

Динамическое программирование



Т. Тжаскалик

*Введение в исследование операций
с применением компьютера*

Задача управления запасами (1)

Пример 9.1

Количество этапов	$T = 3$
Состояние склада на начало первого этапа	$y_1 = 1$
Максимально возможное пополнение запаса на одном этапе	$p_t = 4$
Максимальная емкость склада	$h_t = 4$
Спрос (одинаковый на каждом этапе)	$d_t = 3$
Постоянные издержки пополнения запасов	$k_t = 8$
Приведенные переменные издержки пополнения запасов	$c_t = 2$
Приведенные издержки складирования	$m_t = 3$
Требуемое состояние склада на конец последнего этапа	$y_{T+1} = 0$

Минимизировать издержки закупа и складирования.

Задача управления запасами (2)

Описание многошагового процесса принятия решений

y_t - **состояние процесса** на начало этапа t ,
(состояние склада на начало шага t)

x_t - **решение для этапа t** ,
(объем заказа, необходимого для пополнения
запаса)

$y_{t+1} = y_t + x_t - d_t$ - **функция перехода,**

$Y_t = \{y_t : 0 \leq y_t \leq h_t\}$ - **множества допустимых
состояний для этапа t .**

Задача управления запасами (3)

Множества допустимых решений

1. Спрос на каждом этапе должен быть удовлетворен

$$y_t + x_t \geq d_t$$

2. Запасы на конец этапа не могут превысить емкость склада

$$y_t + x_t - d_t \leq h_t$$

3. Возможности пополнения запаса не могут превысить заданный предел

$$x_t \leq p_t$$

4. Величина пополнения запаса не может быть отрицательной

$$x_t \geq 0$$

$$X_t(y_t) = \{ x_t : 0 \leq y_t + x_t - d_t \leq h_t, 0 \leq x_t \leq p_t \}$$

Задача управления запасами (4)

Функции издержек на каждом этапе

$\xi_t(x_t)$ - издержки пополнения запаса на этапе t ,

$\mu_t(y_{t+1})$ - издержки складирования на этапе t ,

$$\lambda(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r > 0 \\ 0 & \text{при } r \leq 0 \end{cases}$$

$$\xi_t(x_t) = k_t \cdot \lambda(x_t) + c_t \cdot x_t$$

$$\mu_t(y_{t+1}) = m_t \cdot y_{t+1} = m_t \cdot (y_t + x_t - d_t)$$

$$f_t(y_t, x_t) = k_t \cdot \lambda(x_t) + c_t \cdot x_t + m_t \cdot (y_t + x_t - d_t)$$

Множества состояний и допустимых решений (1)

Этап 1

$$Y_1 = \{ 1 \}$$

$$X_1(1) = \{ x_1: 0 \leq 1 + x_1 - 3 \leq 4, 0 \leq x_1 \leq 4 \}$$

ДЛЯ

$x_1 = 0$	$0 \not\leq 1 + 0 - 3 \leq 4$	т.е.	$0 \notin X_1(1)$
$x_1 = 1$	$0 \not\leq 1 + 1 - 3 \leq 4$	т.е.	$1 \notin X_1(1)$
$x_1 = 2$	$0 \leq 1 + 2 - 3 \leq 4$	т.е.	$2 \in X_1(1)$
$x_1 = 3$	$0 \leq 1 + 3 - 3 \leq 4$	т.е.	$3 \in X_1(1)$
$x_1 = 4$	$0 \leq 1 + 4 - 3 \leq 4$	т.е.	$4 \in X_1(1)$

т.е.

$$X_1(1) = \{ 2, 3, 4 \}$$

Множества состояний и допустимых решений (2)

Этап 1 (продолжение)

$$y_2 = y_1 + x_1 - 3$$

ДЛЯ

$$x_1 = 2 \qquad y_2 = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \qquad y_2 = 1 + 3 - 3 = 1$$

$$x_1 = 4 \qquad y_2 = 1 + 4 - 3 = 2$$

т.е.

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

Множества состояний и допустимых решений (3)

Этап 2

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(0) = \{ x_2: 0 \leq 0 + x_2 - 3 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4 \}$$

ДЛЯ

$x_2 = 0$	$0 \not\leq 0 + 0 - 3 \leq 4$	т.е.	$0 \notin X_2(0)$
$x_2 = 1$	$0 \not\leq 0 + 1 - 3 \leq 4$	т.е.	$1 \notin X_2(0)$
$x_2 = 2$	$0 \not\leq 0 + 2 - 3 \leq 4$	т.е.	$2 \notin X_2(0)$
$x_2 = 3$	$0 \leq 0 + 3 - 3 \leq 4$	т.е.	$3 \in X_2(0)$
$x_2 = 4$	$0 \leq 0 + 4 - 3 \leq 4$	т.е.	$4 \in X_2(0)$

т.е.

$$X_2(0) = \{ 3, 4 \}$$

Множества состояний и допустимых решений (4)

Этап 2 (продолжение)

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(1) = \{ x_2: 0 \leq 1 + x_2 - 3 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4 \}$$

ДЛЯ

$x_2 = 0$	$0 \not\leq 1 + 0 - 3 \leq 4$	т.е.	$0 \notin X_2(1)$
$x_2 = 1$	$0 \not\leq 1 + 1 - 3 \leq 4$	т.е.	$1 \notin X_2(1)$
$x_2 = 2$	$0 \leq 1 + 2 - 3 \leq 4$	т.е.	$2 \in X_2(1)$
$x_2 = 3$	$0 \leq 1 + 3 - 3 \leq 4$	т.е.	$3 \in X_2(1)$
$x_2 = 4$	$0 \leq 1 + 4 - 3 \leq 4$	т.е.	$4 \in X_2(1)$

т.е.

$$X_2(1) = \{ 2, 3, 4 \}$$

Множества состояний и допустимых решений (5)

Этап 2 (продолжение)

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(2) = \{ x_2: 0 \leq 2 + x_2 - 3 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4 \}$$

ДЛЯ

$x_2 = 0$	$0 \not\leq 2 + 0 - 3 \leq 4$	т.е.	$0 \notin X_2(2)$
$x_2 = 1$	$0 \leq 2 + 1 - 3 \leq 4$	т.е.	$1 \in X_2(2)$
$x_2 = 2$	$0 \leq 2 + 2 - 3 \leq 4$	т.е.	$2 \in X_2(2)$
$x_2 = 3$	$0 \leq 2 + 3 - 3 \leq 4$	т.е.	$3 \in X_2(2)$
$x_2 = 4$	$0 \leq 2 + 4 - 3 \leq 4$	т.е.	$4 \in X_2(2)$

т.е.

$$X_2(2) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

Множества состояний и допустимых решений (6)

Этап 3

$$y_3 = y_2 + x_2 - 3$$

$y_2 = 0$	$x_2 = 3$	$y_3 = 0 + 3 - 3 = 0$
	$x_2 = 4$	$y_3 = 0 + 4 - 3 = 1$
$y_2 = 1$	$x_2 = 2$	$y_3 = 1 + 2 - 3 = 0$
	$x_2 = 3$	$y_3 = 1 + 3 - 3 = 1$
	$x_2 = 4$	$y_3 = 1 + 4 - 3 = 2$
$y_2 = 2$	$x_2 = 1$	$y_3 = 2 + 1 - 3 = 0$
	$x_2 = 2$	$y_3 = 2 + 2 - 3 = 1$
	$x_2 = 3$	$y_3 = 2 + 3 - 3 = 2$
	$x_2 = 4$	$y_3 = 2 + 4 - 3 = 3$

т.е.

$$Y_3 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

Множества состояний и допустимых решений (7)

Этап 3 (продолжение)

Конечное состояние процесса задано и равно 0, поэтому:

$$X_3(0) = \begin{cases} \{ x_3 : 0 \leq 0 + x_3 - 3 = 0 \} \\ x_3 - 3 = 0 ; x_3 = 3 \end{cases}$$

$$X_3(1) = \begin{cases} \{ x_3 : 0 \leq 1 + x_3 - 3 = 0 \} \\ x_3 - 2 = 0 ; x_3 = 2 \end{cases}$$

$$X_3(2) = \begin{cases} \{ x_3 : 0 \leq 2 + x_3 - 3 = 0 \} \\ x_3 - 1 = 0 ; x_3 = 1 \end{cases}$$

$$X_3(3) = \begin{cases} \{ x_3 : 0 \leq 3 + x_3 - 3 = 0 \} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Множества состояний и допустимых решений (8)

Сводное описание

$$Y_1 = \{ 1 \}$$

$$X_1(1) = \{ 2, 3, 4 \}$$

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(0) = \{ 3, 4 \}$$

$$X_2(1) = \{ 2, 3, 4 \}$$

$$X_2(2) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$Y_3 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

