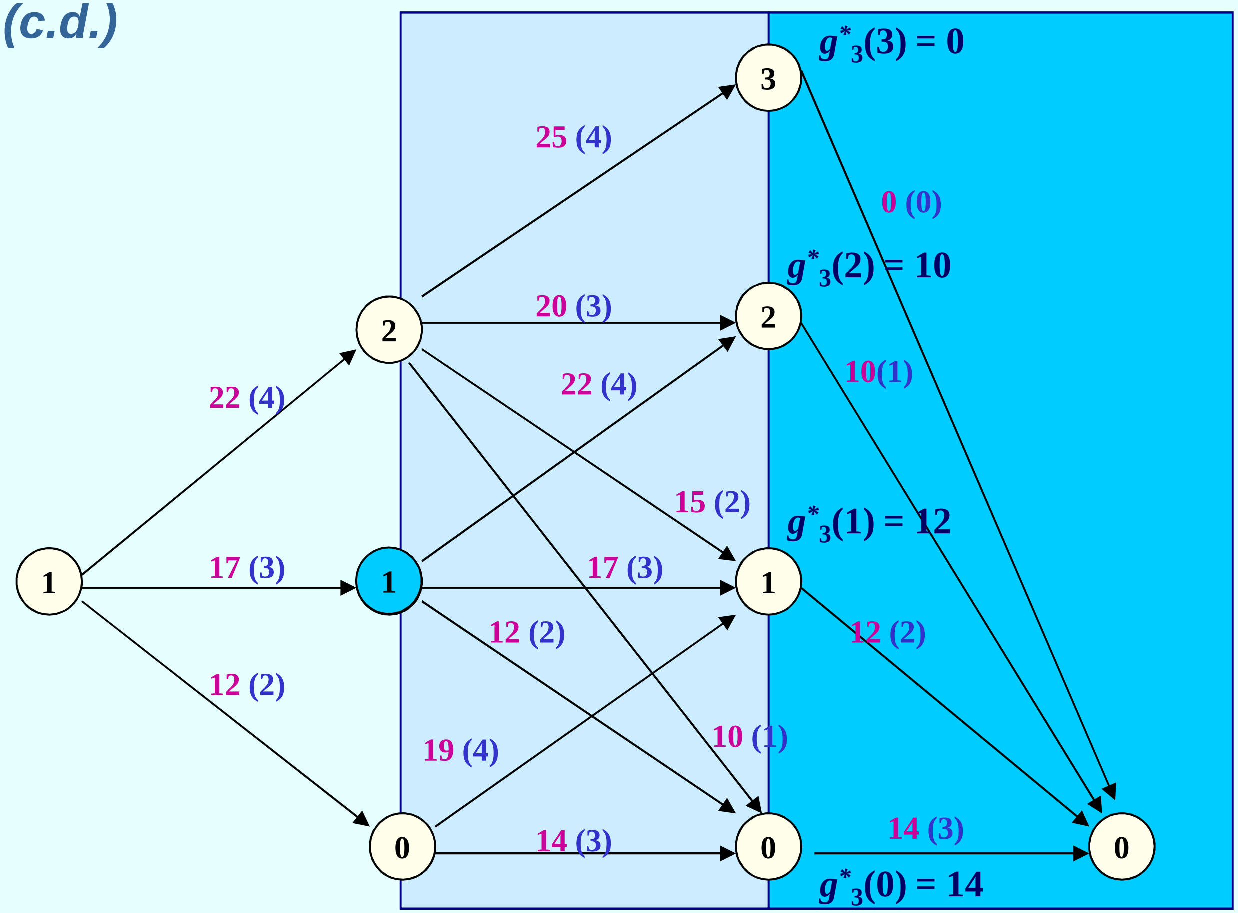


$$g^*_2(0) = \min \{\ 14 + 14,\ 19 + 12\ \} \qquad x^*_2(0) = 3$$

$$g^*_2(0) = 28$$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (7/11)

Etap 2 (c.d.)

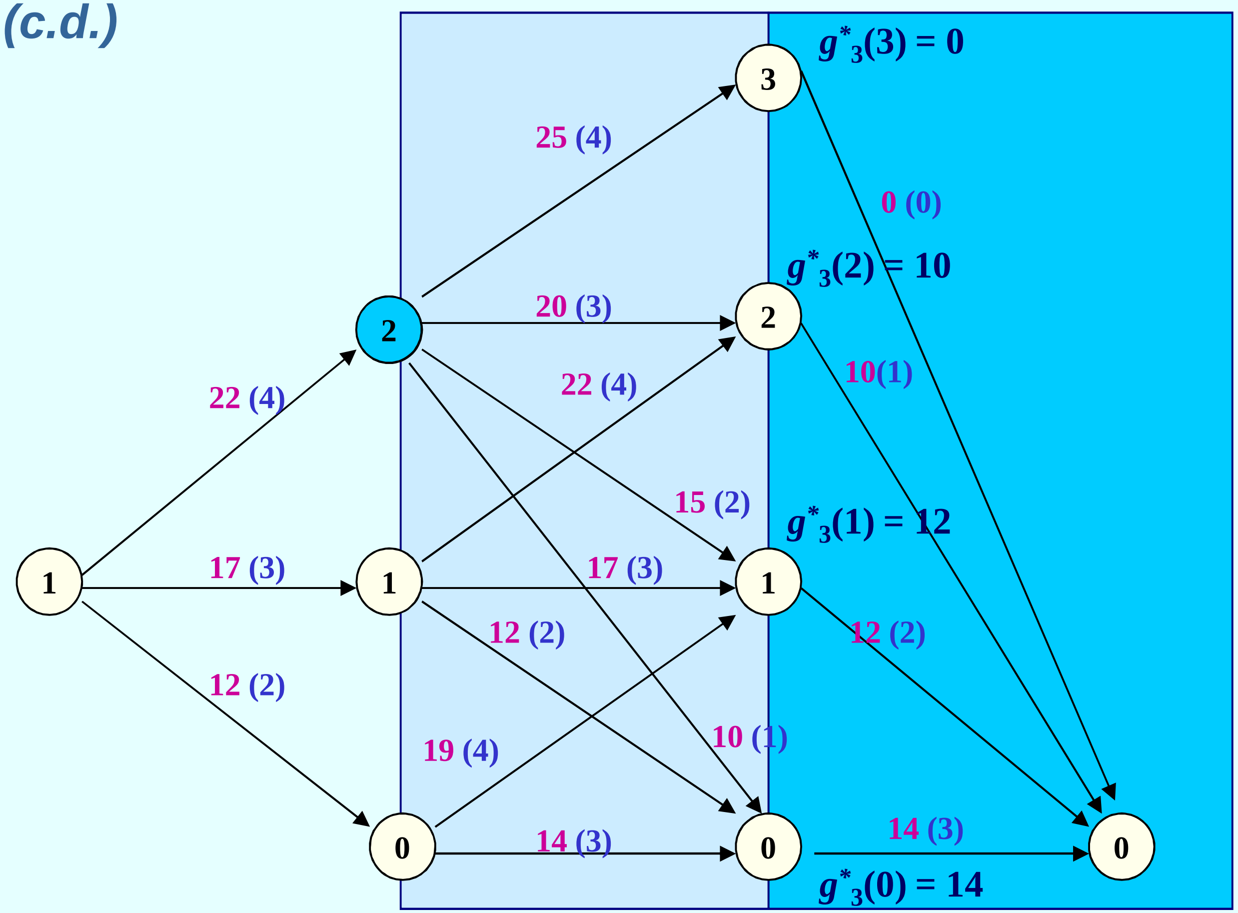


$g^*_2(1)$ = min { 12 +14, 17 +12, 22 + 10 } $x^*_2(1) = 2$

$g^*_2(1) = 26$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (8/11)

Etap 2 (c.d.)

