



Uniwersytet  
Ekonomiczny  
w Katowicach



blisko

międzynarodowo



przez całe życie

# Własności wybranych testów istotności w modelowaniu szeregów czasowych

**Krzysztof Szymoniak-Książek**

**Wydział Zarządzania**

**Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki**

Katowice, 02.10.2019

# Plan wystąpienia

- Cel prezentacji
- Modele typu GARCH
- Plan symulacji
- Analiza empiryczna i wyniki badań
- Podsumowanie

# Cel prezentacji

- Celem prezentacji jest zbadanie własności testów istotności parametrów modeli typu GARCH w kontekście pakietów *fGarch* oraz *rugarch* w środowisku *R*.
- W tym celu zostały obliczone empiryczne prawdopodobieństwa odrzucenia dla testu t-Studenta, czyli odsetki odrzuceń hipotezy zerowej w przypadku, gdy jest ona prawdziwa.

# GARCH(1,1)

- Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $(\eta_t)$  o tym samym rozkładzie, zerowej średniej oraz wariancji równej 1.
- Wówczas ciąg zmiennych losowych  $(e_t)$  nazywamy procesem GARCH(1,1), jeżeli:

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, & e_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, & & \omega, \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

# EGARCH(1,1)

- Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $(\eta_t)$  o tym samym rozkładzie, zerowej średniej oraz wariancji równej 1.
- Wówczas ciąg zmiennych losowych  $(e_t)$  nazywamy procesem EGARCH(1,1), jeżeli:

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, & e_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \log \sigma_t^2 = \omega + \alpha \eta_{t-1} + \gamma (|\eta_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}) + \beta \log \sigma_{t-1}^2, & \alpha, \beta \neq 0 \end{cases}$$

# APARCH(1,1)

- Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $(\eta_t)$  o tym samym rozkładzie, zerowej średniej oraz wariancji równej 1.
- Wówczas ciąg zmiennych losowych  $(e_t)$  nazywamy procesem APARCH(1,1), jeżeli:

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, & e_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t^\delta = \omega + \alpha(|e_{t-1}| - \gamma e_{t-1})^\delta + \beta \sigma_{t-1}^\delta, & \delta, \alpha, \beta > 0, & |\gamma| \leq 1 \end{cases}$$

# TGARCH(1,1)

- Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $(\eta_t)$  o tym samym rozkładzie, zerowej średniej oraz wariancji równej 1.
- Wówczas ciąg zmiennych losowych  $(e_t)$  nazywamy procesem TGARCH(1,1), jeżeli:

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, & e_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t = \omega + \alpha \sigma_{t-1} (|\eta_{t-1}| - \gamma \eta_{t-1}) + \beta \sigma_{t-1}, & \alpha, \beta \neq 0 \end{cases}$$

# GJR-GARCH(1,1)

- Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $(\eta_t)$  o tym samym rozkładzie, zerowej średniej oraz wariancji równej 1.
- Wówczas ciąg zmiennych losowych  $(e_t)$  nazywamy procesem GJR-GARCH(1,1), jeżeli:

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t, & e_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \gamma \mathbf{1}_{\{e_{t-1} < 0\}} e_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, & \alpha, \beta \neq 0 \end{cases}$$



# Plan symulacji

Symulacja została przeprowadzona w następujących krokach:

- Generowanie realizacji szeregu czasowego z wykorzystaniem modelu typu GARCH z góry ustalonymi parametrami (1000 kolejnych obserwacji) w przypadku, gdy hipoteza zerowa jest prawdziwa. Co najmniej jeden z parametrów jest zerowy.
- Zastosowanie procedury estymacji parametrów tego samego modelu typu GARCH do danych z punktu pierwszego.
- Weryfikacja hipotezy zerowej mówiącej, że wybrany parametr jest zerowy przy wartościach parametrów odpowiadających hipotezie zerowej. Poziom istotności – 5%.
- Powtórzenie trzech pierwszych kroków K razy.
- Obliczenie empirycznego prawdopodobieństwa odrzucenia, czyli odsetek odrzuceń hipotezy zerowej w przypadku, gdy jest ona prawdziwa.