$$X_3(0) = \{ 3 \}$$

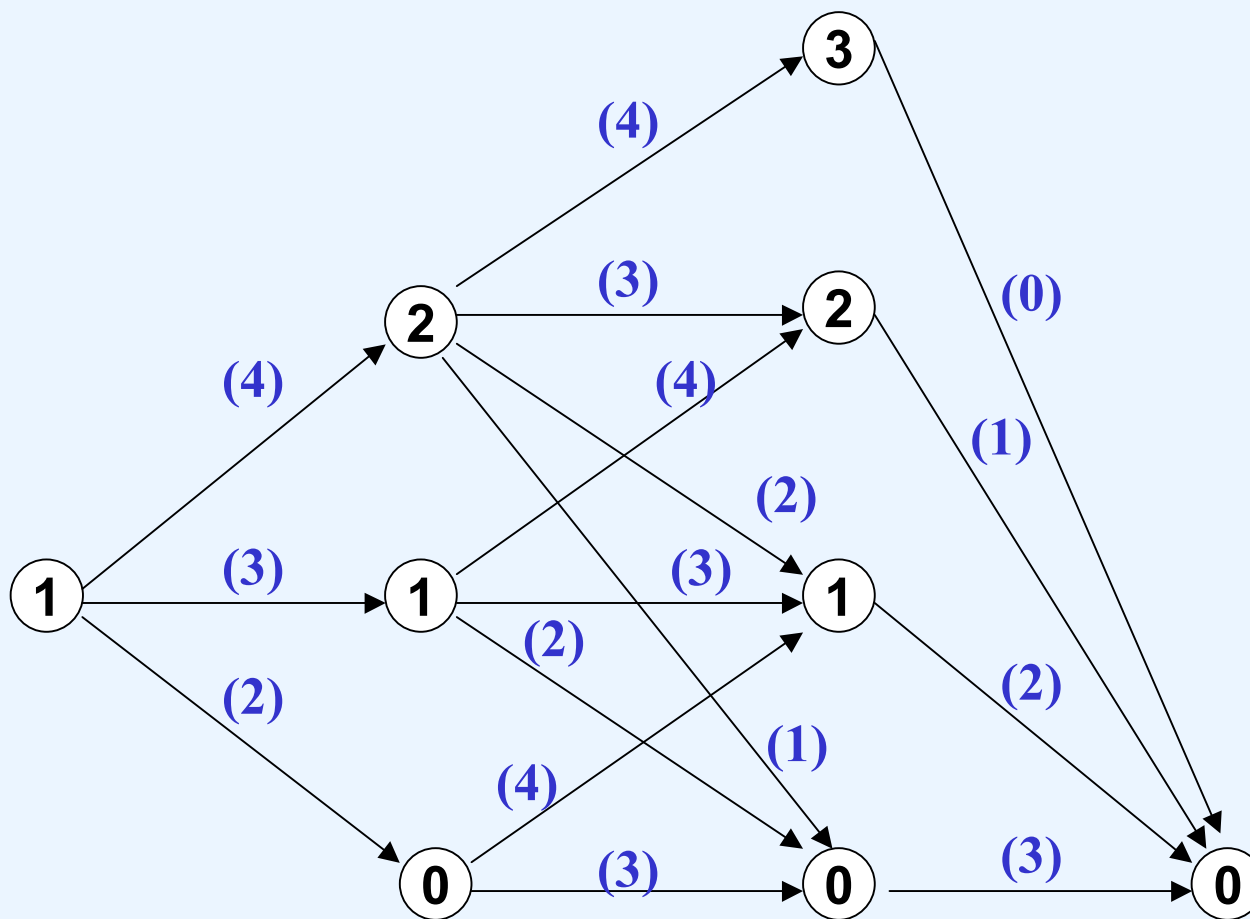
$$X_3(1) = \{ 2 \}$$

$$X_3(2) = \{ 1 \}$$

$$X_3(3) = \{ 0 \}$$

$$Y_4 = \{ 0 \}$$

Граф процесса



Значения функций издержек на каждом этапе

$$f_t(y_t, x_t) = k_t \cdot \lambda(x_t) + c_t \cdot x_t + m_t \cdot (y_t + x_t - d_t)$$

$$f_t(0,3) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (0 + 3 - 3) = 14$$

$$f_t(0,4) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (0 + 4 - 3) = 19$$

$$f_t(1,2) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (1 + 2 - 3) = 12$$

$$f_t(1,3) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (1 + 3 - 3) = 17$$

$$f_t(1,4) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (1 + 4 - 3) = 22$$

$$f_t(2,1) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (2 + 1 - 3) = 10$$

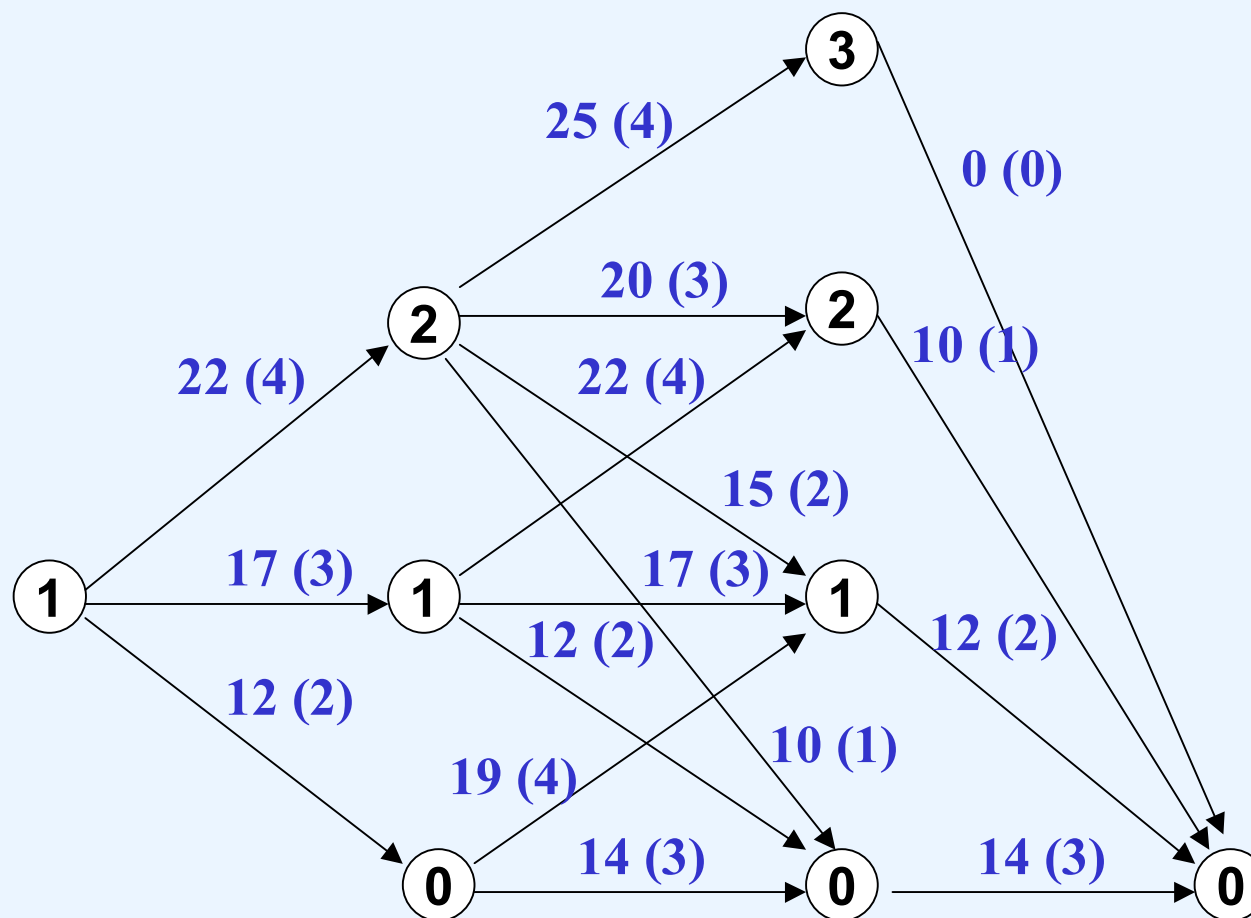
$$f_t(2,2) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2 + 2 - 3) = 15$$

$$f_t(2,3) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 + 3 - 3) = 20$$

$$f_t(2,4) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (2 + 4 - 3) = 25$$

$$f_t(3,0) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (3 + 0 - 3) = 0$$

Граф процесса с издержками на каждом этапе

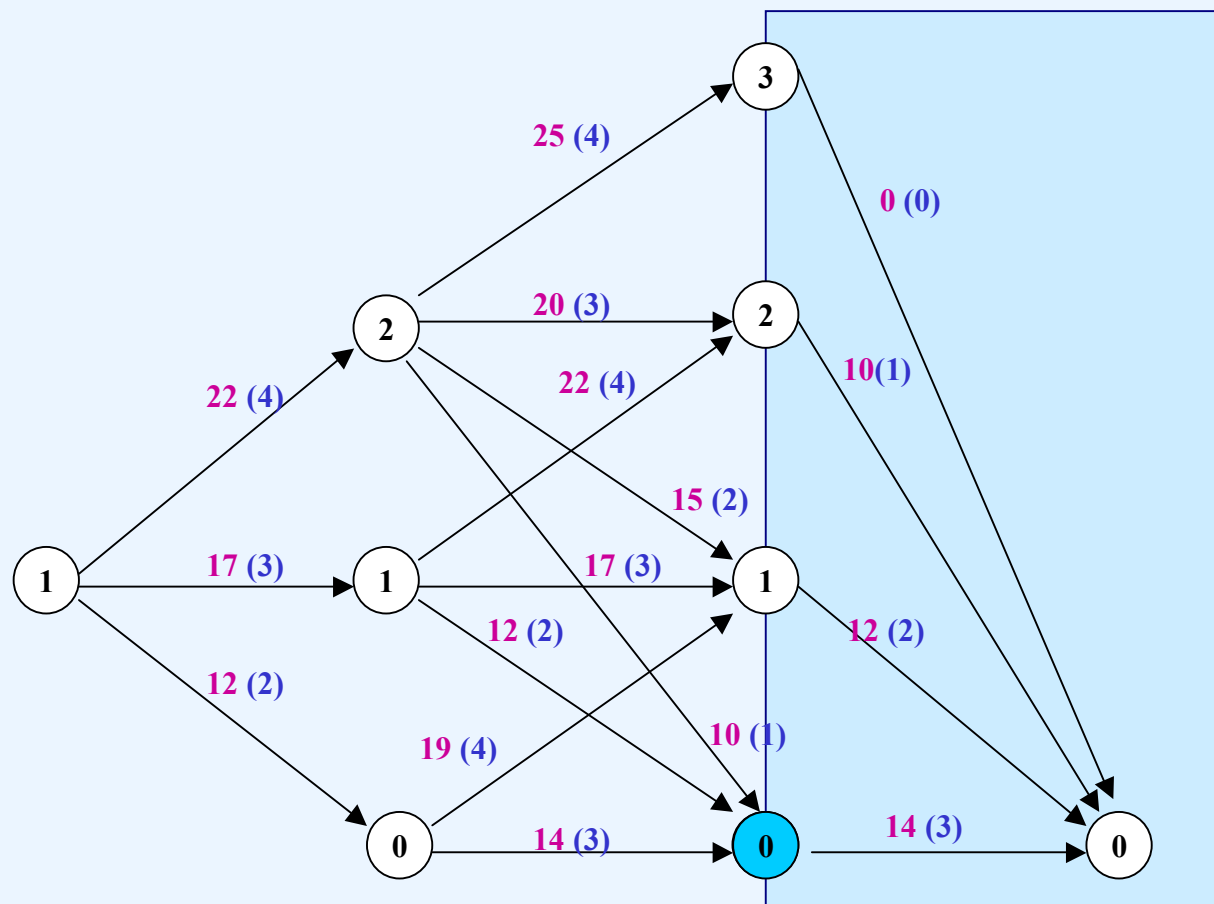


Принцип оптимальности Беллмана

Оптимальная стратегия характеризуется тем, что независимо от начального состояния и начального решения остальные решения должны составлять последовательность, оптимальную по отношению к состоянию, возникшему в результате первого решения.