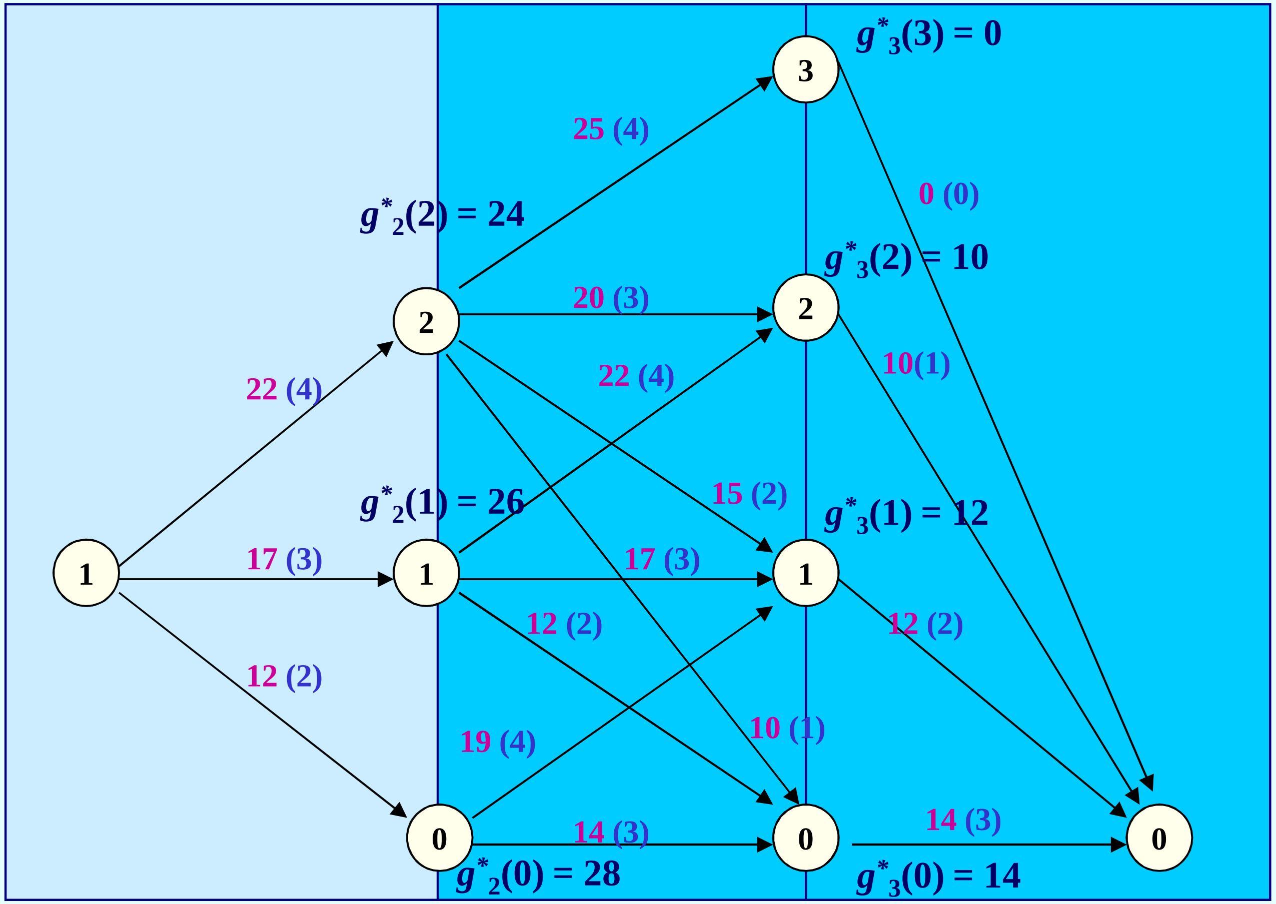


$g^*_2(2)$ = min { 10 + 14,   15 + 12,   20 + 10,   25 + 0 } $x^*_2(2) = 1$

$g^*_2(2) = 24$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (9/11)

Etap 1



$g^*_1(1) = \min \{ 12 + 28, 17 + 26, 22 + 24 \}$ $\qquad x^*_1(1) = 2$

$g^*_1(1) = 40$

9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (10/11)