# Analiza empiryczna – GARCH(1,1)

Table 1: GARCH - parameters

K	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$
10000	0	0.01	0.8, 0.81, ..., 0.99	0

$$H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

# Analiza empiryczna – GARCH(1,1)

## Pakiet fGARCH

Table 2: GARCH - empirical rejection probabilities(in percents) - *fGarch*

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
p(%)	0.41	0.48	0.27	0.31	0.32	0.48	0.43	0.36	0.36	0.32
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
p(%)	0.28	0.35	0.32	0.25	0.33	0.25	0.27	0.25	0.31	0.26

Table 3: GARCH - number of model fit failures - *fGarch*

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
M	1501	1514	1563	1641	1657	1601	1648	1746	1758	1752
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
M	1767	1801	1886	1873	1896	1880	1900	1966	1916	2020

# Analiza empiryczna – GARCH(1,1)

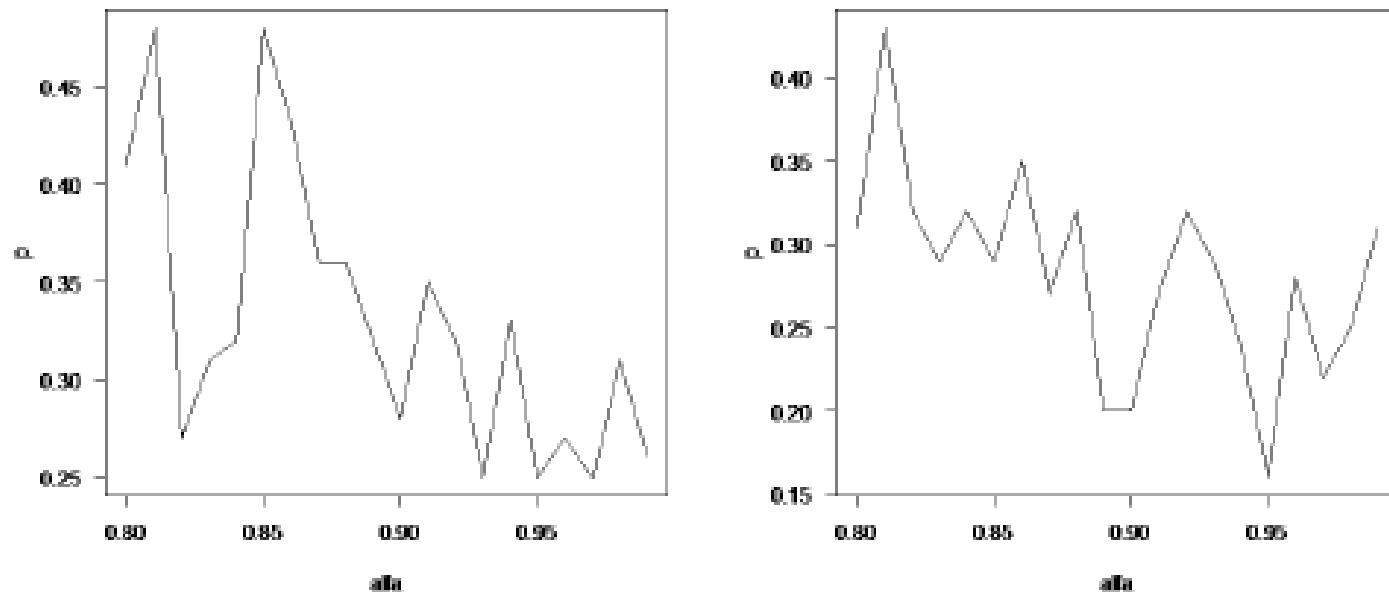
## Pakiet *rugarch*

Table 4: GARCH - empirical rejection probabilities (in percents) - *rugarch*

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
p(%)	0.31	0.43	0.32	0.29	0.32	0.29	0.35	0.27	0.32	0.20
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
p(%)	0.20	0.27	0.32	0.29	0.24	0.16	0.28	0.22	0.25	0.31

