Tadeusz Janaszak

QUOTUS I RÓŻNICZKA

Nazwy „różniczka" używa się często zarówno w matematyce teoretycznej, jak i jej zastosowaniach. Termin „rachunek różniczkowy i całkowy" jest synonimem terminu „analiza matematyczna". Trudności zaczynają się pojawiać, gdy zapytamy: co to jest różniczka? Odpowiedzi pada zazwyczaj kilka, ale niełatwo w sposób jednoznaczny ustalić obowiązującą definicję tego obiektu, oznaczanego zazwyczaj symbolem dx lub dy. Ponad wszelką wątpliwość nazwa „różniczka" wywodzi się od terminu „różnica", który oznacza zarówno działanie odejmowania, jak i wynik takiego działania. Skoro zatem nie ma powszechnej zgody co do tego, czy różnica to działanie odwrotne do działania dodawania, a więc funkcja dwuargumentowa, czy też wynik tego działania na parze argumentów, a więc liczba, trudno się spodziewać, że terminowi „różniczka" będzie odpowiadać jeden dokładnie sprecyzowany obiekt matematyczny. Z całą pewnością można ustalić, że zarówno symbole dx i dy, jak i nazwa różniczki w wielu europejskich językach wywodzą się od łacińskiego terminu *differentia* – różnica. W niniejszej pracy nie zamierzamy rozwikłać talmudycznego zagadnienia czym jest, a czym nie jest różniczka, lecz opierając się na tradycyjnym znaczeniu tego terminu rozwinąć je tak, aby dotyczyło nie tylko działania odejmowania, które jest odwrotne do dodawania, lecz również działania dzielenia, które jest odwrotne do mnożenia. Na podobieństwo różniczki wprowadzimy symbol qx, który będziemy nazywać *quotus*[*], co po łacinie oznacza iloraz.

1. Przyrost addytywny i multiplikatywny

Załóżmy, że dana jest liczba rzeczywista x. Wartości tej nadajemy przyrost. Można to uczynić na dwa sposoby: addytywny – przez dodanie do niej liczby dx należącej do otoczenia zera, lub multiplikatywny – przez pomnożenie

[*] Czytaj: kwotus.

jej przez liczbę qx należącą do otoczenia jedynki. Można również przyjąć, że symbol dx przebiega addytywną grupę liczb rzeczywistych, a symbol qx multiplikatywną grupę liczb rzeczywistych dodatnich. Zauważmy, że zero jest neutralnym elementem dodawania, a jedynka neutralnym elementem mnożenia. Stąd wynika, że $x + dx = x$ dla dx równego zero oraz $x \cdot qx = x$ dla qx równego jeden.

W matematyce teoretycznej rozpatruje się na ogół liczby niemianowane. W dyscyplinach, które stosują metody matematyki, liczby oznaczają pewne wielkości, badane na terenie danej dyscypliny, i prawie zawsze obdarzone są mianem, a zatem, jeśli wielkość x ma pewne miano, to przyrost addytywny dx ma to samo miano co wielkość x, a w razie, gdy zmiennej mianowanej x nadajemy przyrost multiplikatywny qx, wówczas przyrost ten jest liczbą niemianowaną; tak więc wielkości $x + dx$ oraz $x \cdot qx$ mają identyczne miano ze zmienną x.

Załóżmy, że przyrosty multiplikatywny qx i addytywny dx zostały tak dobrane, że zachodzi równość:

$$x + dx = x \cdot qx \tag{1}$$

Stąd otrzymujemy równości:

$$dx = x \cdot (qx - 1) \tag{2}$$

oraz:

$$qx = 1 + \frac{dx}{x} \tag{3}$$

Wielkość $\frac{dx}{x}$ jest liczbą niemianowaną. Pomnożona przez 100% zyskuje miano (procent). Mówi się wówczas o procentowym przyroście przy podstawie x. Przyrost multiplikatywny qx nazywa się czasem **krotnością** wielkości x. Nazwa „krotność” jest zrozumiała w języku potocznym, jeśli przyrost multiplikatywny qx jest liczbą całkowitą*. W wypadku, gdy przyrost ten jest liczbą ułamkową, niewiele różniącą się od jedynki, wówczas wyrażenie „krotność” jest mało zrozumiałe. Wygodniej wtedy mówić o przyroście multiplikatywnym w ujęciu procentowym**. Przy stosowaniu odczytu procentowego używa się terminologii addytywnej***, jednakże chodzi o przyrost multiplikatywny.