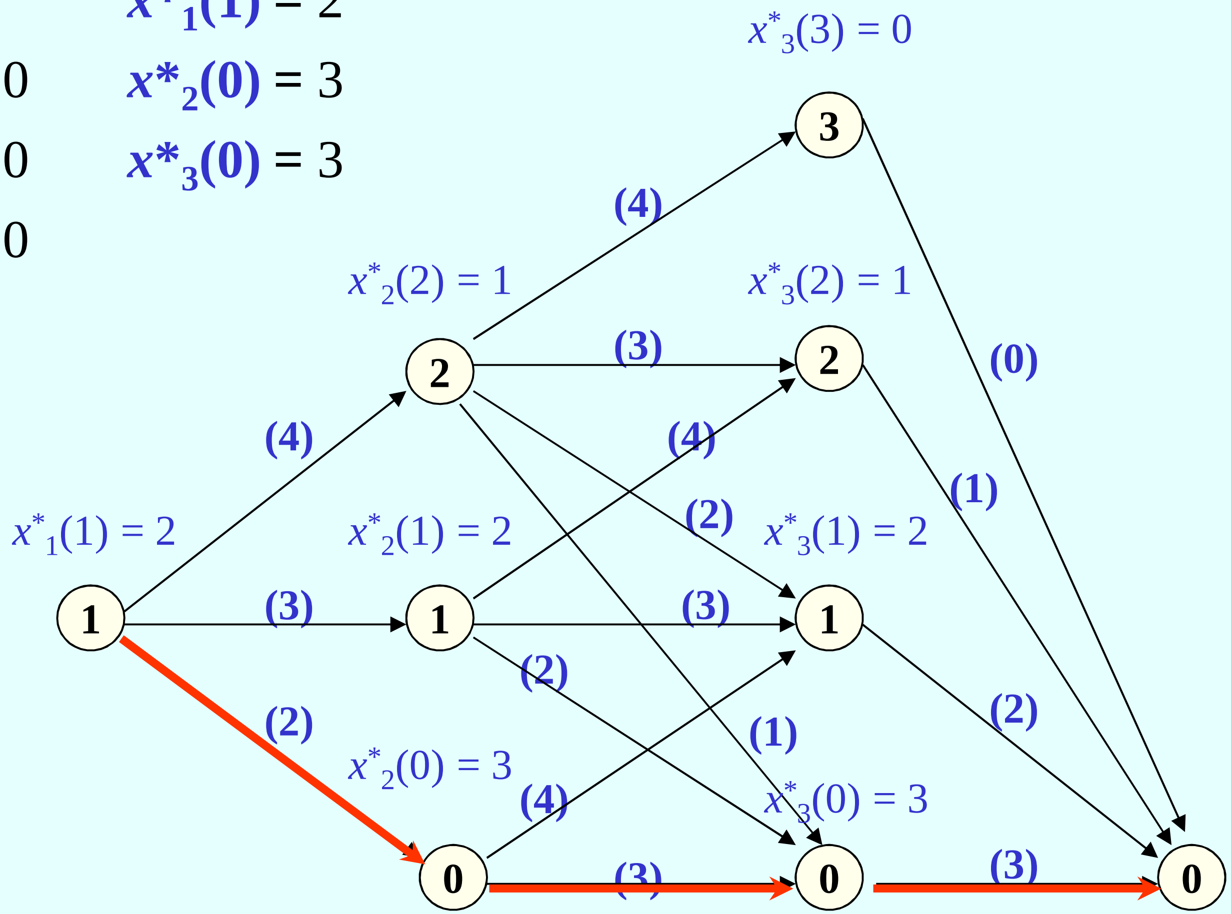
Stan początkowy $y^*_1 = 1$

$y^*_1 = 1$ $\quad x^*_1(1) = 2$

$y^*_2 = 1 + 2 – 3 = 0$ $\quad x^*_2(0) = 3$

$y^*_3 = 0 + 3 – 3 = 0$ $\quad x^*_3(0) = 3$

$y^*_4 = 0 + 3 – 3 = 0$



9.2.4. Zasada optymalności Bellmana i równania optymalności (11/11)

Zestawienie

dla *t* = 3

$$g_3^*(y_3) = \min\left\{f_3(y_3, x_3) : x_3 \in X_3(y_3)\right\}$$

dla *t* = 2

$$g_2^*(y_2) = \min\left\{f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 + x_2 - d_2) : x_2 \in X_2(y_2)\right\}$$

dla *t* = 1

$$g_1^*(y_1) = \min\left\{f_1(y_1, x_1) + g_2^*(y_1 + x_1 - d_1) : x_1 \in X_1(y_1)\right\}$$

Algorytm

1. Ustalamy liczbę etapów T rozpatrywanego procesu.
2. Definiujemy zmienne stanu y_t (dla t = 1, ..., T+1) i zmienne decyzyjne x_t (dla t = 1, ..., T).
3. Określamy postać funkcji przejścia

$$y_{t+1} = \Omega_t(y_t, x_t).$$

4. Identyfikujemy zbiór stanów początkowych Y_1 i zbiór stanów końcowych Y_{T+1}.
5. Dla etapu t (t = 1, ..., T):

   a) określamy zbiór stanów dopuszczalnych Y_t,

   b) dla każdego stanu $y_t \in Y_t$ określamy zbiór decyzji dopuszczalnych $X_t(y_t)$.

Algorytm (c.d.)

6. Korzystając z zasady optymalności Bellmana konstruujemy równania optymalności i rozwiązujemy je.

a) Etap T:

$$g_T^*(y_T) = \min\{f_T(y_T, x_T) : x_T \in X_T(y_T)\} \to x_T^*(y_T)$$

b) Etap t ($t = T–1, ..., 1$):

$$g_t^*(y_t) = \min\{f_t(y_t, x_t) + g_{t+1}^*(y_{t+1}) : x_t \in X_t(y_t)\} \to x_t^*(y_t)$$

przy czym $y_{t+1} = \Omega_t(y_t, x_t)$.

7. Ciąg:

$$\{x_t^*(y_t) : y_t \in Y_t, t = 1,...,T\}$$

decyzji optymalnych, wyznaczonych w kroku 6 stanowi strategię optymalną.

Algorytm (c.d.)

8. Znajdujemy optymalny stan początkowy y_1^* porównując ze sobą wartości $g_1^*(y_1)$ następująco:

$$g_1^*(y_1^*) = \max\{g_1^*(y_1) : y_1 \in Y_1\}.$$

9. Konstruujemy optymalną realizację procesu:

y_1^* optymalny stan początkowy $\qquad x_1^* = x_1^*(y_1^*)$

$y_2^* = \Omega_1(y_2^*, x_2^*) \qquad x_2^* = x_2^*(y_2^*)$

………………………………………………………...

$y_T^* = \Omega_{T-1}(y_{T-1}^*, x_{T-1}^*) \qquad x_T^* = x_T^*(y_T^*)$

$y_{T+1}^* = \Omega_T(y_T^*, x_T^*)$

$\left(y_1^*, x_1^*, y_2^*, x_2^*, ..., y_T^*, x_T^*\right)$ - optymalna realizacja procesu.

9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (1/8)

Przykład 9.2

	Projekt I	Projekt II
Przydzielona ilość środka	a	b
Dochód	$2a^2$	$3b^2$
Do wykorzystania w następnym okresie	$0{,}7a$	$0{,}3b$
Początkowa ilość środka	100 jednostek	
Liczba okresów	3	

Dokonać takiego rozdziału środka, by zmaksymalizować łączny dochód z realizacji projektów I i II

9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (2/8)

Opis wieloetapowego procesu decyzyjnego

Stan procesu y_t - ilość środka, jaka pozostała do dyspozycji na początku tego okresu

Decyzja x_t - ilość środka przydzielona na początku okresu *t* na realizację projektu I

Funkcja przejścia -

$$y_{t+1} = 0{,}7x_t + 0{,}3(y_t - x_t) = 0{,}4x_t + 0{,}3y_t$$

9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (3/8)

Zbiory stanów dopuszczalnych

$Y_1 = \{ 100 \}$

$$y_{t+1} = 0{,}4x_t + 0{,}3y_t$$

$Y_2 = [\ 30;\ 70\ ]$

$Y_3 = [\ 9;\ 49\ ]$

$Y_4 = [\ 2{,}7;\ 34{,}3\ ]$

9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (4/8)

Decyzje dopuszczalne

$$X_t(y_t) = [0; y_t]$$

- przydzielić cały zasób środka na realizację projektu I (czyli $x_t = y_t$),
- przydzielić cały zasób środka na realizację projektu II (czyli $x_t = 0$),
- dokonać takiego rozdziału środka pomiędzy projekty, przy którym ilości środka przydzielone poszczególnym projektom są różne od zera (czyli $x_t \in (0; y_t)$).