# Analiza empiryczna – GARCH(1,1)

Figure 1: GARCH - empirical rejection probabilities (in percents)



# Analiza empiryczna – EGARCH(1,1)

Table 5: EGARCH - parameters

K	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
5000	0	0.01	0.8, 0.81, ..., 0.99	0	0

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma \neq 0$$

# Analiza empiryczna – EGARCH(1,1)

Table 6: EGARCH - empirical rejection probabilities (in percents)

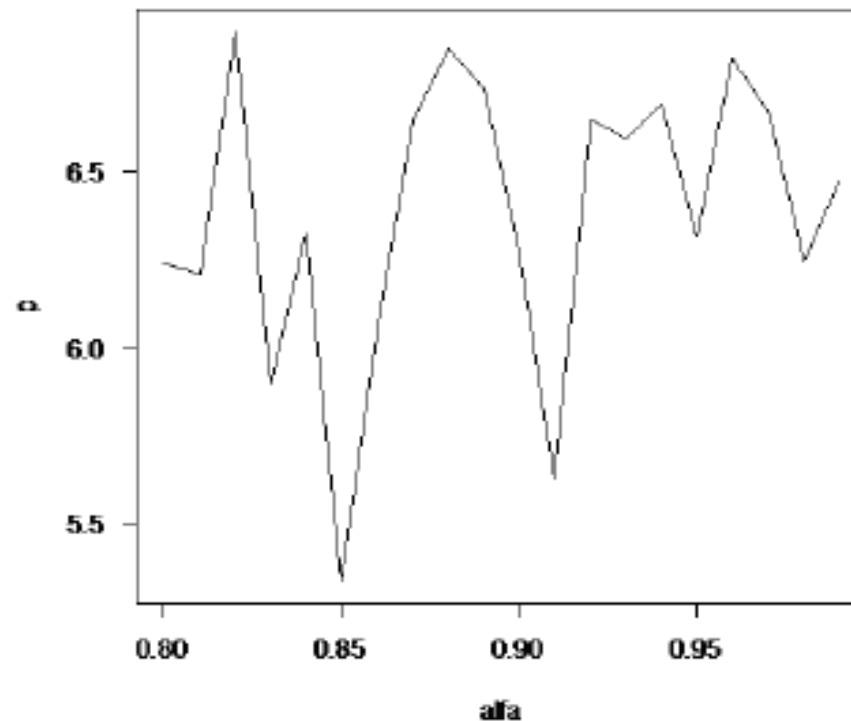
$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
p(%)	6.24	6.21	6.90	5.89	6.32	5.33	6.06	6.65	6.85	6.74
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
p(%)	6.28	5.62	6.64	6.60	6.70	6.32	6.82	6.67	6.24	6.48

Table 7: EGARCH - number of model fit failures

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
M	160	152	172	163	146	163	150	156	122	175
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
M	156	181	154	146	143	155	147	154	146	152

# Analiza empiryczna – EGARCH(1,1)

Figure 2: EGARCH -empirical rejection probabilities (in percents)





# Analiza empiryczna – APARCH(1,1)

Table 8: APARCH - parameters

K	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
5000	0	0.01	0.8, 0.81, ..., 0.99	0	0	2

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma \neq 0$$

# Analiza empiryczna – APARCH(1,1)

Table 9: APARCH - empirical rejection probabilities (in percents)