Уравнения оптимальности (1)

Этап 3



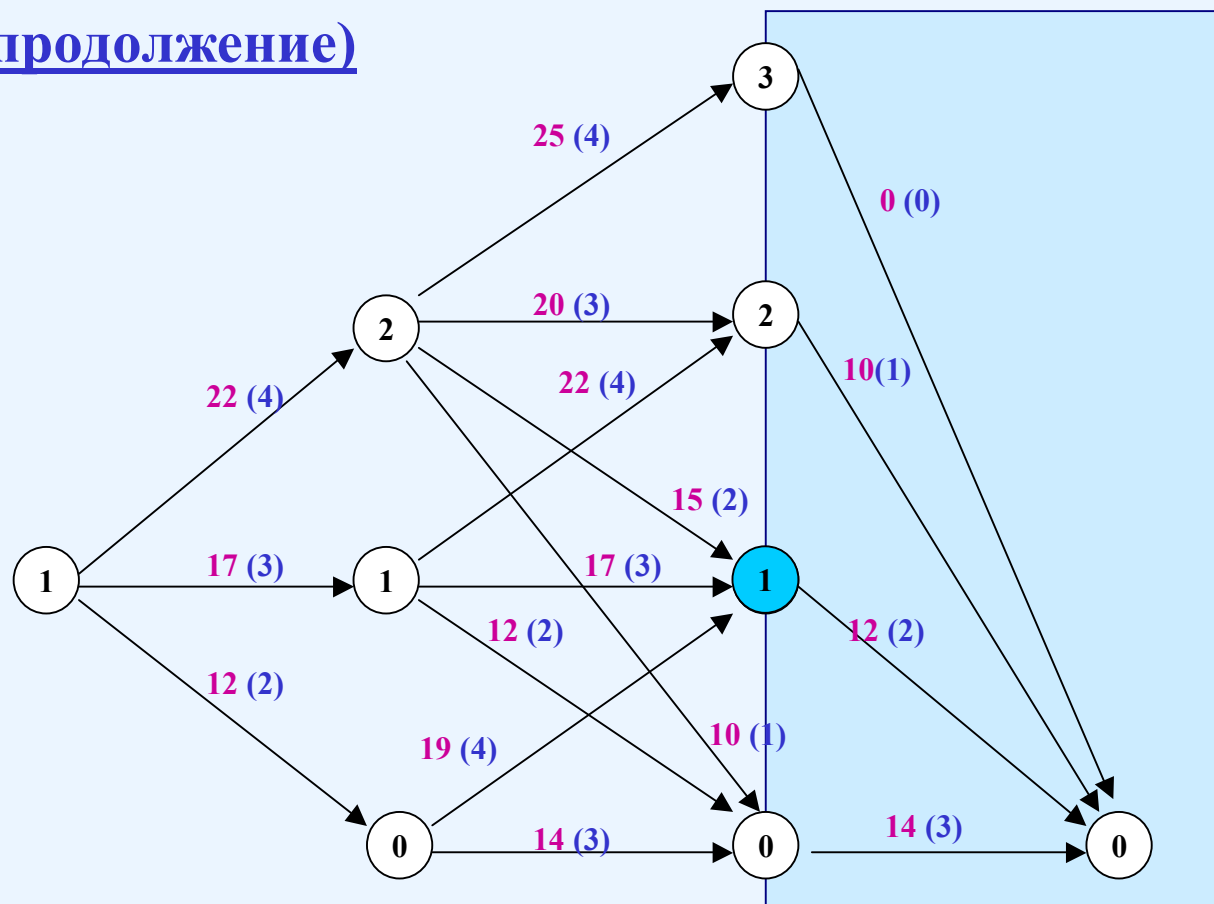
$$g_3^*(0) = \min \{ 14 \}$$

$$x_3^*(0) = 3$$

$$g_2^*(0) = 14$$

Уравнения оптимальности (2)

Этап 3 (продолжение)



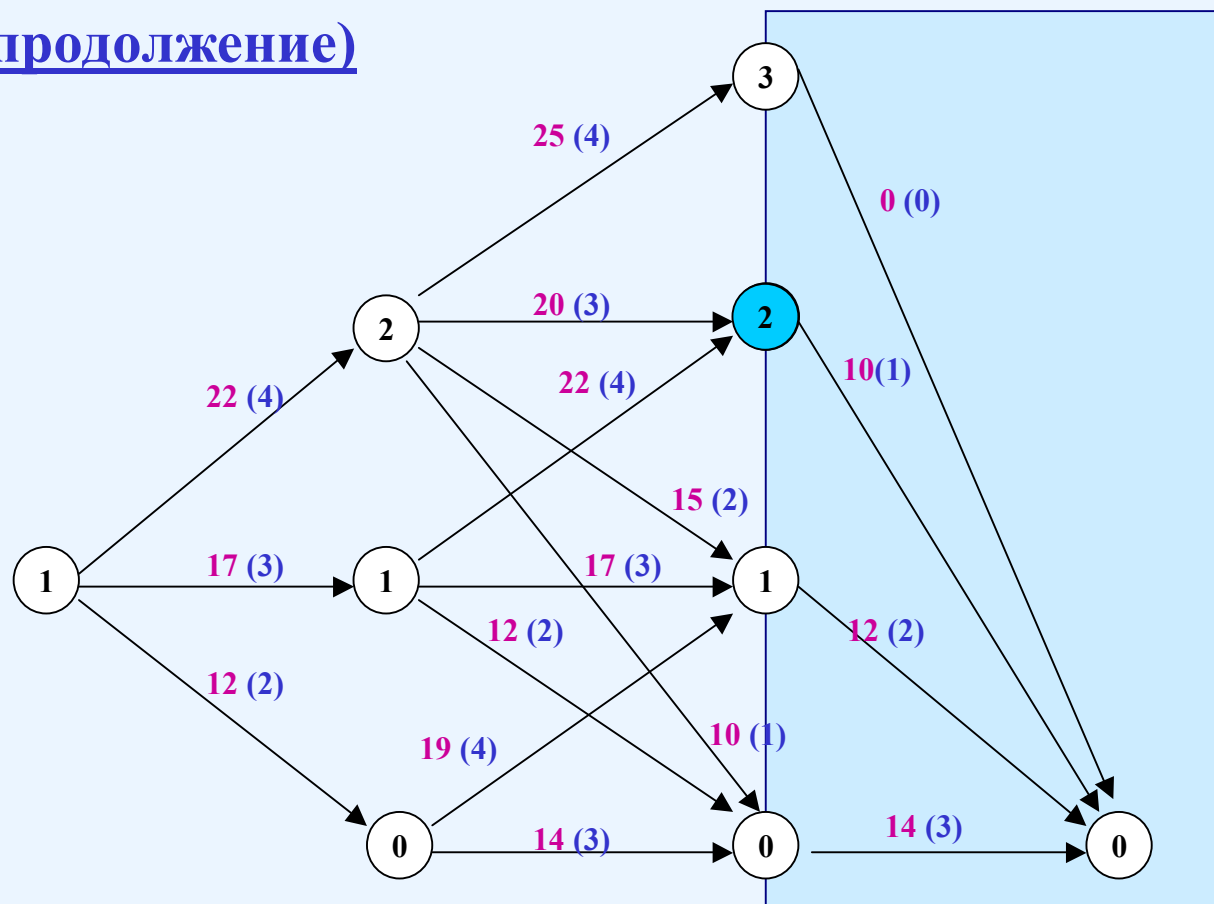
$$g^*_3(1) = \min \{ 12 \}$$

$$x^*_3(1) = 2$$

$$g^*_3(1) = 12$$

Уравнения оптимальности (3)

Этап 3 (продолжение)



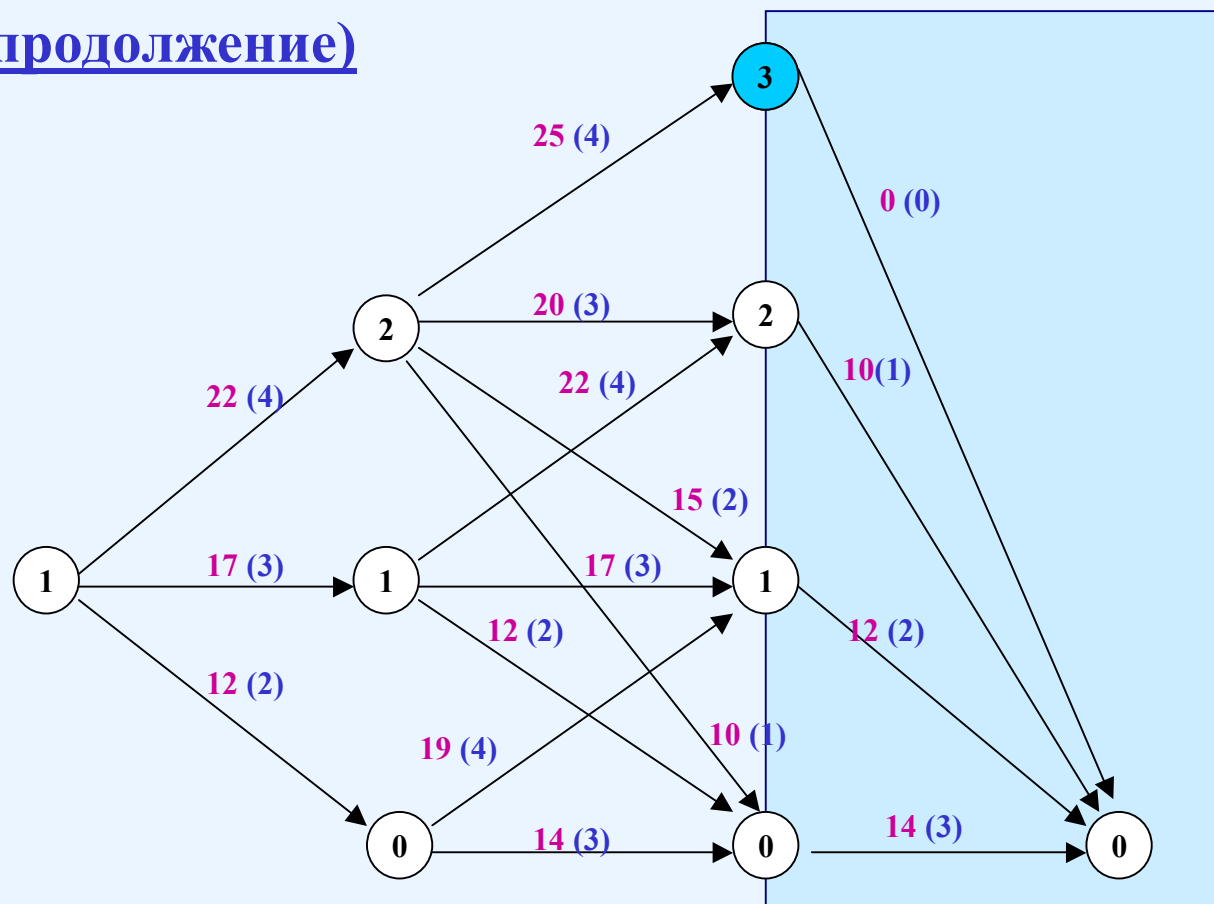
$$g^*_3(2) = \min \{ 10 \}$$

$$x^*_3(2) = 1$$

$$g^*_3(2) = 10$$

Уравнения оптимальности (4)

Этап 3 (продолжение)