* Jeśli qx = 2,3,4,..., to mówimy, że wielkość x została powiększona 2-krotnie, 3-krotnie, 4-krotnie itd.

** Jeśli qx = 1,20, to mówimy o 20% wzroście, a gdy qx = 0,80, mówimy o 20% spadku. Odczytywanie przyrostu multiplikatywnego za pomocą procentów jest często nadużywane. Zamiast mówić np. o wzroście 4-krotnym, mówi się czasami o wzroście 300%, co jest mało zrozumiałe. Popełnia się tu często błąd i wzrost 4-krotny oddaje się wyrażeniem: wielkość wzrosła o 400%, co jest oczywiście wzrostem 5-krotnym.

*** Mówi się: wielkość wzrosła o 20%.

2. Asymptotyka przyrostów

Równości (2) i (3) możemy traktować jako funkcje. Wzór (2) wyraża zmienną dx jako funkcję zmiennej qx, a wzór (3) funkcję do niej odwrotną, gdzie zmienna qx jest funkcją zmiennej dx. W obu wypadkach zmienną x traktujemy jako parametr. Rozważmy parę wzajemnie odwrotnych funkcji:

$$dx = x \cdot \ln(qx) \tag{4}$$

oraz:

$$qx = \exp\left(\frac{dx}{x}\right) \tag{5}$$

Z analizy matematycznej wynika, że funkcje (2) i (4) są styczne dla zmiennej qx równej jeden, a funkcje (3) i (5) są styczne dla zmiennej dx równej zero. Fakt ten można zapisać za pomocą równości przybliżonych:

$$x \cdot (qx - 1) \approx x \cdot \ln(qx) \tag{6}$$

oraz:

$$1 + \frac{dx}{x} \approx \exp\left(\frac{dx}{x}\right) \tag{7}$$

Równości asymptotyczne (6) i (7) zapisują się jako równości dokładne z użyciem reszt, a mianowicie:

$$x \cdot (qx - 1) = x \cdot \ln(qx) + \lambda(qx) \tag{8}$$

$$1 + \frac{dx}{x} = \exp\left(\frac{dx}{x}\right) \cdot \omega(dx)^{*} \tag{9}$$

Reszta występująca we wzorze (8) jest równa różnicy wyrażeń występujących po prawej stronie wzorów (2) i (4), a reszta ze wzoru (9) jest ilorazem prawych stron wzorów (3) i (5). Reszta $\lambda(qx)$ zmierza do zera wraz z logarytmem naturalnym zmiennej qx, a logarytm naturalny reszty $\omega(dx)$ zmierza do zera wraz ze zmienną dx (szerzej zob. Janaszak, 2003). Przyrost multiplikatywny qx można zastąpić w przybliżeniu przyrostem addytywnym dx, przy czym oba przyrosty są związane wzorem (4); na odwrót: przyrost addytywny dx zastępuje się w sposób przybliżony przyrostem multiplikatywnym za pomocą

* Tradycyjnie resztę zapisuje się przy użyciu działania dodawania, jednakże można ją również zapisać w postaci mnożenia. Na możliwość taką wskazał prof. A Smoluk podczas dyskusji z autorem.

wzoru (5). Można postawić pytanie: dlaczego dla równości asymptotycznych wybrano funkcję logarytmiczną – wzór (4) i wykładniczą – wzór (5)? Odpowiedź jest prosta. Funkcja logarytmiczna zamienia iloczyn na sumę, a funkcja wykładnicza odwrotnie – sumę na iloczyn. W języku algebry mówi się, że logarytm i funkcja wykładnicza są wzajemnie odwrotnymi homomorfizmami grupy multiplikatywnej i addytywnej zbioru liczb rzeczywistych.

3. Zależność funkcyjna zmiennych

Załóżmy, że mamy dwie zmienne x i y połączone ze sobą zależnością funkcyjną $y = f(x)$. Znowu możemy powtórzyć uwagi o mianach przysługujących obu zmiennym na terenie dyscyplin wykorzystujących matematykę do swoich celów badawczych. Zwykle zmienna niezależna x ma inne miano niż zmienna zależna y.