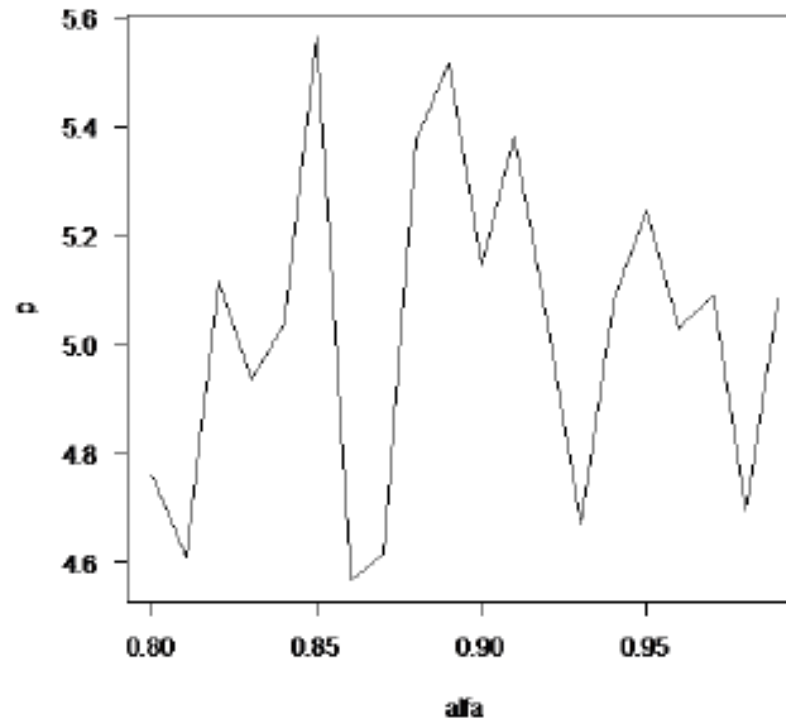
$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
p(%)	4.76	4.61	5.12	4.94	5.04	5.56	4.57	4.62	5.38	5.56
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
p(%)	5.14	5.38	5.03	4.67	5.08	5.24	5.03	5.09	4.69	5.09

Table 10: APARCH - number of model fit failures

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
M	86	98	95	118	95	94	96	82	70	87
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
M	81	75	69	75	61	61	49	49	58	47

# Analiza empiryczna – APARCH(1,1)

Figure 3: APARCH - empirical rejection probabilities (in percents)



# Analiza empiryczna – TGARCH(1,1)

Table 11: TGARCH - parameters

K	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
10000	0	0.01	0.8, 0.81, ..., 0.99	0	0

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma \neq 0$$

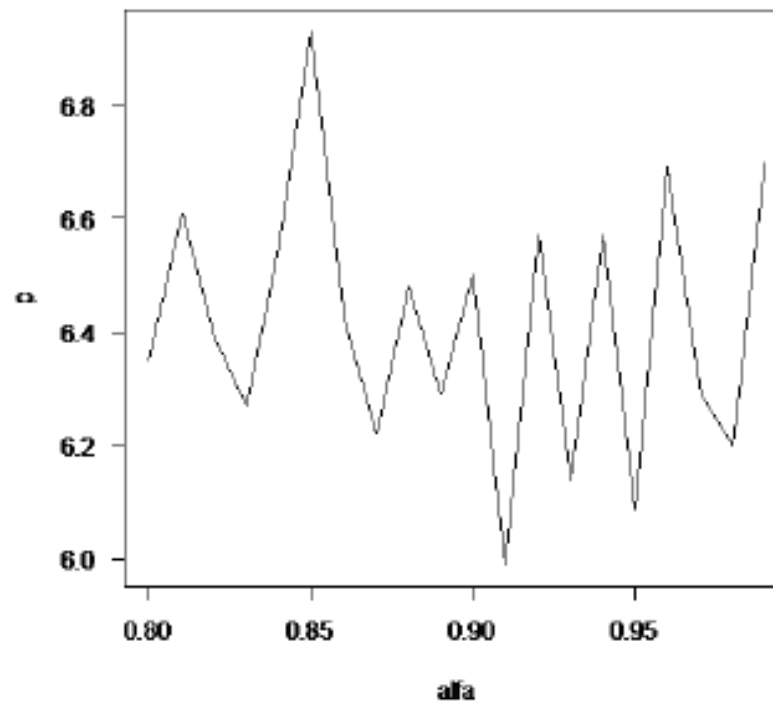
# Analiza empiryczna – TGARCH(1,1)

Table 12: TGARCH - empirical rejection probabilities (in percents)