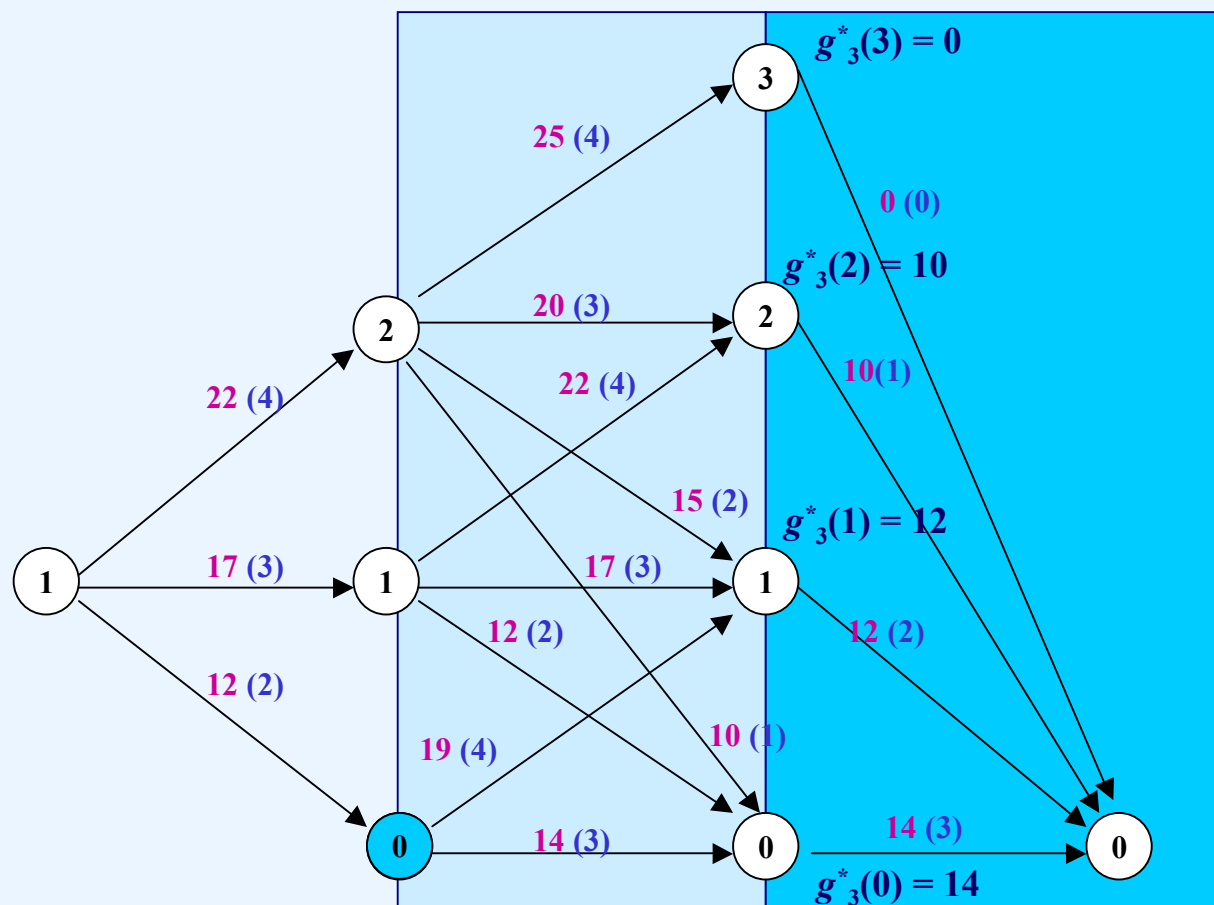
$$g^*_3(3) = \min \{0\}$$

$$x^*_3(3) = 0$$

$$g^*_3(3) = 0$$

Уравнения оптимальности (5)

Этап 2

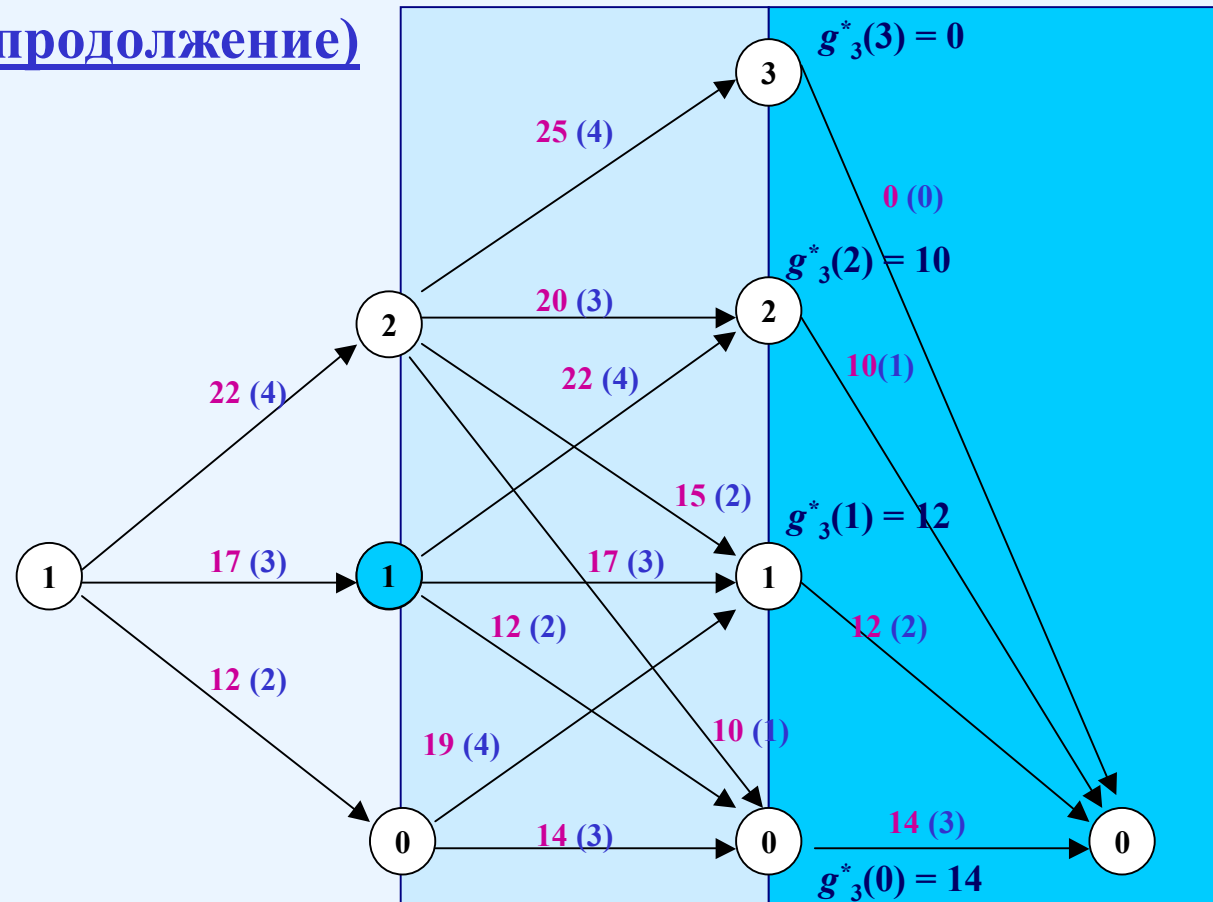


$$g^*_2(0) = \min \{ 14 + 14, 19 + 12 \} \quad x^*_2(0) = 3$$

$$g^*_2(0) = 28$$

Уравнения оптимальности (6)

Этап 2 (продолжение)

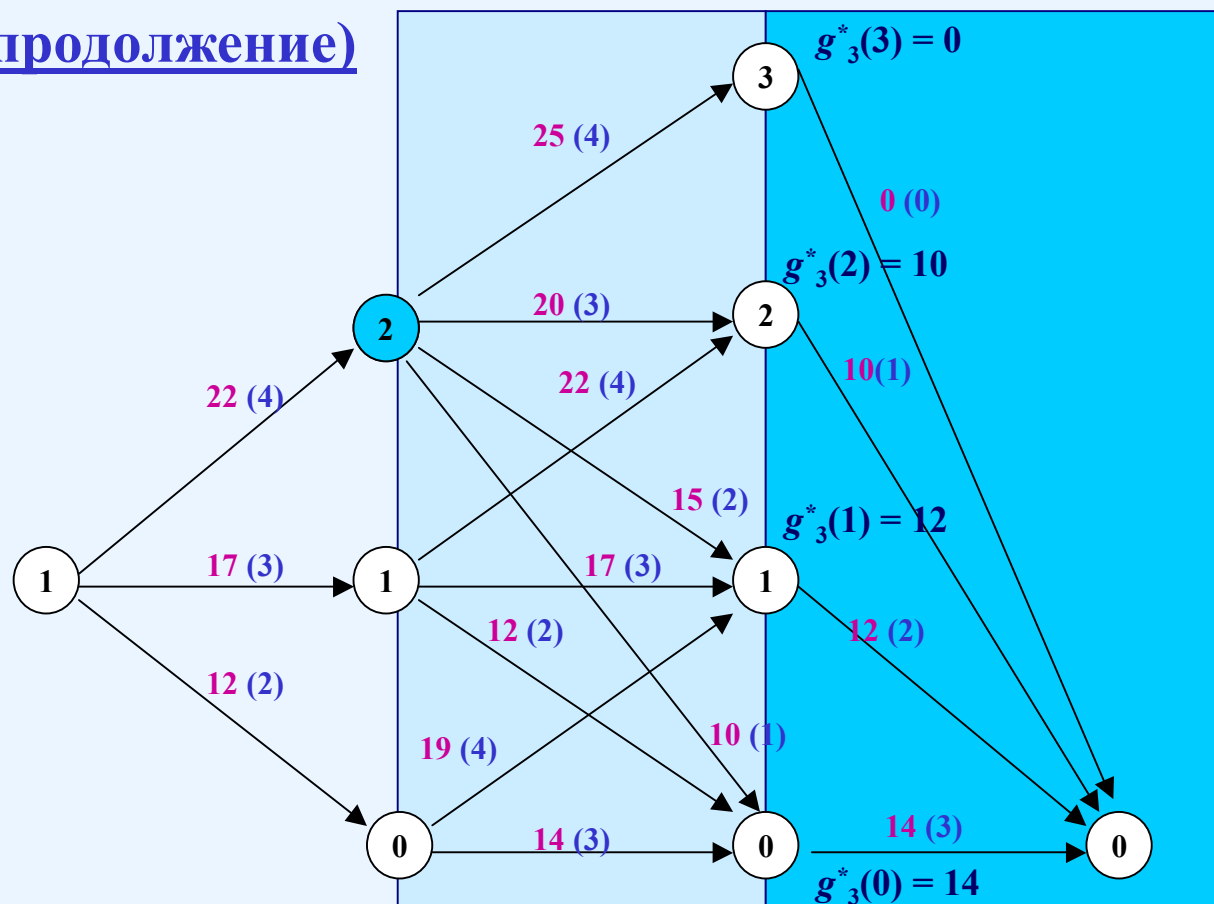


$$g^*_2(1) = \min \{ 12 + 14, 17 + 12, 22 + 10 \} \quad x^*_2(1) = 2$$

$$g^*_2(1) = 26$$

Уравнения оптимальности (7)