Zmienna x może np. oznaczać czas, a zmienna y – wolumen produkcji w odcinku czasu mierzonego od momentu zero do momentu x. Iloraz y/x oznacza wówczas średnią intensywność produkcji w danym odcinku czasu, natomiast iloraz dy/dx – intensywność produkcji w momencie x.

Jeśli zmienna y nie oznacza wolumenu produkcji, lecz jej intensywność w momencie x, to iloczyn ydx oznacza wolumen produkcji w odcinku czasu zaczynającym się w momencie x i kończącym się w momencie $x+dx$. W matematycznych rozważaniach miana przysługujące zmiennym na ogół się pomija.

Nadajmy zmiennej niezależnej przyrost addytywny dx. Addytywny przyrost zmiennej zależnej wyrazi się wówczas różnicą:

$$f(x+dx)-f(x) \tag{10}$$

Przyrost multiplikatywny zmiennej zależnej wyraża się ilorazem:

$$\frac{f(x+dx)}{f(x)} \tag{11}$$

Jeśli zmiennej niezależnej nadamy przyrost multiplikatywny qx, to przyrost addytywny zmiennej zależnej wyrazi się różnicą:

$$f(x \cdot qx)-f(x) \tag{12}$$

a przyrost multiplikatywny ilorazem:

$$\frac{f(x \cdot qx)}{f(x)} \tag{13}$$

4. Części główne przyrostów funkcji

Klasyczny rachunek różniczkowy polega na lokalnym wyodrębnieniu głównej części *dy* przyrostu addytywnego zmiennej objaśnianej* w zależności od przyrostu addytywnego *dx* zmiennej objaśniającej. Przez część główną rozumie się funkcję liniową** daną wzorem:

$$dy = a \cdot dx \tag{14}$$

styczną w punkcie 0 do funkcji zmiennej *dx* danej wzorem (10). Współczynnik *a*, występujący we wzorze (14), nazywa się **pochodną** funkcji *f* w punkcie *x*, czyli jest $a = f'(x)$. W klasycznej analizie matematycznej styczność przyrostu (10) i jego część główną (14) zapisuje się z użyciem reszty *o*-małe:

$$f(x + dx) - f(x) = a \cdot dx + o(dx) \tag{15}$$

Zgodnie ze wzorem (4), wstawmy do równości (14) w miejsce zmiennej *dy* wyrażenie *y ln(qy)*. Otrzymujemy powiązanie funkcyjne:

$$y \cdot \ln(qy) = a \cdot dx \tag{16}$$

czyli:

$$qy = \exp(b \cdot dx) \tag{17}$$

gdzie $b = \frac{a}{y}$.

W miejsce zmiennej *dx* wstawiamy do wzoru (14) prawą stronę równości (4). Dostajemy funkcję:

$$dy = c \cdot \ln(qx) \tag{18}$$

gdzie $c = a \cdot x$.

Dokonując operacji, które prowadzą do wzorów (16) i (18), po obu stronach równości (14) dostajemy jednocześnie zależność funkcyjną:

$$y \cdot \ln(qy) = a \cdot x \cdot \ln(qx) \tag{19}$$

---

* Termin „zmienna objaśniana” traktujemy jako synonim terminu „zmienna zależna”, a termin „zmienna objaśniająca” jako synonim terminu „zmienna niezależna”.

** Ponieważ w dalszej części pojawią się części główne wyrażane funkcjami wykładniczymi, logarytmicznymi i potęgowymi, funkcję (14)y będziemy w tym opracowaniu nazywać liniową częścią główną.

czyli:

$$qy = qx^{w} \tag{20}$$

gdzie $w = \dfrac{a \cdot x}{y}$.

Konstrukcję analogiczną do klasycznej można przeprowadzić dla przyrostów głównych danych wzorami (11), (12) i (13).