Funkcja korzyści

$$f_t(y_t, x_t) = 2x_t^2 + 3(y_t - x_t)^2$$

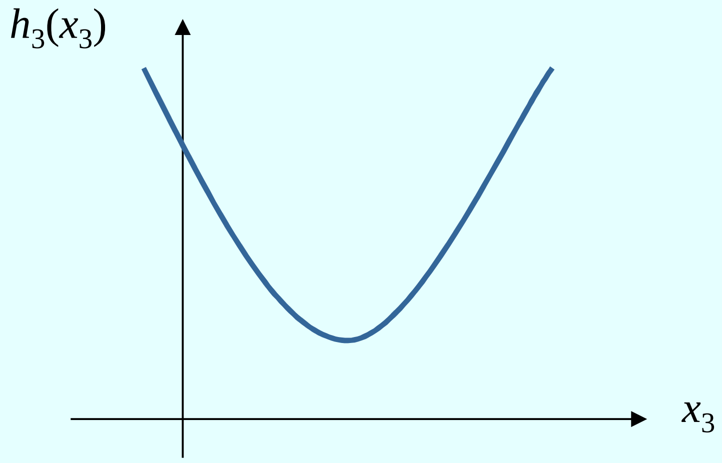
9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (5/8)

Etap 3

$$g_3^*(y_3) = \max\{f_3(y_3, x_3 : x_3 \in X_3(y_3)\} =$$

$$= \max\{\underbrace{2x_3^2 + 3(y_3 - x_3)^2}_{h_3(x_3)} : x_3 \in X_3(y_3)\}$$

$h_3(x_3)$ jest parabolą o ramionach skierowanych do góry



Mamy: $h_3(y_3) = 2y_3^2$ $h_3(0) = 3y_3^2$

czyli: $g_3^*(y_3) = 3y_3^2$ $x_3^*(y_3) = 0$

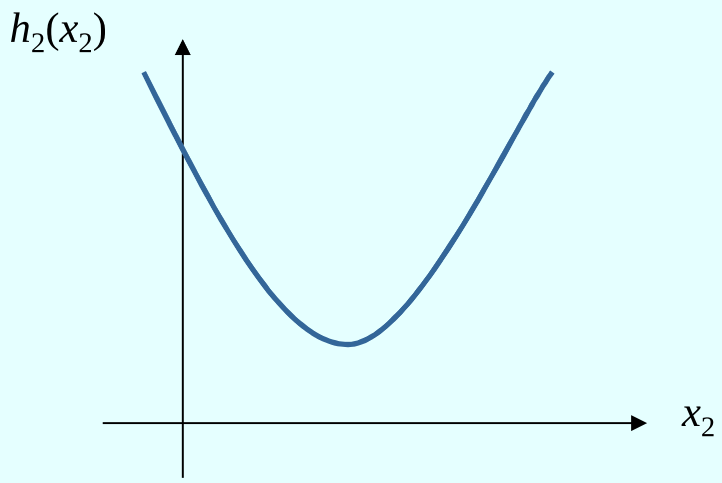
9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (6/8)

Etap 2

$$g_2^*(y_2) = \max\left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(0{,}4x_2 + 0{,}3y_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$= \max\left\{ \underbrace{2x_2^2 + 3(y_2 - x_2)^2 + 3(0{,}4x_2 + 0{,}3y_2)^2}_{h_2(x_2)} : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$h_2(x_2)$ jest parabolą o ramionach skierowanych do góry



Mamy: $h_2(y_2) = 3{,}47y_2^2$ $\quad h_2(0) = 3{,}27y_2^2$

czyli: $g_2^*(y_2) = 3{,}47y_2^2$ $\quad x_2^*(y_2) = y_2$

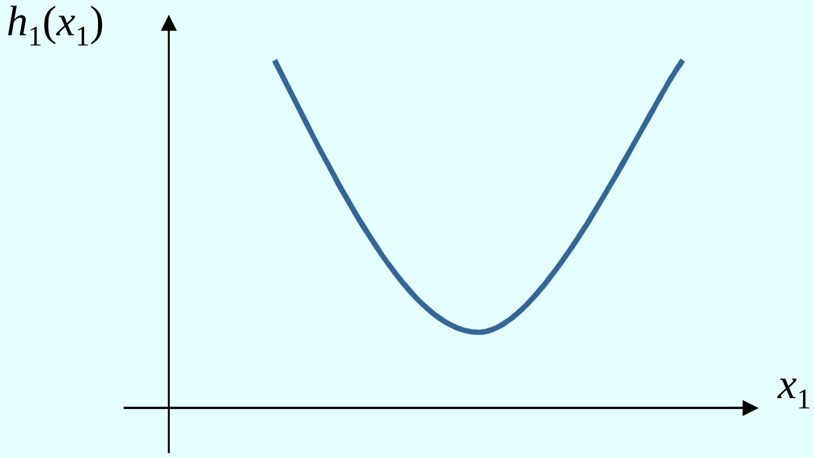
9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (7/8)

Etap 1

$$g_1^*(y_1) = \max\left\{f_1(y_1, x_1) + g_2^*(0{,}4x_1 + 0{,}3y_1) : x_1 \in X_1(y_1)\right\} =$$

$$= \max\left\{\underbrace{2x_1^2 + 3(y_1 - x_1)^2 + 3{,}47(0{,}4x_1 + 0{,}3y_1)^2}_{h_1(x_1)} : x_1 \in X_1(y_1)\right\}$$

$h_1(x_1)$ jest parabolą o ramionach skierowanych do góry



Mamy: $h_1(y_1) = 3{,}70y_1^2$ $h_1(0) = 3{,}31y_1^2$

czyli: $g_1^*(y_1) = 3{,}70y_1^2$ $x_1^*(y_1) = y_1$

9.3.1. Zagadnienie rozdziału środka (8/8)

Optymalne realizacje procesu

dla $y^*_1 = 100$

$y^*_1 = 100$	$x^*_1 = x^*_1(100) = 100$
$y^*_2 = 70$	$x^*_2 = x^*_2(70) = 70$
$y^*_3 = 49$	$x^*_3 = x^*_3(49) = 0$
$y^*_4 = 14{,}7$	**Dochód = 37 003**

dla $y^*_1 = 80$

$y^*_1 = 80$	$x^*_1 = x^*_1(80) = 80$
$y^*_2 = 56$	$x^*_2 = x^*_2(56) = 56$
$y^*_3 = 39{,}2$	$x^*_3 = x^*_3(39{,}2) = 0$
$y^*_4 = 11{,}76$	**Dochód = 23 681,92**