Этап 2 (продолжение)

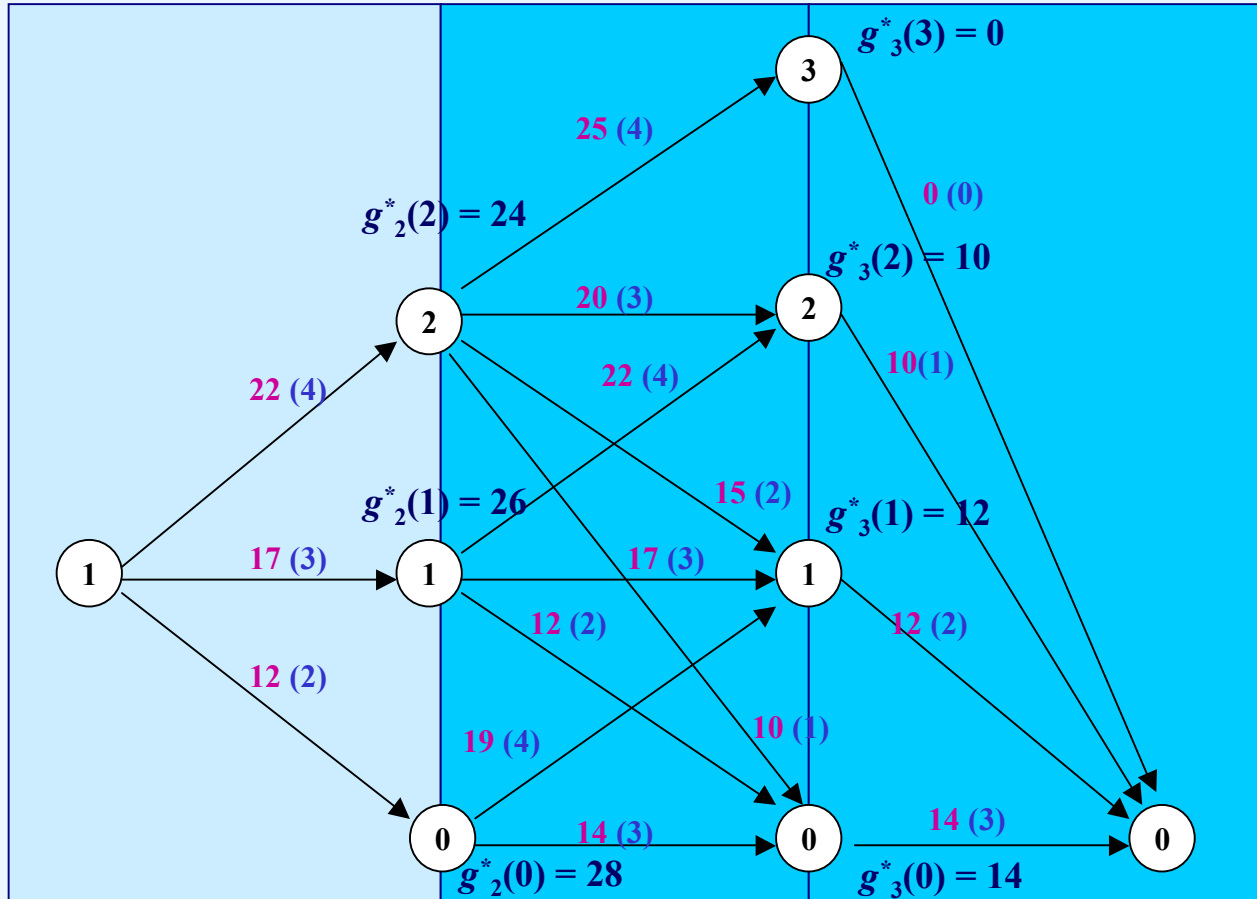


$$g^*_2(2) = \min \{ 10 + 14, 15 + 12, 20 + 10, 25 + 0 \} \quad x^*_2(2) = 1$$

$$g^*_2(2) = 24$$

Уравнения оптимальности (8)

Этап 1



$$g_1^*(1) = \min \{ 12 + 28, 17 + 26, 22 + 24 \} \quad x_1^*(1) = 2$$

$$g_1^*(1) = 40$$

Оптимальная реализация процесса

Заданное начальное состояние $y^*_1 = 1$

$$y^*_1 = 1$$

$$x^*_1(1) = 2$$

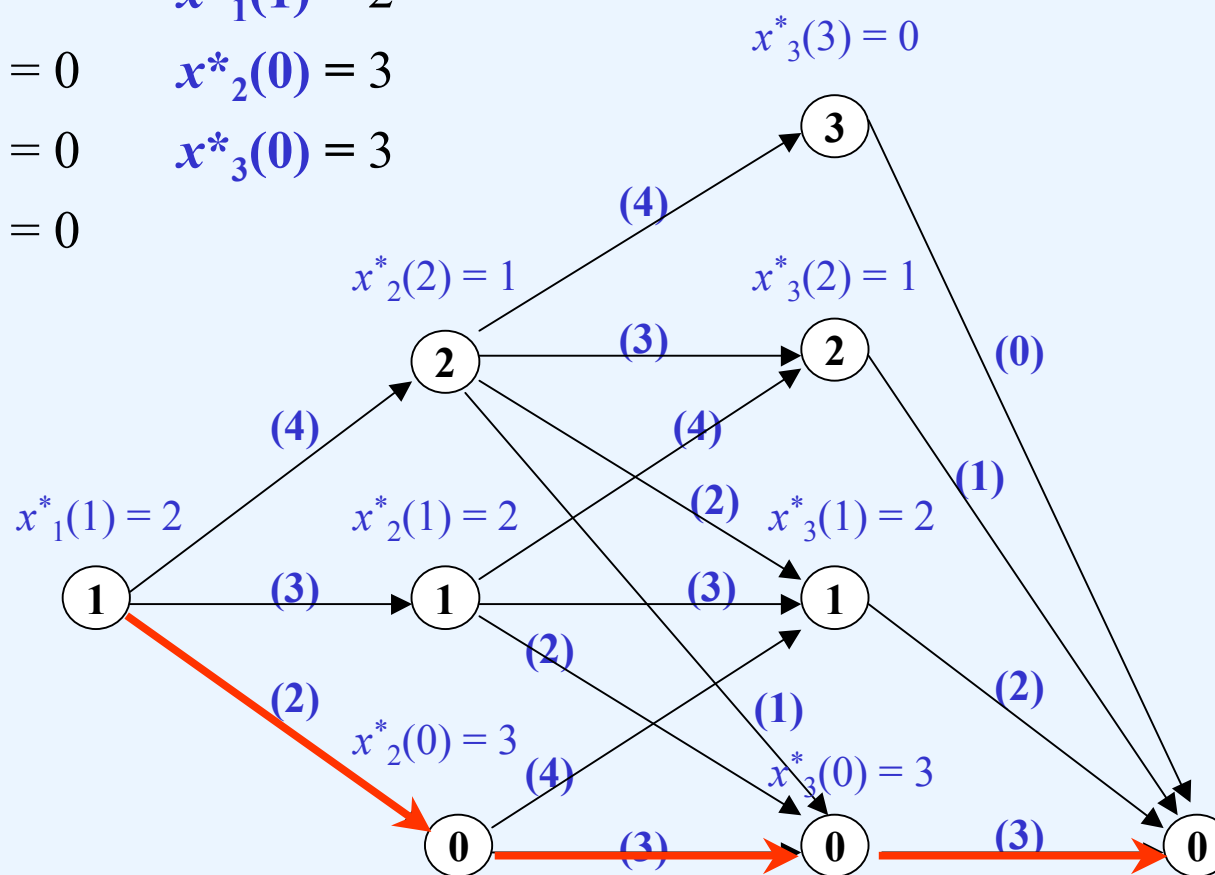
$$y^*_2 = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$x^*_2(0) = 3$$

$$y^*_3 = 0 + 3 - 3 = 0$$

$$x^*_3(0) = 3$$

$$y^*_4 = 0 + 3 - 3 = 0$$



Уравнения оптимальности (9)

Сводное описание

для $t = 3$

$$g_3^*(y_3) = \min\{f_3(y_3, x_3) : x_3 \in X_3(y_3)\}$$

для $t = 2$

$$g_2^*(y_2) = \min\{f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 + x_2 - d_2) : x_2 \in X_2(y_2)\}$$

для $t = 1$

$$g_1^*(y_1) = \min\{f_1(y_1, x_1) + g_2^*(y_1 + x_1 - d_1) : x_1 \in X_1(y_1)\}$$

Метод динамического программирования (1)

1. Задаем количество этапов T рассматриваемого процесса.
2. Определяем переменные состояния y_t (для $t = 1, \dots, T+1$) и решающие переменные x_t (для $t = 1, \dots, T$)

3. Определяем форму функции перехода

$$y_{t+1} = \Omega_t(y_t, x_t)$$

4. Определяем множество начальных состояний Y_1 и множество конечных состояний Y_{T+1} .

5. Для шага t ($t = 1, \dots, T$):

а) определяем множество допустимых состояний Y_t

б) Каждого состояния $y_t \in Y_t$ определяем множество допустимых решений $X_t(y_t)$.

Метод динамического программирования (2)

6. Строим и решаем уравнения оптимальности с применением принципа оптимальности Беллмана.

а) Этап T :

$$g_T^*(y_T) = \min\{f_T(y_T, x_T) : x_T \in X_T(y_T)\} \rightarrow x_T^*(y_T)$$

б) Этап t ($t = T-1, \dots, 1$)

$$g_t^*(y_t) = \min\{f_t(y_t, x_t) + g_{t+1}^*(y_{t+1}) : x_t \in X_t(y_t)\} \rightarrow x_t^*(y_t)$$

причем $y_{t+1} = \Omega_t(y_t, x_t)$.

7. Последовательность:

$$\{x_t^*(y_t) : y_t \in Y_t, t = 1, \dots, T\}$$

оптимальных решений, найденных на шаге 6, образуют оптимальную стратегию.