Część główna qy przyrostu multiplikatywnego zmiennej objaśnianej obliczana w zależności od przyrostu addytywnego dx zmiennej objaśniającej, danego wzorem (11), wyraża się funkcją wykładniczą (17). Warunek styczności przyrostu (11) i jego wykładniczej części głównej (17) zapiszemy z użyciem reszty ω-mała:

$$\frac{f(x+dx)}{f(x)} = \exp(b \cdot dx) \cdot \omega(dx) \tag{21}$$

Współczynnik b występujący we wzorze (21) jest nazywany w literaturze ekonomicznej **pochodną logarytmiczną** funkcji f w punkcie x. Nazwa pochodna logarytmiczna wzięła się stąd, że współczynnik b jest równy ilorazowi pochodnej danej funkcji $f'(x)$ i jej wartości $f(x)$, czyli $b = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, a to wyrażenie jest z kolei równe pochodnej logarytmu rozpatrywanej funkcji: $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Analiza znaczenia współczynnika b prowadzi do wniosku, że stosowniejszą byłaby nazwa **pochodna wykładnicza**, gdyż liczba ta jest współczynnikiem wyznaczającym styczną wykładniczą dla danej funkcji f (por. Janaszak, 2003).

Część główna dy przyrostu addytywnego zmiennej objaśnianej obliczana w zależności od przyrostu multiplikatywnego qx zmiennej objaśniającej, danego wzorem (12), wyraża się funkcją logarytmiczną (18). Warunek styczności przyrostu (12) i jego logarytmicznej części głównej (18) zapiszemy z użyciem reszty λ-mała:

$$f(x \cdot qx) - f(x) = c \cdot \ln(qx) + \lambda(qx) \tag{22}$$

Współczynnik c wyznacza funkcję logarytmiczną styczną do rozpatrywanej funkcji f. Powinien zatem nosić nazwę pochodnej logarytmicznej. Ponieważ nazwa ta już przyjęła się dla współczynnika b, współczynnik c nazywamy pochodną λ-logarytmiczną. Zachodzi zatem równość $c = x \cdot f'(x)$.

Potęgową częścią główną qy przyrostu multiplikatywnego zmiennej objaśnianej liczonej w zależności od przyrostu multiplikatywnego zmiennej objaśniającej, danego wzorem (13), jest funkcja potęgowa (20). Przyrost (13) funkcji f i jego potęgowa część główna są styczne, a warunek styczności jest dany przez resztę π-małe.

$$\frac{f(x \cdot qx)}{f(x)} = qx^{w} \cdot \pi(qx) \tag{23}$$

Współczynnik w jest równy $\frac{x}{y} \cdot f'(x)$ i w literaturze ekonomicznej nosi nazwę elastyczności.

5. Reszty wyznaczające styczność

W definicjach styczności posłużyliśmy się symbolami o-małe, ω -mała, λ-mała i π-małe. Symbole te oznaczają klasy funkcji o określonych własnościach. Wygodnie jest jednak operować tymi symbolami jako funkcjami, których wartości nie są dokładnie znane, lecz znana jest ich asymptotyka. W klasycznej analizie powszechnie znany jest pierwszy z tych symboli. Trzy pozostałe zostały opisane w pracy Janaszaka (2003). Aby ułatwić śledzenie treści opracowania, zapiszemy własności wszystkich czterech symboli: **(pierwszy zestaw wzorów – własności symboli określających styczność)**:

– $\lim \frac{o(dx)}{dx} = 0$,

– $\lim \frac{\ln \omega(dx)}{dx} = 0$,

– $\lim \frac{\lambda(qx)}{\ln(qx)} = 0$,

– $\lim \frac{\ln \pi(qx)}{\ln(qx)} = 0$.

Granice są obliczane dla zmiennej dx dążącej do zera* i zmiennej qx dążącej do jedynki**.

* Zero jest elementem neutralnym grupy multiplikatywnej.
** Jedynka jest elementem neutralnym grupy multiplikatywnej.