9.3.2. Zagadnienie alokacji (1/13)

Przykład 9.3

Wielkość przydzielonej kwoty	Projekt		
	I	II	III
0	0	0	0
1	1,5	2,5	2,8
2	2,5	4,1	4,5
3	4,0	5,5	6,5
4	5,0	6,5	7,8
5	6,2	7,5	9,0
6	7,3	8	10,2

Rozdzielić fundusz pomiędzy projekty tak, by zmaksymalizować łączną wartość zysku

9.3.2. Zagadnienie alokacji (2/13)

Opis wieloetapowego procesu decyzyjnego

Stan procesu y_t - kwota do dyspozycji na początku etapu t,

Decyzja x_t - wielkość funduszu przekazana na realizację projektu

Funkcja przejścia

$$y_{t+1} = y_t - x_t$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (3/13)

Zbiory stanów i decyzji dopuszczalnych

$\boldsymbol{Y_1}$ = { 6 }

$\boldsymbol{X_1(6)}$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

$$y_2 = y_1 - x_1$$

$\boldsymbol{Y_2}$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

$\boldsymbol{X_2(0)}$ = { 0 }

$\boldsymbol{X_2(1)}$ = { 0, 1 }

$\boldsymbol{X_2(2)}$ = { 0, 1, 2 }

$\boldsymbol{X_2(3)}$ = { 0, 1, 2, 3 }

$\boldsymbol{X_2(4)}$ = { 0, 1, 2, 3, 4 }

$\boldsymbol{X_2(5)}$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

$\boldsymbol{X_2(6)}$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

$$y_3 = y_2 - x_2$$

$\boldsymbol{Y_3}$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

$\boldsymbol{X_3(0)}$ = { 0 }

$\boldsymbol{X_3(1)}$ = { 1 }

$\boldsymbol{X_3(2)}$ = { 2 }

$\boldsymbol{X_3(3)}$ = { 3 }

$\boldsymbol{X_3(4)}$ = { 4 }

$\boldsymbol{X_3(5)}$ = { 5 }

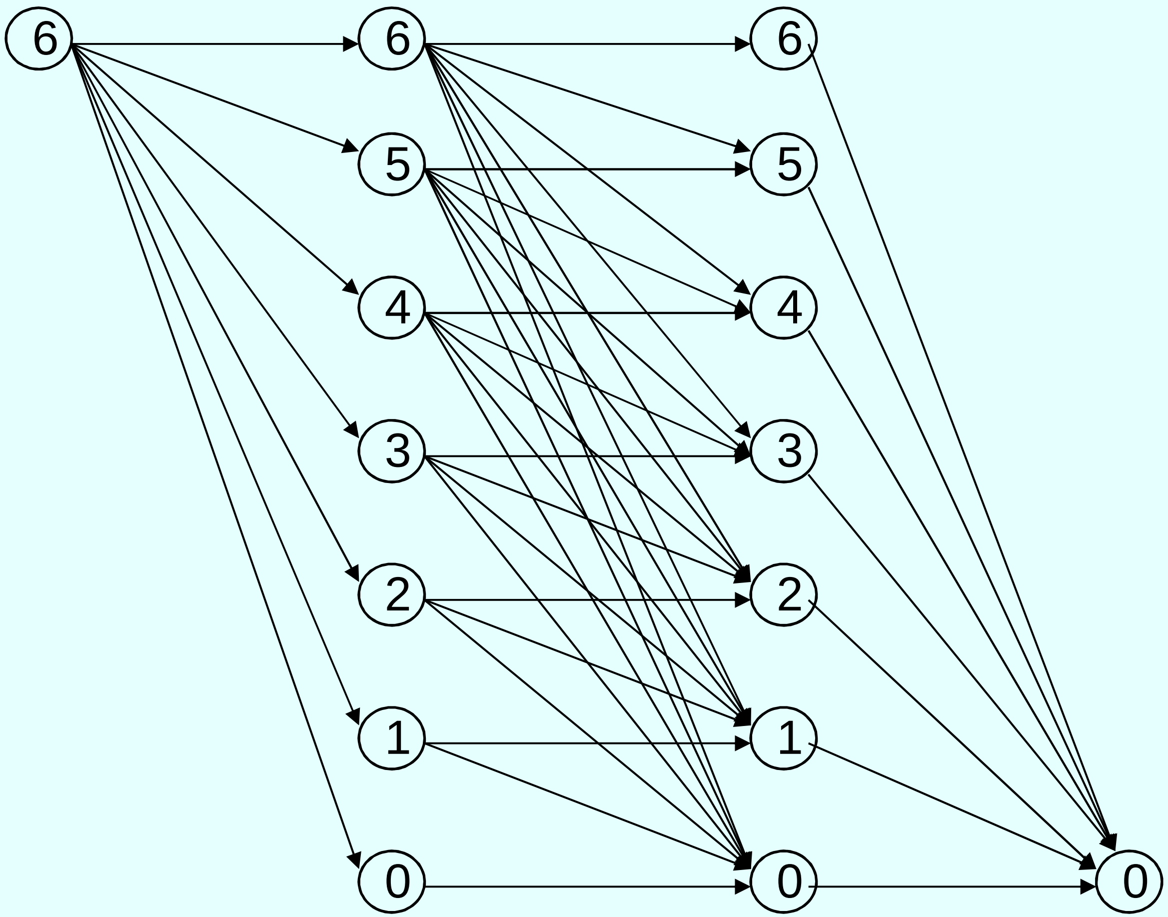
$\boldsymbol{X_3(6)}$ = { 6 }

$$y_4 = y_3 - x_3$$

$\boldsymbol{Y_4}$ = { 0 }

9.3.2. Zagadnienie alokacji (4/13)

Graf procesu



9.3.2. Zagadnienie alokacji (5/13)

Wartość funkcji korzyści etapowych

$f_1(6; 0) = 0$ $f_1(6; 1) = 1{,}5$ $f_1(6; 2) = 2{,}5$ $f_1(6; 3) = 4$

$f_1(6; 4) = 5$ $f_1(6; 5) = 6{,}2$ $f_1(6; 6) = 7{,}3$

$f_2(y_2; 0) = 0$ $f_2(y_2; 1) = 2{,}5$ $f_2(y_2; 2) = 4{,}1$ $f_2(y_2; 3) = 5{,}5$

$f_2(y_2; 4) = 6{,}5$ $f_2(y_2; 5) = 5{,}5$ $f_2(y_2; 6) = 8$

$f_3(0; 0) = 0$ $f_3(1; 1) = 2{,}8$ $f_3(2; 2) = 4{,}5$ $f_3(3; 3) = 6{,}5$

$f_3(4; 4) = 7{,}8$ $f_3(5; 5) = 9$ $f_3(6; 6) = 10{,}2$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (6/13)