Метод динамического программирования (3)

8. Находим оптимальное начальное состояние y_1^* путем сравнения значений $g_1^*(y_1)$:

$$g_1^*(y_1^*) = \max \{ g_1^*(y_1) : y_1 \in Y_1 \}$$

9. Строим оптимальную реализацию процесса:

$$y_1^* \text{ оптимальное начальное состояние } x_1^* = x_1^*(y_1^*)$$

$$y_2^* = \Omega_2(y_2^*, x_2^*) \quad x_2^* = x_2^*(y_2^*)$$

.....

$$y_T^* = \Omega_{T-1}(y_{T-1}^*, x_{T-1}^*) \quad x_T^* = x_T^*(y_T^*)$$

$$y_{T+1}^* = \Omega_T(y_T^*, x_T^*)$$

$(y_1^*, x_1^*, y_2^*, x_2^*, \dots, y_T^*, x_T^*)$ - оптимальная реализация процесса

Задача распределения ресурса (1)

Пример 9.2

	Проект I	Проект II
Выделенный объем ресурса	a	b
Доход	$2a^2$	$3b^2$
Для использования в следующем периоде	$0,7a$	$0,3b$
Начальный объем ресурса	100 единиц	
Количество периодов	3	

Распределить ресурс так, чтобы максимизировать совокупный доход от реализации проектов I и II

Задача распределения ресурса (2)

Описание многошагового процесса принятия решений

Состояние

процесса y_t - объем ресурса, имеющегося в наличии на начало периода

Решение x_t -

объем ресурса, выделенного в начале периода t на реализацию проекта I

Функция перехода - $y_{t+1} = 0,7x_t + 0,3(y_t - x_t) = 0,4x_t + 0,3y_t$

Задача распределения ресурса (3)

Множества допустимых решений

$$Y_1 = \{ 100 \}$$

$$y_{t+1} = 0,4x_t + 0,3y_t$$

$$Y_2 = [30; 70]$$

$$Y_3 = [9; 49]$$

$$Y_4 = [2,7; 34,3]$$

Задача распределения ресурса (4)

Допустимые решения

$$X_t(y_t) = [0; y_t]$$

- выделить весь объем ресурса на реализацию проекта I (т.е. $x_t = y_t$),
- выделить весь объем ресурса на реализацию проекта II (т.е. $x_t = 0$),
- распределить ресурс между проектами так, чтобы количество ресурса, выделенное каждому проекту, отличалось от нуля (т.е. $x_t \in (0; y_t)$).

Функция доходов

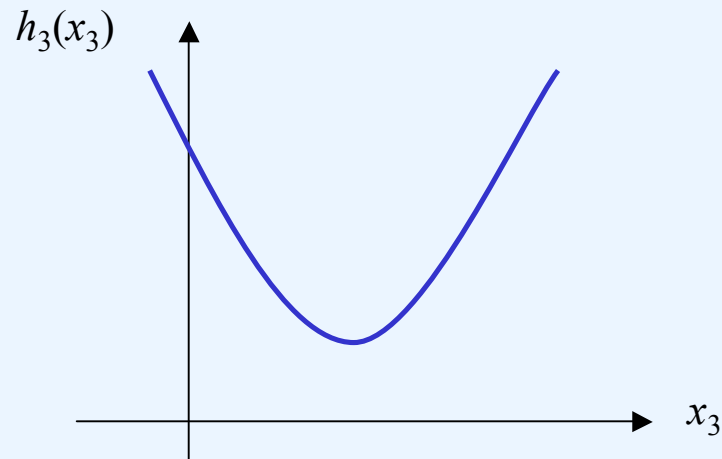
$$f_t(y_t, x_t) = 2x_t^2 + 3(y_t - x_t)^2$$

Задача распределения ресурса (5)

Этап 3

$$g_3^*(y_3) = \max \left\{ \underbrace{2x_3^2 + 3(y_3 - x_3)^2}_{h_3(x_3)} : x_3 \in X_3(y_3) \right\}$$

$h_3(x_3)$ является параболой, ветви которой направлены вверх



Получаем: $h_3(y_3) = 2y_3^2$ $h_3(0) = 3y_3^2$

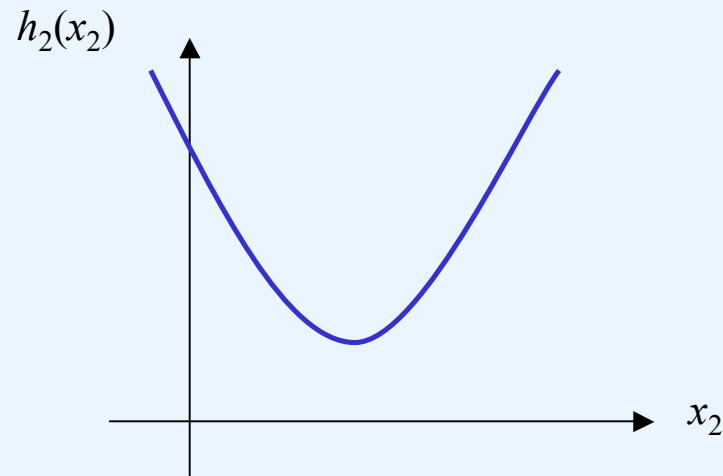
т.е.: $g_3^*(y_3) = 3y_3^2$ $x_3^*(y_3) = 0$

Задача распределения ресурса (6)

Этап 2

$$g_2^*(y_2) = \max \left\{ \underbrace{2x_2^2 + 3(y_2 - x_2)^2 + 3(0,4x_2 + 0,3y_2)^2}_{h_2(x_2)} : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$h_2(x_2)$ является параболой, ветви которой направлены вниз



$$\text{Получаем: } h_2(y_2) = 3,47 y_2^2 \qquad h_2(0) = 3,27 y_2^2$$

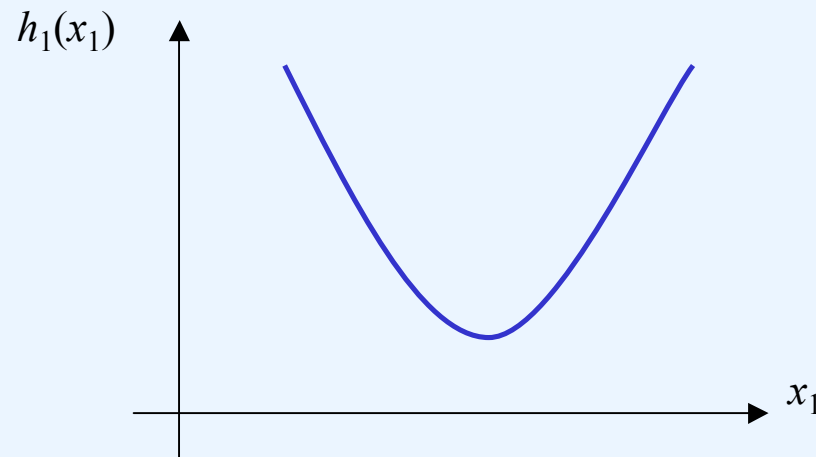
$$\text{т.е.: } g_2^*(y_2) = 3,47 y_2^2 \qquad x_2^*(y_2) = y_2$$

Задача распределения ресурса (7)

Этап 1

$$g_1^*(y_1) = \max \left\{ \underbrace{2x_1^2 + 3(y_1 - x_1)^2 + 3,47(0,4x_1 + 0,3y_1)^2}_{h_1(x_1)} : x_1 \in X_1(y_1) \right\}$$

$h_1(x_1)$ является параболой, ветви которой направлены вверх



$$\text{Получаем: } h_1(y_1) = 3,70y_1^2 \qquad h_1(0) = 3,31y_1^2$$

$$\text{т.е.: } g_1^*(y_1) = 3,70y_1^2 \qquad x_1^*(y_1) = y_1$$

Задача распределения ресурса (8)

Оптимальная реализация процесса для $y_1^* = 100$

$$y_1^* = 100$$

$$x_1^* = x_1^*(100) = 100$$

$$y_2^* = 70$$

$$x_2^* = x_2^*(70) = 70$$

$$y_3^* = 49$$

$$x_3^* = x_3^*(49) = 0$$

$$y_4^* = 14,7$$

$$\text{Доход} = 37\ 003$$

Оптимальная реализация процесса для $y_1^* = 80$

$$y_1^* = 80$$

$$x_1^* = x_1^*(80) = 80$$

$$y_2^* = 56$$

$$x_2^* = x_2^*(56) = 56$$

$$y_3^* = 39,2$$

$$x_3^* = x_3^*(39,2) = 0$$

$$y_4^* = 11,76$$

$$\text{Доход} = 23\ 681,92$$

Задача распределения средств (1)

Пример 9.3

Объем выделенной квоты	Проект		
	I	II	III
0	0	0	0
1	1,5	2,5	2,8
2	2,5	4,1	4,5
3	4,0	5,5	6,5
4	5,0	6,5	7,8
5	6,2	7,5	9,0
6	7,3	8	10,2

Распределить фонд между проектами так, чтобы максимизировать совокупный доход

Задача распределения средств (2)

Описание многошагового процесса принятия решений

**Состояние
процесса y_t -**

нераспределенная квота на начало шага t ,

Решение x_t -

Объем средств, выделенный на реализацию
проекта

Функция перехода

$$y_{t+1} = y_t - x_t$$

Задача распределения средств (3)

Множества состояний и допустимых решений

$$Y_1 = \{ 6 \}$$

$$X_1(6) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$y_2 = y_1 - x_1$$

$$Y_2 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$X_2(0) = \{ 0 \}$$

$$X_2(1) = \{ 0, 1 \}$$

$$X_2(2) = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$X_2(3) = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

$$X_2(4) = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

$$X_2(5) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$X_2(6) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$y_3 = y_2 - x_2$$