6. Zależności między częściami głównymi

We wzorach (15), (21), (22) i (23) wyodrębniliśmy części główne przyrostów funkcji; są nimi odpowiednio: część liniowa zależna od współczynnika *a*, część wykładnicza zależna od współczynnika *b,* część logarytmiczna wyznaczona przez współczynnik *c* oraz część potęgowa zależna od współczynnika *w.* Współczynniki *a, b, c* i *w* są liczbami rzeczywistymi. W pracy Janaszaka (2003) wykazano, że możliwość wyodrębnienia jednej z czterech części głównych implikuje możliwość wyodrębnienia trzech pozostałych **(drugi zestaw wzorów – zależności między współczynnikami części głównych przyrostów funkcji)**:

– $a = a,\quad a = b \cdot y,\quad a = c \cdot \frac{1}{x},\quad a = w \cdot \frac{y}{x},$

– $b = \frac{a}{y},\quad b = b,\quad b = c \cdot \frac{1}{x \cdot y},\quad b = \frac{w}{x},$

– $c = a \cdot x,\quad c = b \cdot x \cdot y,\quad c = c,\quad c = w \cdot y,$

– $w = a \cdot \frac{x}{y},\quad w = b \cdot x,\quad w = c \cdot \frac{1}{y},\quad w = w.$

Części główne są homomorfizmami ciągłymi grupy addytywnej i multiplikatywnej zbioru liczb rzeczywistych.

7. Aproksymacja funkcji za pomocą części głównych przyrostów

Wybierając w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych punkt (x_0, y_0) i przyjmując równość $y_0 = f(x_0)$ możemy dotychczasowe rozważania ująć w następujący sposób **(trzeci zestaw wzorów – aproksymacja funkcji za pomocą głównych części przyrostów)**:

– $dy = a \cdot dx$, skąd $f(x_0 + dx) - y_0 \approx dy$,

– $qy = \exp(b \cdot dx)$, skąd $\dfrac{f(x_0 + dx)}{y_0} \approx qy$,

– $dy = c \cdot \ln(qx)$, skąd $f(x_0 \cdot qx) - y_0 \approx dy$,

– $qy = (qx)^w$, skąd $\dfrac{f(x_0 \cdot qx)}{y_0} \approx qy$,

przy czym znak przybliżonej równości oznacza styczność. Równania homomorfizmów ciągłych grupy addytywnej i multiplikatywnej zbioru liczb rzeczywistych, występujące po lewej stronie zestawu trzeciego, można przedstawić w wyjściowym układzie współrzędnych **(czwarty zestaw wzorów – równania części głównych w wyjściowym układzie współrzędnych)**:

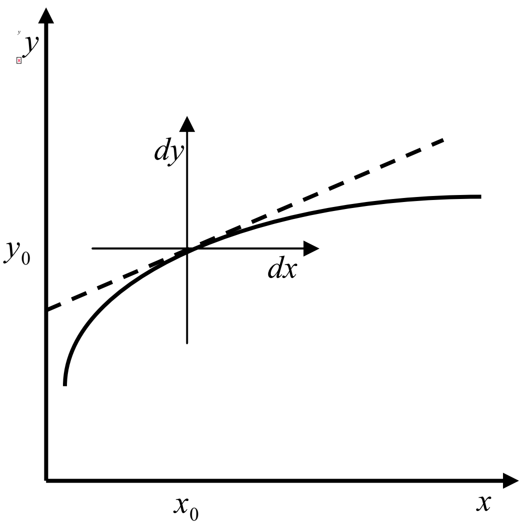
– $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$, czyli $y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$,

– $\dfrac{y}{y_0} = \exp(b(x - x_0))$, czyli $y = y_0 \cdot \exp(b(x - x_0))$,

– $y - y_0 = c \cdot \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$, czyli $y = y_0 + c \cdot \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$,

– $\dfrac{y}{y_0} = \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^w$, czyli $y = y_0 \cdot \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^w$.

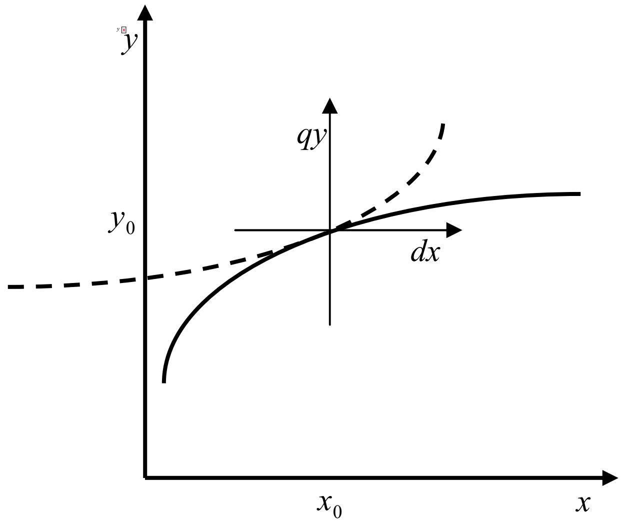
Na czterech kolejnych rysunkach przedstawimy aproksymacje funkcji za pomocą części głównych ich przyrostów, czyli za pomocą ciągłych homomorfizmów grupy addytywnej i multiplikatywnej zbioru liczb rzeczywistych. Zaczniemy od przypadku klasycznego – homomorfizmu ciągłego grupy addytywnej w siebie.