Równania optymalności etap 3

$$g_3^*(y_3) = \max\{f_3(y_3, x_3) : x_3 \in X_3(y_3)\}$$

$g_3^*(0) = f_3(0,0) = 0$	$x_3^*(0) = 0$
$g_3^*(1) = f_3(1,1) = 2,8$	$x_3^*(1) = 1$
$g_3^*(2) = f_3(2,2) = 4,5$	$x_3^*(2) = 2$
$g_3^*(3) = f_3(3,3) = 6,5$	$x_3^*(3) = 3$
$g_3^*(4) = f_3(4,4) = 7,8$	$x_3^*(4) = 4$
$g_3^*(5) = f_3(5,5) = 9,0$	$x_3^*(5) = 5$
$g_3^*(6) = f_3(6,6) = 10,2$	$x_3^*(6) = 6$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (7/13)

Równania optymalności etap 2

$$g_2^*(y_2) = \max\left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$g_2^*(0) = 0$ oraz $x_2^*(0) = 0$

$$g_2^*(1) = \max\begin{Bmatrix} f_2(1;0) + g_3^*(1) \\ f_2(1;1) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 2{,}8 \\ 2{,}5 + 0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 2{,}8 \\ 2{,}5 \end{Bmatrix} = 2{,}8 \quad \text{oraz} \quad x_2^*(1) = 0$$

$$g_2^*(2) = \max\begin{Bmatrix} f_2(2;0) + g_3^*(2) \\ f_2(2;1) + g_3^*(1) \\ f_2(2;2) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 4{,}5 \\ 2{,}5 + 2{,}8 \\ 4{,}1 + 0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 4{,}5 \\ 5{,}3 \\ 4{,}4 \end{Bmatrix} = 5{,}3 \quad \text{oraz} \quad x_2^*(2) = 1$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (8/13)

Równania optymalności etap 2 (c.d.)

$$g_2^*(y_2) = \max\left\{f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2)\right\}$$

$$g_2^*(3) = \max\begin{Bmatrix} f_2(3;0) + g_3^*(3) \\ f_2(3;1) + g_3^*(2) \\ f_2(3;2) + g_3^*(1) \\ f_2(3;3) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 6{,}5 \\ 2{,}5 + 4{,}5 \\ 4{,}1 + 2{,}8 \\ 5{,}5 + 0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 6{,}5 \\ 7 \\ 6{,}9 \\ 5{,}5 \end{Bmatrix} = 7 \quad \text{oraz} \quad x_2^*(3) = 1$$

$$g_2^*(4) = \max\begin{Bmatrix} f_2(4;0) + g_3^*(4) \\ f_2(4;1) + g_3^*(3) \\ f_2(4;2) + g_3^*(2) \\ f_2(4;3) + g_3^*(1) \\ f_2(4;4) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 7{,}8 \\ 2{,}5 + 6{,}5 \\ 4{,}1 + 4{,}5 \\ 5{,}5 + 2{,}8 \\ 6{,}5 + 0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 7{,}8 \\ 9 \\ 8{,}6 \\ 8{,}3 \\ 6{,}5 \end{Bmatrix} = 9 \quad \text{oraz} \quad x_2^*(4) = 1$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (9/13)

Równania optymalności etap 2 (c.d.)

$$g_2^*(y_2) = \max\left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$g_2^*(5) = \max\left\{ \begin{matrix} f_2(5;0) + g_3^*(5) \\ f_2(5;1) + g_3^*(4) \\ f_2(5;2) + g_3^*(3) \\ f_2(5;3) + g_3^*(2) \\ f_2(5;4) + g_3^*(1) \\ f_2(5;5) + g_3^*(0) \end{matrix} \right\} = \max\left\{ \begin{matrix} 0+9 \\ 2{,}5+7{,}8 \\ 4{,}1+6{,}5 \\ 5{,}5+4{,}5 \\ 6{,}5+2{,}8 \\ 7{,}5+0 \end{matrix} \right\} = \max\left\{ \begin{matrix} 9 \\ 10{,}3 \\ 10{,}6 \\ 10 \\ 9{,}3 \\ 7{,}5 \end{matrix} \right\} = 10{,}6 \quad \text{oraz} \quad x_2^*(5) = 2$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (10/13)

Równania optymalności etap 2 (c.d.)

$$g_2^*(y_2) = \max\left\{f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2)\right\}$$

$$g_2^*(6) = \max\begin{Bmatrix} f_2(6;0) + g_3^*(6) \\ f_2(6;1) + g_3^*(5) \\ f_2(6;2) + g_3^*(4) \\ f_2(6;3) + g_3^*(3) \\ f_2(6;4) + g_3^*(2) \\ f_2(6;5) + g_3^*(1) \\ f_2(6;6) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 10{,}2 \\ 2{,}5 + 9 \\ 4{,}1 + 7{,}8 \\ 5{,}5 + 6{,}5 \\ 6{,}5 + 4{,}5 \\ 7{,}5 + 2{,}8 \\ 8 + 0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 10{,}2 \\ 11{,}5 \\ 11{,}9 \\ 12 \\ 11 \\ 10{,}3 \\ 8 \end{Bmatrix} = 12 \quad \text{oraz} \quad x_2^*(6) = 3$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (11/13)

Równania optymalności etap 1

$$g_1^*(y_1) = \max\{f_1(y_1, x_1) + g_2^*(y_1 - x_1) : x_1 \in X_1(y_1)\}$$

$$g_1^*(6) = \max\left\{\begin{matrix} f_1(6;0) + g_2^*(6) \\ f_1(6;1) + g_2^*(5) \\ f_1(6;2) + g_2^*(4) \\ f_1(6;3) + g_2^*(3) \\ f_1(6;4) + g_2^*(2) \\ f_1(6;5) + g_2^*(1) \\ f_1(6;6) + g_2^*(0) \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} 0 + 12 \\ 1{,}5 + 10{,}6 \\ 2{,}5 + 9 \\ 4 + 7 \\ 5 + 5{,}3 \\ 6{,}2 + 2{,}8 \\ 7{,}3 + 0 \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} 12 \\ 12{,}1 \\ 11{,}5 \\ 11 \\ 10{,}3 \\ 9 \\ 7{,}3 \end{matrix}\right\} = 12{,}1 \quad \text{oraz} \quad x_1^*(6) = 1$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (12/13)

Optymalna realizacja procesu

$$y_1^* = 6 \qquad x_1^* = x_1^*(6) = 1$$

$$y_2^* = y_1^* - x_1^* = 6 - 1 = 5 \qquad x_2^* = x_2^*(5) = 2$$

$$y_3^* = y_2^* - x_2^* = 5 - 2 = 3 \qquad x_3^* = x_3^*(3) = 3$$

$$y_4^* = y_3^* - x_3^* = 3 - 3 = 0$$

9.3.2. Zagadnienie alokacji (13/13)

Analiza rozwiązania optymalnego w zależności od wielkości funduszu

Wielkość funduszu y^*_1	$g^*_1(y^*_1)$	Optymalny ciąg decyzji		
		x^*_1	x^*_2	x^*_3
1	2,8	0	0	1
2	5,3	0	1	1
3	7,0	0	1	2
4	9,0	0	1	3
5	10,6	0	2	3
6	12,1	1	2	3

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (1/12)

Przykład 9.4

Wielkość przydzielonej kwoty	Moduł 1		Moduł 2		Moduł 3	
	Zysk	Niezawodność	Zysk	Niezawodność	Zysk	Niezawodność
0	0	0,9	0	0,9	0	0,9
1	1,5	0,97	2,5	0,94	2,8	0,96
2	2,5	0,991	4,1	0,964	4,5	0,984
3	4,0	0,9973	5,5	0,9784	6,5	0,9936
4	5,0	0,9992	6,5	0,987	7,8	0,9974
5	6,2	0,9998	7,5	0,9922	9,0	0,999
6	7,3	0,9999	8	0,9953	10,2	0,9994

Rozdzielić posiadany zasób środka w taki sposób, by zmaksymalizować łączną korzyść z działalności systemu i zmaksymalizować jego niezawodność.