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
p(%)	6.35	6.61	6.39	6.27	6.55	6.93	6.42	6.22	6.48	6.29
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
p(%)	6.50	5.99	6.57	6.14	6.57	6.09	6.69	6.29	6.20	6.70

# Analiza empiryczna – TGARCH(1,1)

Figure 4: TGARCH - empirical rejection probabilities (in percents)



# Analiza empiryczna – GJR-GARCH(1,1)

Table 13: GJR-GARCH - parameters

K	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
10000	0	0.01	0.8, 0.81, ..., 0.99	0	0

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma \neq 0$$

# Analiza empiryczna – GJR-GARCH(1,1)

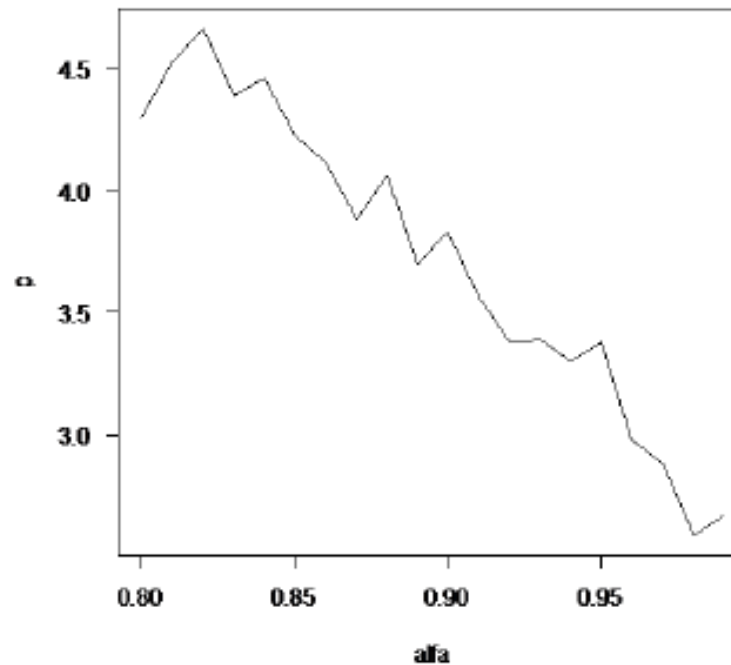
Table 14: GJR-GARCH - empirical rejection probabilities (in percents)

$\alpha$	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
p(%)	4.30	4.53	4.66	4.39	4.46	4.23	4.11	3.88	4.06	3.70
$\alpha$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
p(%)	3.83	3.57	3.38	3.39	3.30	3.38	2.98	2.88	2.59	2.67



# Analiza empiryczna – GJR-GARCH(1,1)

Figure 5: GJR-GARCH - empirical rejection probabilities (in percents)