Rys. 1. Aproksymacja procesu za pomocą funkcji liniowej

Linia ciągła na rys. 1 przedstawia wykres procesu*, a linia przerywana – styczną liniową do tego procesu w wybranym punkcie x_0. Pierwszy wzór zestawu czwartego przedstawia równanie linii prostej w układzie współrzędnych: odcięta x, rzędna y. Pierwszy wzór zestawu trzeciego (kolumna lewa) przedstawia równanie tej linii w układzie współrzędnych: odcięta dx, rzędna dy. Liczby dx i dy przebiegają addytywną grupę liczb rzeczywistych. Początek układu współrzędnych: odcięta dx, rzędna dy, znajduje się w punkcie o współrzędnych: odcięta zero, rzędna zero, gdyż liczba zero jest elementem neutralnym działania dodawania. Na osi dx jednostka jest taka sama, jak na osi x, a na osi dy jednostka jest taka sama, jak na osi y. Linia przerywana w układzie współrzędnych x, y jest wykresem **funkcji liniowej**, natomiast w układzie współrzędnych dx, dy jest wykresem **homomorfizmu liniowego****.

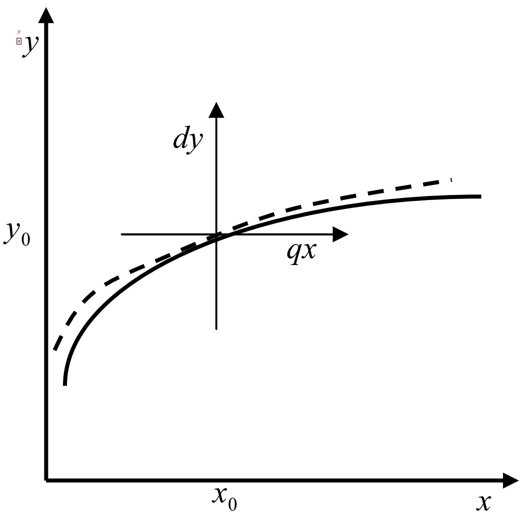
* Termin „proces” jest utożsamiamy z terminem „funkcja”.
** Funkcja liniowa jest sumą stałej i homomorfizmu liniowego.



Rys. 2. Aproksymacja procesu za pomocą funkcji wykładniczej

Linią ciągłą przedstawiono na rys. 2 wykres procesu, linia przerywana jest styczną wykładniczą do tego procesu w punkcie (x_0, y_0). Drugi wzór zestawu czwartego przedstawia równanie stycznej wykładniczej w układzie współrzędnych: odcięta x, rzędna y. Drugi wzór zestawu trzeciego (kolumna lewa) przedstawia równanie linii wykładniczej w układzie współrzędnych: odcięta dx, rzędna qy. Symbol dx przebiega addytywną grupę liczb rzeczywistych, natomiast symbol qy przebiega multiplikatywną grupę liczb rzeczywistych. Początek układu współrzędnych: odcięta dx, rzędna qy, znajduje się w punkcie o współrzędnych: odcięta zero, rzędna jeden, gdyż liczba zero jest elementem neutralnym działania dodawania, a liczba jeden jest elementem neutralnym działania mnożenia. Na osi dx jednostka jest taka sama, jak na osi x. Jednostkę na osi qy stanowi odcinek o długości y_0. Linia przerywana w układzie współrzędnych x, y jest wykresem **funkcji wykładniczej**, natomiast w układzie współrzędnych qx, dy jest wykresem **homomorfizmu wykładniczego**[*].