$$Y_3 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$X_3(0) = \{ 0 \}$$

$$X_3(1) = \{ 1 \}$$

$$X_3(2) = \{ 2 \}$$

$$X_3(3) = \{ 3 \}$$

$$X_3(4) = \{ 4 \}$$

$$X_3(5) = \{ 5 \}$$

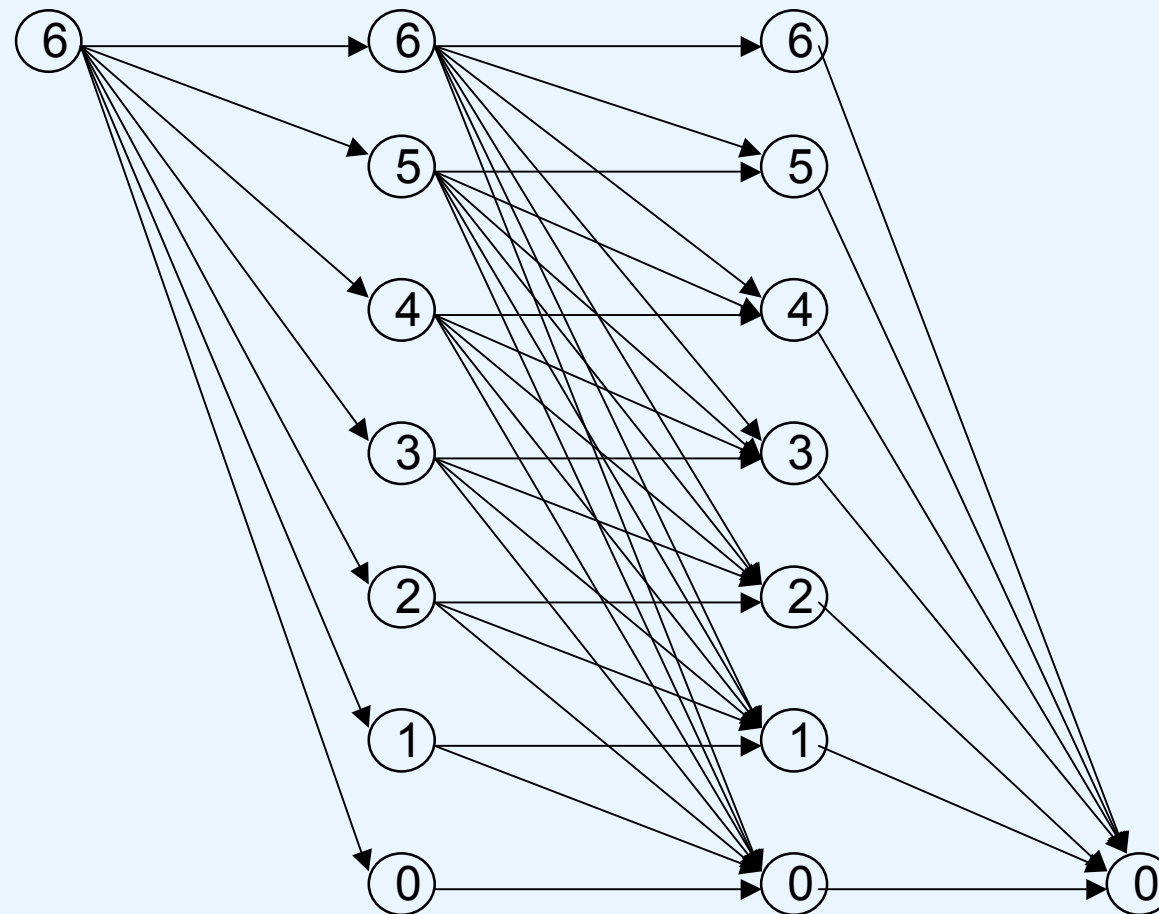
$$X_3(6) = \{ 6 \}$$

$$y_4 = y_3 - x_3$$

$$Y_4 = \{ 0 \}$$

Задача распределения средств (4)

Граф процесса



Задача распределения средств (5)

Значения функции доходов на каждом этапе

$$f_1(6; 0) = 0 \quad f_1(6; 1) = 1,5 \quad f_1(6; 2) = 2,5 \quad f_1(6; 3) = 4$$

$$f_1(6; 4) = 5 \quad f_1(6; 5) = 6,2 \quad f_1(6; 6) = 7,3$$

$$f_2(y_2; 0) = 0 \quad f_2(y_2; 1) = 2,5 \quad f_2(y_2; 2) = 4,1 \quad f_2(y_2; 3) = 5,5$$

$$f_2(y_2; 4) = 6,5 \quad f_2(y_2; 5) = 5,5 \quad f_2(y_2; 6) = 8$$

$$f_3(0; 0) = 0 \quad f_3(1; 1) = 2,8 \quad f_3(2; 2) = 4,5 \quad f_3(3; 3) = 6,5$$

$$f_3(4; 4) = 7,8 \quad f_3(5; 5) = 9 \quad f_3(6; 6) = 10,2$$

Уравнения оптимальности (1)

Этап 3

$$g_3^*(y_3) = \max\{f_3(y_3, x_3) : x_3 \in X_3(y_3)\}$$

$$g_3^*(0) = f_3(0,0) = 0 \qquad x_3^*(0) = 0$$

$$g_3^*(1) = f_3(1,1) = 2,8 \qquad x_3^*(1) = 1$$

$$g_3^*(2) = f_3(2,2) = 4,5 \qquad x_3^*(2) = 2$$

$$g_3^*(3) = f_3(3,3) = 6,5 \qquad x_3^*(3) = 3$$

$$g_3^*(4) = f_3(4,4) = 7,8 \qquad x_3^*(4) = 4$$

$$g_3^*(5) = f_3(5,5) = 9,0 \qquad x_3^*(5) = 5$$

$$g_3^*(6) = f_3(6,6) = 10,2 \qquad x_3^*(6) = 6$$

Уравнения оптимальности (2)

Этап 2

$$g_2^*(y_2) = \max \left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$g_2^*(0) = 0 \quad \text{и} \quad x_2^*(0) = 0$$

$$g_2^*(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(1;0) + g_3^*(1) \\ f_2(1;1) + g_3^*(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 2,8 \\ 2,5 + 0 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 2,8 \\ 2,5 \end{array} \right\} = 2,8 \quad \text{и} \quad x_2^*(1) = 0$$

$$g_2^*(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(2;0) + g_3^*(2) \\ f_2(2;1) + g_3^*(1) \\ f_2(2;2) + g_3^*(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 4,5 \\ 2,5 + 2,8 \\ 4,1 + 0 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 4,5 \\ 5,3 \\ 4,4 \end{array} \right\} = 5,3 \quad \text{и} \quad x_2^*(2) = 1$$

Уравнения оптимальности (3)

Этап 2 (продолжение)

$$g_2^*(y_2) = \max \left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$g_2^*(3) = \max \begin{Bmatrix} f_2(3;0) + g_3^*(3) \\ f_2(3;1) + g_3^*(2) \\ f_2(3;2) + g_3^*(1) \\ f_2(3;3) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 6,5 \\ 2,5 + 4,5 \\ 4,1 + 2,8 \\ 5,5 + 0 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 6,5 \\ 7 \\ 6,9 \\ 5,5 \end{Bmatrix} = 7 \quad \text{и} \quad x_2^*(3) = 1$$

$$g_2^*(4) = \max \begin{Bmatrix} f_2(4;0) + g_3^*(4) \\ f_2(4;1) + g_3^*(3) \\ f_2(4;2) + g_3^*(2) \\ f_2(4;3) + g_3^*(1) \\ f_2(4;4) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 7,8 \\ 2,5 + 6,5 \\ 4,1 + 4,5 \\ 5,5 + 2,8 \\ 6,5 + 0 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 7,8 \\ 9 \\ 8,6 \\ 8,3 \\ 6,5 \end{Bmatrix} = 9 \quad \text{и} \quad x_2^*(4) = 1$$

Уравнения оптимальности (4)

Этап 2 (продолжение)

$$g_2^*(y_2) = \max \left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$g_2^*(5) = \max \begin{Bmatrix} f_2(5;0) + g_3^*(5) \\ f_2(5;1) + g_3^*(4) \\ f_2(5;2) + g_3^*(3) \\ f_2(5;3) + g_3^*(2) \\ f_2(5;4) + g_3^*(1) \\ f_2(5;5) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 9 \\ 2,5 + 7,8 \\ 4,1 + 6,5 \\ 5,5 + 4,5 \\ 6,5 + 2,8 \\ 7,5 + 0 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 9 \\ 10,3 \\ 10,6 \\ 10 \\ 9,3 \\ 7,5 \end{Bmatrix} = 10,6 \quad \text{и} \quad x_2^*(5) = 2$$

Уравнения оптимальности (5)

Этап 2 (продолжение)

$$g_2^*(y_2) = \max \left\{ f_2(y_2, x_2) + g_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$g_2^*(6) = \max \begin{Bmatrix} f_2(6;0) + g_3^*(6) \\ f_2(6;1) + g_3^*(5) \\ f_2(6;2) + g_3^*(4) \\ f_2(6;3) + g_3^*(3) \\ f_2(6;4) + g_3^*(2) \\ f_2(6;5) + g_3^*(1) \\ f_2(6;6) + g_3^*(0) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0 + 10,2 \\ 2,5 + 9 \\ 4,1 + 7,8 \\ 5,5 + 6,5 \\ 6,5 + 4,5 \\ 7,5 + 2,1 \\ 8 + 0 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 10,2 \\ 11,5 \\ 11,9 \\ 12 \\ 11 \\ 9,6 \\ 8 \end{Bmatrix} = 12 \quad \text{и} \quad x_2^*(6) = 3$$

Уравнения оптимальности (6)

Этап 1

$$g_1^*(y_1) = \max \{ f_1(y_1, x_1) + g_2^*(y_1 - x_1) : x_1 \in X_1(y_1) \}$$

$$g_1^*(6) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_1(6;0) + g_2^*(6) \\ f_1(6;1) + g_2^*(5) \\ f_1(6;2) + g_2^*(4) \\ f_1(6;3) + g_2^*(3) \\ f_1(6;4) + g_2^*(2) \\ f_1(6;5) + g_2^*(1) \\ f_1(6;6) + g_2^*(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 12 \\ 1,5 + 10,6 \\ 2,5 + 9 \\ 4 + 7 \\ 5 + 5,3 \\ 6,2 + 2,8 \\ 7,3 + 0 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 12,1 \\ 11,5 \\ 11 \\ 10,3 \\ 9 \\ 7,3 \end{array} \right\} = 12,1 \text{ и } x_1^*(6) = 1$$

Задача распределения средств (6)

Оптимальная реализация процесса

$$y_1^* = 6$$

$$x_1^* = x_1^*(6) = 1$$

$$y_2^* = y_1^* - x_1^* = 6 - 1 = 5$$

$$x_2^* = x_2^*(5) = 2$$

$$y_3^* = y_2^* - x_2^* = 5 - 2 = 3$$

$$x_3^* = x_3^*(3) = 3$$

$$y_4^* = y_3^* - x_3^* = 3 - 3 = 0$$

Задача распределения средств (7)

Анализ оптимального решения в зависимости от объема фонда

Объем фонда y_1^*	$g_1^*(y_1^*)$	Оптимальная последовательность решений		
		x_1^*	x_2^*	x_3^*
1	2,8	0	0	1
2	5,3	0	1	1
3	7,0	0	1	2
4	9,0	0	1	3
5	10,6	0	2	3
6	12,1	1	2	3

Двухкритериальная задача распределения средств

Пример 9.4

Объем выделенной квоты	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3	
	Выра- ботка	Безотказность	Выра- ботка	Безотказность	Выра- ботка	Безотказность
0	0	0,9	0	0,9	0	0,9
1	1,5	0,97	2,5	0,94	2,8	0,96
2	2,5	0,991	4,1	0,964	4,5	0,984
3	4,0	0,9973	5,5	0,9784	6,5	0,9936
4	5,0	0,9992	6,5	0,987	7,8	0,9974
5	6,2	0,9998	7,5	0,9922	9,0	0,999
6	7,3	0,9999	8	0,9953	10,2	0,9994

Распределить имеющиеся в наличии средства так, чтобы максимизировать совокупную выработку всех модулей системы и максимизировать ее безотказность.