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (2/12)

Kryterium zysku

$f_1^1(6; 0) = 0$ $f_1^1(6; 1) = 1{,}5$ $f_1^1(6; 2) = 2{,}5$ $f_1^1(6; 3) = 4$

$f_1^1(6; 4) = 5$ $f_1^1(6; 5) = 6{,}2$ $f_1^1(6; 6) = 7{,}3$

$f_2^1(y_2; 0) = 0$ $f_2^1(y_2; 1) = 2{,}5$ $f_2^1(y_2; 2) = 4{,}1$ $f_2^1(y_2; 3) = 5{,}5$

$f_2^1(y_2; 4) = 6{,}5$ $f_2^1(y_2; 5) = 5{,}5$ $f_2^1(y_2; 6) = 8$

$f_3^1(y_3; 0) = 0$ $f_3^1(y_3; 1) = 2{,}8$ $f_3^1(y_3; 2) = 4{,}5$ $f_3^1(y_3; 3) = 6{,}5$

$f_3^1(y_3; 4) = 7{,}8$ $f_3^1(y_3; 5) = 9$ $f_3^1(y_3; 6) = 10{,}2$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (3/12)

Kryterium niezawodności

$f_1^2(6; 0) = 0,9$ $\quad f_1^2(6; 1) = 0,97$ $\quad f_1^2(6; 2) = 0,991$ $\quad f_1^2(6; 3) = 0,9973$

$f_1^2(6; 4) = 0,9992$ $\quad f_1^2(6; 5) = 0,9998$ $\quad f_1^2(6; 6) = 0,9999$

$f_2^2(y_2; 0) = 0,9$ $\quad f_2^2(y_2; 1) = 0,94$ $\quad f_2^2(y_2; 2) = 0,964$ $\quad f_2^2(y_2; 3) = 0,9784$

$f_2^2(y_2; 4) = 0,9870$ $\quad f_2^2(y_2; 5) = 0,9922$ $\quad f_2^2(y_2; 6) = 0,9953$

$f_3^2(y_3; 0) = 0,9$ $\quad f_3^2(y_3; 1) = 0,96$ $\quad f_3^2(y_3; 2) = 0,984$ $\quad f_3^2(y_3; 3) = 0,9936$

$f_3^2(y_3; 4) = 0,9974$ $\quad f_3^2(y_3; 5) = 0,999$ $\quad f_3^2(y_3; 6) = 0,9994$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (4/12)

Wektorowa funkcja kryterium

Składowa 1 - zysk

$$f^1(y_1,x_1,y_2,x_2,y_3,x_3) = f_1^1(y_1,x_1) + f_2^1(y_2,x_2) + f_3^1(y_3,x_3)$$

Składowa 2 - niezawodność

$$f^2(y_1,x_1,y_2,x_2,y_3,x_3) = f_1^2(y_1,x_1)\cdot f_2^2(y_2,x_2)\cdot f_3^2(y_3,x_3)$$

$$F = \left[f^1, f^2\right]$$

Dekompozycja etapowa

$$F_t(y_t,x_t) = \left[f_t^1(y_t,x_t),\, f_t^2(y_t,x_t)\right]$$

Ocena modułu drugiego i trzeciego

$$F_2 \circ F_3 = \left[f_2^1 + f_3^1,\, f_2^2 \cdot f_3^2\right]$$

Ocena modułu pierwszego łącznie z pozostałymi

$$F_1 \circ (F_2 \circ F_3) = \left[f_1^1 + \left(f_2^1 + f_3^1\right),\, f_1^2 \cdot \left(f_2^2 \cdot f_3^2\right)\right]$$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (5/12)

Wektorowa wersja zasady optymalności Bellmana

Strategia sprawna ma tę własność, że niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji, pozostałe decyzje muszą stanowić ciąg decyzji sprawnych ze względu na stan wynikający z pierwszej decyzji.

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (6/12)

Wektorowe równania optymalności etap 3

$$G_3^*(y_3) = \text{'max'}\{F_3(y_3, x_3) : x_3 \in X_3(y_3)\}$$

$$G_3^*(0) = F_3(0,0) = \{[0;0,9]\} \qquad x_3^*(0) = \{0\}$$

$$G_3^*(1) = F_3(1,1) = \{[2,8;0,96]\} \qquad x_3^*(1) = \{1\}$$

$$G_3^*(2) = F_3(2,2) = \{[4,5;0,984]\} \qquad x_3^*(2) = \{2\}$$

$$G_3^*(3) = F_3(3,3) = \{[6,5;0,9936]\} \qquad x_3^*(3) = \{3\}$$

$$G_3^*(4) = F_3(4,4) = \{[7,8;0,9974]\} \qquad x_3^*(4) = \{4\}$$

$$G_3^*(5) = F_3(5,5) = \{[9,0;0,999]\} \qquad x_3^*(5) = \{5\}$$

$$G_3^*(6) = F_3(6,6) = \{[10,2;0,9994]\} \qquad x_3^*(6) = \{6\}$$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (7/12)

Wektorowe równania optymalności etap 2

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'}\left\{F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2)\right\}$$

$$G_2^*(0) = \text{'max'}\{[0; 0{,}9] \circ [0; 0{,}9]\} = \{[0; 0{,}81]\}$$

oraz $x_2^*(0) = \{0\}$

$$G_2^*(1) = \text{'max'}\left\{\begin{matrix}[0; 0{,}9] \circ [2{,}8; 0{,}96] \\ [2{,}5; 0{,}94] \circ [0; 0{,}9]\end{matrix}\right\} = \text{'max'}\left\{\begin{matrix}[2{,}8; 0{,}864] \\ [2{,}5; 0{,}846]\end{matrix}\right\} = [2{,}8; 0{,}864]$$

oraz $x_2^*(1) = \{1\}$

$$G_2^*(2) = \text{'max'}\left\{\begin{matrix}[0; 0{,}9] \circ [4{,}5; 0{,}984] \\ [2{,}5; 0{,}94] \circ [2{,}8; 0{,}96] \\ [4{,}1; 0{,}964] \circ [0; 0{,}9]\end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix}[4{,}5; 0{,}8856] \\ [5{,}3; 0{,}9024] \\ [4{,}1; 0{,}8676]\end{matrix}\right\} = [5{,}3; 0{,}9024]$$

oraz $x_2^*(2) = \{1\}$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (8/12)

Wektorowe równania optymalności etap 2 (c.d.)