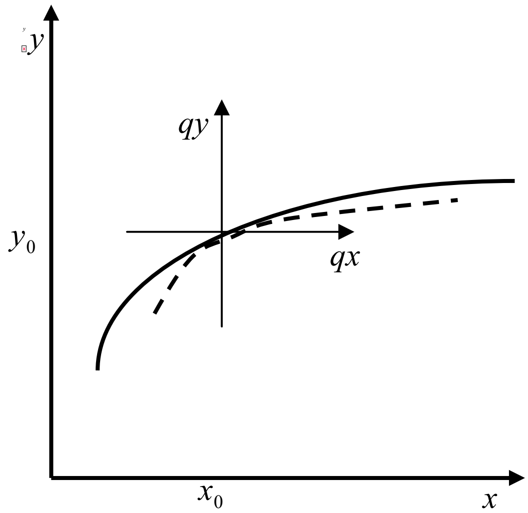
[*] Funkcja wykładnicza jest iloczynem stałej dodatniej i homomorfizmu wykładniczego.



Rys. 3. Aproksymacja procesu za pomocą funkcji logarytmicznej

Na rys. 3 za pomocą linii ciągłej zaznaczono wykres procesu ekonomicznego. Styczną logarytmiczną do tego procesu, w punkcie (x_0, y_0), przedstawiono jako linię przerywaną. Trzeci wzór zestawu czwartego przedstawia równanie stycznej logarytmicznej w układzie współrzędnych: odcięta x, rzędna y. Trzeci wzór zestawu trzeciego (kolumna lewa) przedstawia równanie linii logarytmicznej w układzie współrzędnych: odcięta qx, rzędna dy. Symbol qx przebiega multiplikatywną grupę liczb rzeczywistych, a symbol dy addytywną grupę liczb rzeczywistych. Początek układu współrzędnych: odcięta qx, rzędna dy, znajduje się w punkcie o współrzędnych: odcięta jeden, rzędna zero, gdyż liczba jeden jest elementem neutralnym działania mnożenia, a liczba zero jest elementem neutralnym działania dodawania. Jednostkę na osi qx stanowi odcinek o długości x_0. Na osi dy jednostka jest taka sama, jak na osi y. Linia przerywana w układzie współrzędnych x, y jest wykresem **funkcji logarytmicznej**, natomiast w układzie współrzędnych dx, qy jest wykresem **homomorfizmu logarytmicznego**[*].

[*] Funkcja logarytmiczna jest sumą stałej i homomorfizmu logarytmicznego.



Rys. 4. Aproksymacja procesu ekonomicznego za pomocą funkcji potęgowej

Linia ciągła na rys. 4 obrazuje wykres procesu. Styczną potęgową do tego procesu, w punkcie (x_0, y_0), zaznaczono linią przerywaną. Czwarty wzór zestawu czwartego przedstawia równanie stycznej potęgowej w wyjściowym układzie współrzędnych: odcięta x, rzędna y. Czwarty wzór zestawu trzeciego (kolumna lewa) przedstawia równanie linii potęgowej w układzie współrzędnych: odcięta qx, rzędna qy. Symbole qx i qy przebiegają multiplikatywną grupę liczb rzeczywistych. Początek układu współrzędnych: odcięta qx, rzędna qy, znajduje się w punkcie o współrzędnych: odcięta jeden, rzędna jeden, gdyż liczba jeden jest elementem neutralnym działania mnożenia. Jednostkę na osi qx stanowi odcinek o długości x_0, a na osi qy odcinek o długości y_0. Linia przerywana w układzie współrzędnych x, y jest wykresem **funkcji potęgowej**, natomiast w układzie współrzędnych qx, qy jest wykresem **homomorfizmu potęgowego**[*].

[*] Funkcja potęgowa jest iloczynem stałej dodatniej i homomorfizmu potęgowego.