Функции выработки на каждом этапе (1)

Выработка

$$f_1^1(6; 0) = 0 \quad f_1^1(6; 1) = 1,5 \quad f_1^1(6; 2) = 2,5 \quad f_1^1(6; 3) = 4$$

$$f_1^1(6; 4) = 5 \quad f_1^1(6; 5) = 6,2 \quad f_1^1(6; 6) = 7,3$$

$$f_2^1(y_2; 0) = 0 \quad f_2^1(y_2; 1) = 2,5 \quad f_2^1(y_2; 2) = 4,1 \quad f_2^1(y_2; 3) = 5,5$$

$$f_2^1(y_2; 4) = 6,5 \quad f_2^1(y_2; 5) = 5,5 \quad f_2^1(y_2; 6) = 8$$

$$f_3^1(y_3; 0) = 0 \quad f_3^1(y_3; 1) = 2,8 \quad f_3^1(y_3; 2) = 4,5 \quad f_3^1(y_3; 3) = 6,5$$

$$f_3^1(y_3; 4) = 7,8 \quad f_3^1(y_3; 5) = 9 \quad f_3^1(y_3; 6) = 10,2$$

Функции безотказности на каждом этапе (2)

Безотказность

$$f_1^2(6; 0) = 0,9 \quad f_1^2(6; 1) = 0,97 \quad f_1^2(6; 2) = 0,991 \quad f_1^2(6; 3) = 0,9973$$

$$f_1^2(6; 4) = 0,9992 \quad f_1^2(6; 5) = 0,9998 \quad f_1^2(6; 6) = 0,9999$$

$$f_2^2(y_2; 0) = 0,9 \quad f_2^2(y_2; 1) = 0,94 \quad f_2^2(y_2; 2) = 0,964 \quad f_2^2(y_2; 3) = 0,9784$$

$$f_2^2(y_2; 4) = 0,9870 \quad f_2^2(y_2; 5) = 0,9922 \quad f_2^2(y_2; 6) = 0,9953$$

$$f_3^2(y_3; 0) = 0,9 \quad f_3^2(y_3; 1) = 0,96 \quad f_3^2(y_3; 2) = 0,984 \quad f_3^2(y_3; 3) = 0,9936$$

$$f_3^2(y_3; 4) = 0,9974 \quad f_3^2(y_3; 5) = 0,999 \quad f_3^2(y_3; 6) = 0,9994$$

Векторная критериальная функция

Компонента 1 - Выработка

$$f^1(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3) = f_1^1(y_1, x_1) + f_2^1(y_2, x_2) + f_3^1(y_3, x_3)$$

Компонента 2 - Безотказность

$$f^2(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3) = f_1^2(y_1, x_1) \cdot f_2^2(y_2, x_2) \cdot f_3^2(y_3, x_3)$$

$$F = [f^1, f^2]$$

Декомпозиция внутри этапа

$$F_t(y_t, x_t) = [f_t^1(y_t, x_t), f_t^2(y_t, x_t)]$$

Оценивание второго и третьего модуля

$$F_2 \circ F_3 = [f_2^1 + f_3^1, f_2^2 \cdot f_3^2]$$

Совокупное оценивание первого и остальных модулей

$$F_1 \circ (F_2 \circ F_3) = [f_1^1 + (f_2^1 + f_3^1), f_1^2 \cdot (f_2^2 \cdot f_3^2)]$$

Векторная версия принципа оптимальности Беллмана

Корректная стратегия характеризуется тем, что независимо от начального состояния и начального решения остальные решения должны представлять собой последовательность решений, корректных относительно состояния, возникшего при реализации первого решения

Векторные уравнения оптимальности (1)

Этап 3

$$G_3^*(y_3) = \text{'max'} \{F_3(y_3, x_3) : x_3 \in X_3(y_3)\}$$

$$G_3^*(0) = F_3(0,0) = \{[0;0,9]\} \quad x_3^*(0) = \{0\}$$

$$G_3^*(1) = F_3(1,1) = \{[2,8;0,96]\} \quad x_3^*(1) = \{1\}$$

$$G_3^*(2) = F_3(2,2) = \{[4,5;0,984]\} \quad x_3^*(2) = \{2\}$$

$$G_3^*(3) = F_3(3,3) = \{[6,5;0,9936]\} \quad x_3^*(3) = \{3\}$$

$$G_3^*(4) = F_3(4,4) = \{[7,8;0,9974]\} \quad x_3^*(4) = \{4\}$$

$$G_3^*(5) = F_3(5,5) = \{[9,0;0,999]\} \quad x_3^*(5) = \{5\}$$

$$G_3^*(6) = F_3(6,6) = \{[10,2;0,9994]\} \quad x_3^*(6) = \{6\}$$

Векторные уравнения оптимальности (2)

Этап 2

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'} \left\{ F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$G_2^*(0) = \text{'max'} \{ [0; 0,9] \circ [0; 0,9] \} = \{ [0; 0,81] \} \quad \text{и} \quad x_2^*(0) = \{0\}$$

$$G_2^*(1) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [2,8; 0,96] \\ [2,5; 0,94] \circ [0; 0,9] \end{array} \right\} = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [2,8; 0,864] \\ [2,5; 0,846] \end{array} \right\} = [2,8; 0,864] \quad \text{и} \quad x_2^*(1) = \{1\}$$

$$G_2^*(2) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [4,5; 0,984] \\ [2,5; 0,94] \circ [2,8; 0,96] \\ [4,1; 0,964] \circ [0; 0,9] \end{array} \right\} = \text{max} \left\{ \begin{array}{l} [4,5; 0,8856] \\ [5,3; 0,9024] \\ [4,1; 0,8676] \end{array} \right\} = [5,3; 0,9024] \quad \text{и} \quad x_2^*(2) = \{1\}$$

Векторные уравнения оптимальности (3)

Этап 2 (продолжение)

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'} \left\{ F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$G_2^*(3) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [6,5; 0,9936] \\ [2,5; 0,94] \circ [4,5; 0,984] \\ [4,1; 0,964] \circ [2,8; 0,9] \\ [5,5; 0,9784] \circ [0; 0,9] \end{array} \right\} = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [6,5; 0,8942] \\ [7; 0,925] \\ [6,9; 0,9254] \\ [5,5; 0,8805] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [7; 0,925] \\ [6,9; 0,9254] \end{array} \right\}$$

и $x_2^*(3) = \{1,2\}$

$$G_2^*(4) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [7,8; 0,9974] \\ [2,5; 0,94] \circ [6,5; 0,9936] \\ [4,1; 0,964] \circ [4,5; 0,984] \\ [5,5; 0,9784] \circ [2,8; 0,96] \\ [6,5; 0,987] \circ [0; 0,9] \end{array} \right\} = \text{max} \left\{ \begin{array}{l} [7,8; 0,8977] \\ [9; 0,934] \\ [8,6; 0,9486] \\ [8,3; 0,9393] \\ [6,5; 0,8883] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [9; 0,934] \\ [8,6; 0,9486] \end{array} \right\}$$

и $x_2^*(4) = \{1,2\}$

Векторные уравнения оптимальности (4)

Этап 2 (продолжение)

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'} \left\{ F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$G_2^*(5) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [9; 0,999] \\ [2,5; 0,94] \circ [7,8; 0,9974] \\ [4,1; 0,964] \circ [6,5; 0,9936] \\ [5,5; 0,9784] \circ [4,5; 0,984] \\ [6,5; 0,987] \circ [2,8; 0,96] \\ [7,5; 0,9922] \circ [0; 0,9] \end{array} \right\} = \text{max} \left\{ \begin{array}{l} [9; 0,899] \\ [10,3; 0,9376] \\ [10,6; 0,9578] \\ [10; 0,9627] \\ [9,3; 0,9475] \\ [7,5; 0,893] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [10,6; 0,9578] \\ [10; 0,9627] \end{array} \right\}$$

$$\text{и } x_2^*(5) = \{2,3\}$$

Векторные уравнения оптимальности (5)

Этап 2 (продолжение)

$$G_2^*(y_2) = \text{'max'} \left\{ F_2(y_2, x_2) \circ G_3^*(y_2 - x_2) : x_2 \in X_2(y_2) \right\}$$

$$G_2^*(6) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [10,2; 0,9994] \\ [2,5; 0,94] \circ [9; 0,999] \\ [4,1; 0,964] \circ [7,8; 0,9974] \\ [5,5; 0,9784] \circ [6,5; 0,9936] \\ [6,5; 0,987] \circ [4,5; 0,984] \\ [7,5; 0,9922] \circ [2,8; 0,96] \\ [8; 0,9953] \circ [0; 0,9] \end{array} \right\} = \text{max} \left\{ \begin{array}{l} [10,2; 0,8995] \\ [11,5; 0,9391] \\ [11,9; 0,9407] \\ [12; 0,9721] \\ [11; 0,9712] \\ [10,3; 0,9525] \\ [8; 0,8958] \end{array} \right\} = [12; 0,9721]$$

$$\text{и } x_2^*(6) = \{3\}$$

Векторные уравнения оптимальности (6)

Этап 1

$$G_1^*(y_1) = \text{'max'} \{ F_1(y_1, x_1) \circ G_2^*(y_1 - x_1) : x_1 \in X_1(y_1) \}$$

$$G_1^*(6) = \text{'max'} \left\{ \begin{array}{l} [0; 0,9] \circ [12; 0,9721] \\ [1,5; 0,97] \circ [10,6; 0,9578] \\ [1,5; 0,97] \circ [10; 0,9627] \\ [2,5; 0,991] \circ [9; 0,934] \\ [2,5; 0,991] \circ [8,6; 0,9486] \\ [4; 0,9973] \circ [7; 0,925] \\ [4; 0,9973] \circ [6,9; 0,9254] \\ [5; 0,9992] \circ [5,3; 0,9024] \\ [6,2; 0,9998] \circ [2,5; 0,846] \\ [7,3; 0,9999] \circ [0; 0,81] \end{array} \right\} = \text{max} \left\{ \begin{array}{l} [12; 0,8749] \\ [12,1; 0,9291] \\ [11,5; 0,9338] \\ [11,5; 0,9256] \\ [11,1; 0,9401] \\ [11; 0,9225] \\ [10,9; 0,9229] \\ [10,3; 0,9017] \\ [8,7; 0,8458] \\ [7,3; 0,8099] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [12,1; 0,9291] \\ [11,5; 0,9338] \\ [11,1; 0,9401] \end{array} \right\}$$

и $x_1^*(6) = \{1,2\}$

Двухкритериальная задача распределения средств

Векторно оптимальные решения

Недоминируемый вектор оценок	Корректное решение
[12,1; 0,9291]	$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$
[11,5; 0,9338]	$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$
[11,1; 0,9401]	$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 2$

Резюме

Ключевые слова

- Многошаговые процессы принятия решений
- переменные состояния
- решающие переменные
- Функция перехода
- Доходы (убытки) каждого этапа
- Критериальная функция
- Стратегия
- Оптимальная стратегия
- Оптимальная реализация процесса
- Декомпозиция
- Принцип оптимальности Беллмана
- Векторная версия принципа оптимальности Беллмана

Можно отдыхать!