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'}\{F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2)\}$$

$$G_2^*(3) = \text{'max'}\begin{Bmatrix} [0;\,0{,}9] \circ [6{,}5;\,0{,}9936] \\ [2{,}5;\,0{,}94] \circ [4{,}5;\,0{,}984] \\ [4{,}1;\,0{,}964] \circ [2{,}8;\,0{,}9] \\ [5{,}5;\,0{,}9784] \circ [0;\,0{,}9] \end{Bmatrix} = \text{'max'}\begin{Bmatrix} [6{,}5;\,0{,}8942] \\ [7;\,0{,}925] \\ [6{,}9;\,0{,}9254] \\ [5{,}5;\,0{,}8805] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [7;\,0{,}925] \\ [6{,}9;\,0{,}9254] \end{Bmatrix}$$

oraz $x_2^*(3) = \{1{,}2\}$

$$G_2^*(4) = \text{'max'}\begin{Bmatrix} [0;\,0{,}9] \circ [7{,}8;\,0{,}9974] \\ [2{,}5;\,0{,}94] \circ [6{,}5;\,09936] \\ [4{,}1;\,0{,}964] \circ [4{,}5;\,0{,}984] \\ [5{,}5;\,0{,}9784] \circ [2{,}8;\,0{,}96] \\ [6{,}5;\,0{,}987] \circ [0;\,0{,}9] \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} [7{,}8;\,0{,}8977] \\ [9;\,0{,}934] \\ [8{,}6;\,0{,}9486] \\ [8{,}3;\,0{,}9393] \\ [6{,}5;\,0{,}8883] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [9;\,0{,}934] \\ [8{,}6;\,0{,}9486] \end{Bmatrix}$$

oraz $x_2^*(4) = \{1{,}2\}$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (9/12)

Wektorowe równania optymalności etap 2 (c.d.)

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'}\left\{F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2)\right\}$$

$$G_2^*(5) = \text{'max'}\left\{\begin{matrix} [0;\,0{,}9] \circ [9;\,0{,}999] \\ [2{,}5;\,0{,}94] \circ [7{,}8;\,0{,}9974] \\ [4{,}1;\,0{,}964] \circ [6{,}5;\,0{,}9936] \\ [5{,}5;\,0{,}9784] \circ [4{,}5;\,0{,}984] \\ [6{,}5;\,0{,}987] \circ [2{,}8;\,0{,}96] \\ [7{,}5;\,0{,}9922] \circ [0;\,0{,}9] \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} [9;\,0{,}899] \\ [10{,}3;\,0{,}9376] \\ [10{,}6;\,0{,}9578] \\ [10;\,0{,}9627] \\ [9{,}3;\,0{,}9475] \\ [7{,}5;\,0{,}893] \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} [10{,}6;\,0{,}9578] \\ [10;\,0{,}9627] \end{matrix}\right\}$$

oraz $x_2^*(5) = \{2{,}3\}$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (10/12)

Wektorowe równania optymalności etap 2 (c.d.)

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'}\left\{F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2)\right\}$$

$$G_2^*(6) = \text{'max'}\begin{Bmatrix} [0;\,0{,}9] \circ [10{,}2;\,0{,}9994] \\ [2{,}5;\,0{,}94] \circ [9;\,0{,}999] \\ [4{,}1;\,0{,}964] \circ [7{,}8;\,0{,}9974] \\ [5{,}5;\,0{,}9784] \circ [6{,}5;\,0{,}9936] \\ [6{,}5;\,0{,}987] \circ [4{,}5;\,0{,}984] \\ [7{,}5;\,0{,}9922] \circ [2{,}8;\,0{,}96] \\ [8;\,0{,}9953] \circ [0;\,0{,}9] \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} [10{,}2;\,0{,}8995] \\ [11{,}5;\,0{,}9391] \\ [11{,}9;\,0{,}9615] \\ [12;\,0{,}9721] \\ [11;\,0{,}9712] \\ [10{,}3;\,0{,}9525] \\ [8;\,0{,}8958] \end{Bmatrix} = [12;\,09721]$$

oraz $x_2^*(6) = \{3\}$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (11/12)

Wektorowe równania optymalności etap 1

$$G_1^*(y_1) = \text{'max'}\{F_1(y_1, x_1) \circ G_2^*(y_1 - x_1) : x_1 \in X_1(y_1)\}$$

$$G_1^*(6) = \text{'max'}\left\{\begin{matrix} [0;\,0{,}9] \circ [12;\,0{,}9721] \\ [1{,}5;\,0{,}97] \circ [10{,}6;\,0{,}9578] \\ [1{,}5;\,0{,}97] \circ [10;\,0{,}9627] \\ [2{,}5;\,0{,}991] \circ [9;\,0{,}934] \\ [2{,}5;\,0{,}991] \circ [8{,}6;\,0{,}9486] \\ [4;\,0{,}9973] \circ [7;\,0{,}925] \\ [4;\,0{,}9973] \circ [6{,}9;\,0{,}9254] \\ [5;\,0{,}9992] \circ [5{,}3;\,0{,}9024] \\ [6{,}2;\,0{,}9998] \circ [2{,}8;\,0{,}864] \\ [7{,}3;\,0{,}9999] \circ [0;\,0{,}81] \end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix} [12;\,0{,}8749] \\ [12{,}1;\,0{,}9291] \\ [11{,}5;\,0{,}9338] \\ [11{,}5;\,0{,}9256] \\ [11{,}1;\,0{,}9401] \\ [11;\,0{,}9225] \\ [10{,}9;\,0{,}9229] \\ [10{,}3;\,0{,}9017] \\ [9{,}0;\,0{,}8638]] \\ [7{,}3;\,0{,}8099] \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} [12{,}1;\,0{,}9291] \\ [11{,}5;\,0{,}9338] \\ [11{,}1;\,0{,}9401] \end{matrix}\right\}$$

oraz $x_1^*(6) = \{1{,}2\}$

9.3.3. Dwukryterialne zagadnienie alokacji (12/12)

Rozwiązanie optymalne wektorowo

Niezdominowany wektor ocen	Rozwiązanie sprawne
[12,1; 0,9291]	$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 3$
[11,5; 0,9338]	$x_1 = 1,\ x_2 = 3, x_3 = 2$
[11,1; 0,9401]	$x_1 = 2,\ x_2 = 2, x_3 = 2$

Pora na relaks