8. Stałe zależności

Funkcje liniowe zamieniają ciągi arytmetyczne w dziedzinie na ciągi arytmetyczne w przeciwdziedzinie. Funkcje wykładnicze przyporządkowują ciągom arytmetycznym ciągi geometryczne. Z odwrotną sytuacją mamy do czynienia w przypadku funkcji logarytmicznych. Zamieniają one ciągi geometryczne na arytmetyczne. Wreszcie funkcje potęgowe przyporządkowują ciągom geometrycznym ciągi geometryczne. Wszystkie cztery klasy funkcji, które będziemy na użytek opracowania nazywać funkcjami podstawowymi, zachowują się w sposób przewidywalny. Lokalnie są homomorfizmami. Stąd też funkcje te nadają się do lokalnej aproksymacji procesów, które oczywiście nie muszą mieć stałego charakteru, lecz lokalnie procesom można przypisywać własności ich części głównych. Wynika to z zasady styczności procesu i jego części głównej. Zabieg taki stosuje się przy używaniu takich pojęć, jak: tempo wzrostu, stopa procentowa, stopa zwrotu, tempo inflacji, elastyczność podaży i popytu, przychód marginalny, koszt marginalny, marginalna stopa substytucji itp.

W lewej kolumnie trzeciego zestawu wzorów zebrano zależności różniczki i quotusa. Klasycznie różniczką nazywa się pierwszy homomorfizm tego zestawu będący liniową częścią główną. Wyraża on powiązanie między addytywnymi przyrostami zmiennej objaśniającej i objaśnianej. Jeśli dopuścimy przyrosty multiplikatywne i lokalnie nie będziemy chcieli zastępować ich przyrostami addytywnymi, dojdziemy do wyodrębnienia pozostałych trzech części głównych: wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej. Opierając się na dowolnej z tych klas funkcji można skonstruować pojęcia rachunku różniczkowego, analogiczne do konstrukcji klasycznej opartej o funkcje liniowe. Część główną daną wzorem (14) nazywa się wymiennie różniczką, względnie pochodną. Pozostałe trzy części główne nazywane są również pochodnymi (Janaszak, 2003). Część główna dana zależnościami (17) i (21) to **pochodna wykładnicza.** Wzory (18) i (22) dają **pochodną λ-logarytmiczną**[*], a wzory (20) i (23) **pochodną π-potęgową**.

Próbę konstrukcji pojęć rachunku różniczkowego i całkowego za pomocą funkcji wykładniczych podjął Jaśkiewicz (1965)[**].

[*] Nazwa pochodna logarytmiczna ma już ugruntowane znaczenie.
[**] Autor dowiedział się z rozmowy ze śp. rektorem A. Baborskim, że podczas obrony pracy G. Jaśkiewicza w czasie dyskusji jeden z jej uczestników zauważył, iż podobna próba była podjęta przez C.F. Gaussa.

Literatura

Begg D., Dornbusch R., Fischer S.: *Ekonomia. Mikroekonomia*. PWE, Warszawa 2000.

Cartan H.: *Calcul differentiel Formes differentieles.* Herman, Paris 1967.

Fichtenholz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy.* PWN, Warszawa 1966.

Forlicz S., Jasiński M.: *Mikroekonomia.* Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 2000.

Janaszak T.: *Pochodna wykładnicza w matematyce finansowej*. Ekonometria 5. AE, Wrocław 2000a.

Janaszak T.: *Topologie lejków*. Dydaktyka Matematyki 1. AE, Wrocław 2000b.

Janaszak T.: *Uwagi o funkcjach stycznych*. Ekonomia Matematyczna 5. AE, Wrocław 2001.

Janaszak T.: *Równoległy rachunek różniczkowy w badaniach ekonomicznych.* AE, Wrocław 2003.

Jaśkiewicz G.: *Metoda odwzorowań liniowych w analizie układów nieliniowych.* Praca doktorska na Politechnice Wrocławskiej, Wrocław 1965.

Klimczak B.: *Mikroekonomia.* AE, Wrocław 1998.

Kuratowski K.: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej.* PWN, Warszawa 1975.

Samuelson P., Nordhaus W.: *Ekonomia*. PWN, Warszawa 1999.

Smoluk A.: *O definicji pochodnej*. AE, Wrocław 1992.

Smoluk A.: *Algebra* $o(f)$*, czyli jeszcze o lejkach.* Dydaktyka Matematyki 1. AE, Wrocław 2000.

QUOTUS AND DIFFERENTIAL

Summary

In classical calculus for a function, which has a derivative, it is possible to separate the central part of the growth of the function. It is a linear function. In this method as well as in the space of the argument of the function and in the space of the value of the function addition is used. In this paper the multiplication is also taken into account. As a result four versions of the central part of the growth of the function have arisen: linear, exponential, logarithmic and power function.