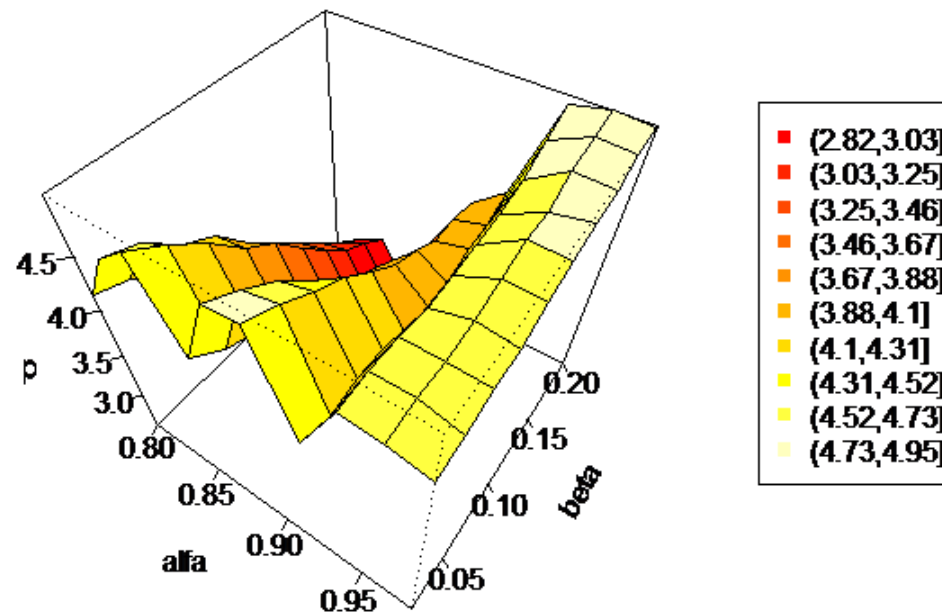


# Analiza empiryczna – GJR-GARCH(1,1)

Table 15: GJR-GARCH - empirical rejection probabilities (in percents)

$\beta \backslash \alpha$	0.8	0.82	0.84	0.86	0.88	0.9	0.92	0.94	0.96	0.98
0.02	4.16	4.07	3.80	3.68	3.51	3.31	3.19	2.97	2.80	2.63
0.04	4.64	4.54	4.31	4.17	3.88	3.67	3.44	3.23	3.01	2.84
0.06	4.85	4.68	4.48	4.21	4.04	3.76	3.52	3.30	3.17	3.00
0.08	4.15	3.93	3.83	3.60	3.42	3.19	2.96	2.79	2.67	2.57
0.10	4.81	4.66	4.49	4.24	4.00	3.80	3.68	3.50	3.35	3.30
0.12	4.86	4.73	4.58	4.45	4.26	4.09	4.00	3.86	3.87	3.84
0.14	4.02	3.93	3.97	3.97	3.82	3.84	3.84	3.94	3.96	4.07
0.16	4.60	4.61	4.59	4.54	4.56	4.57	4.60	4.68	4.80	4.91
0.18	4.59	4.62	4.59	4.64	4.70	4.77	4.76	4.87	4.94	4.97
0.2	4.53	4.55	4.59	4.60	4.69	4.76	4.82	4.86	4.93	4.95

# Analiza empiryczna – GJR-GARCH(1,1)



# Podsumowanie

- W wielu przypadkach empiryczne prawdopodobieństwa odrzucenia różnią się od zakładanego poziomu istotności.
- W modelach asymetrycznych testowano istotność parametru  $\gamma$ , którego niezerowa wartość implikuje asymetrię.
- Empiryczne prawdopodobieństwa odrzucenia dla parametru  $\gamma$  wahają się w okolicach wymaganych 5%.
- W modelu GJR-GARCH można zaobserwować malejący trend empirycznych prawdopodobieństw odrzucenia.
- Największe odchylenie od zakładanego poziomu istotności występuje w klasycznym modelu GARCH

# Literatura

- BOLLERSLEV, T. (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*, 31: 307–327.
- DING, Z., GRANGER, C.W.J., ENGLE, R.F. (1993) *A long memory property of stock market returns and a new model*. *Journal of Empirical Finance*, 1(1): 83–106.
- FRANCQ, C., ZAKOIAN, J.M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, John Wiley & Sons Ltd.
- GHALANOS, A. (2018). Introduction to the rugarch package (Version 1.3-8). [online][access: 13.02.2019], url:[https://cran.r-project.org/web/package/rugarch/vignettes/Introduction\\_to\\_the\\_rugarch\\_package.pdf](https://cran.r-project.org/web/package/rugarch/vignettes/Introduction_to_the_rugarch_package.pdf)
- GLOTSEN, L.R., JAGANNATHAN, R., RUNKLE, D.E. (1993). *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*. *Journal of Finance*, 48(5): 1779–1801.
- NELSON, D.B. (1991). *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*. *Econometrica*, 59(2): 347–70.
- RACHEV, S., MITTNIK, S., FABOZZI, F., FOCARDI, S., JASIC, T. (1997). *Financial Econometrics*, John Wiley & Sons Ltd.
- ZAKOIAN, J.M. (1994). *Threshold heteroskedastic models*. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5): 931–955.



Uniwersytet  
Ekonomiczny  
w Katowicach

[www.ue.katowice.pl](http://www.ue.katowice.pl)