Mirosław Kulawik

ZASTOSOWANIE ZBIORÓW ROZMYTYCH W JEDNOETAPOWYM PROCESIE PODEJMOWANIA DECYZJI PRZEZ JEDNEGO DECYDENTA

Wstęp

Podejmowanie odpowiednich decyzji jest uzależnione od stopnia wiedzy decydenta o stanach natury oraz jego preferencji. Pomijając na razie problem określenia preferencji decydenta można wyróżnić trzy sytuacje (Heilpern, 2001):

– podejmowanie decyzji w warunkach pewności,
– podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka,
– podejmowanie decyzji w warunkach niepewności.

Sytuacje te różnią się stopniem posiadanej wiedzy o stanach natury. Pierwsza sytuacja występuje dosyć rzadko i zakłada, że wiadomo na pewno, jaki stan natury wystąpi w danym momencie. Druga sytuacja jest możliwa wtedy, gdy można opisać wszystkie potencjalne stany natury oraz oszacować prawdopodobieństwo ich wystąpienia. To prawdopodobieństwo utożsamia się ze stopniem ryzyka w procesie decyzyjnym (Nahotko, 1997). Z trzecią sytuacją można się spotkać, kiedy decydent nie ma pełnej informacji o stanach natury lub nie można określić prawdopodobieństwa ich wystąpienia. Dokonuje się wtedy pewnego przybliżenia, oszacowania na podstawie informacji, które są w posiadaniu (praktycznie nie zdarza się sytuacja, w której nie ma żadnych informacji), czyli buduje się model procesu podejmowania decyzji.

Jest oczywiste, że w sytuacjach niejednoznacznych, mając nawet identyczne informacje, można zbudować wiele różnych modeli. Zależy to głównie od tego, na jak bardzo skomplikowany obliczeniowo model zdecyduje się decydent. Wiąże się to bezpośrednio z kosztami w relacji im bardziej skomplikowany model, tym większe ponosi koszty, oraz informacjami w tym sensie, że im więcej informacji zostanie wykorzystanych do budowy modelu, tym bardziej wzrasta jego złożoność. Widać więc wyraźnie, że należy się dobrze zastanowić nad wyborem narzędzi służących do budowy modelu. Dodatkowo należy pamiętać o tym, że dla decydenta „dobra" decyzja nie zawsze oznacza „idealną" decyzję, tzn. jeżeli znajdziemy „dobrą" decyzję, która spełnia poziom jego oczekiwań, to często koszt znalezienia „lepszej" decyzji przekracza zyski z tego płynące (oczywiście w sensie relacji preferencji decydenta). Na koniec zawsze należy pamiętać o tym, że wraz ze złożonością modelu wzrasta nie tylko koszt jego budowy, ale także błąd obliczeniowy, co w skrajnych wypadkach może prowadzić do fałszywych wyników.

Wobec powyższych faktów można użyć dwóch teorii służących do budowy takiego modelu: teorię rachunku prawdopodobieństwa oraz teorię zbiorów rozmytych. Pierwsza z nich wiąże się z utratą informacji zawartych np. w stwierdzeniach: „mniej więcej", „prawie", „około" itp., ale za to otrzymany model jest znacznie prostszy obliczeniowo niż model zbudowany na podstawie teorii zbiorów rozmytych. Z drugiej strony zbyt nagminne sięganie po zbiory rozmyte i zbytnie „rozmycie" modelu może prowadzić do złych wyników, które są sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem. W rozdziale 1 pokażemy, w jaki sposób zbytnie „rozmycie" modelu prowadzi do wyników sprzecznych z oczekiwanymi.

1. Zbiory rozmyte

Definicja 1

Zbiorem rozmytym A określonym na przestrzeni X nazywa się zbiór uporządkowanych par:

$$A = \{(\mu_A(x), x) : x \in X\} \tag{1}$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją przynależności. Nośnikiem zbioru rozmytego jest zbiór:

$$\operatorname{supp} A = \{x : \mu_A(x) \neq 0\} \tag{2}$$

Funkcja przynależności jest więc pewnym rozszerzeniem funkcji charakterystycznej zbioru z tą różnicą, że każdemu elementowi x przypisana jest wartość liczbowa z przedziału [0,1], która mówi o wiedzy lub przekonaniu, czy element x należy do A. Jeśli $\mu_A(x)=0$, to x na pewno nie należy do A; jeśli $\mu_A(x)=1$, to x z całą pewnością należy do A; jeśli $\mu_A(x)=\frac{1}{2}$, to o przynależności x do A nie można nic powiedzieć. Zbiory nierozmyte często określa się jako ostre.

W przypadku gdy zbiór $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ jest skończony stosuje się notację:

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \quad x_i \neq 0$$

Definicja 2

Zbiór rozmyty A nazywa się normalnym wtedy, gdy istnieje x_0, takie że $\mu_A(x_0)=1$. Oznacza to, że istnieje chociaż jeden element, który na pewno należy do A. Oczywiście jeżeli zbiór rozmyty nie jest normalny, można przeprowadzić jego normalizację przyjmując funkcję przynależności:

$$\overline{\mu}_A(x)=\frac{\mu_A(x)}{\max \mu_A(x)}$$

Definicja 3

Zbiór rozmyty A nazywa się wypukłym, jeśli jego funkcja przynależności spełnia warunek:

$$\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\} \quad \forall x,y \in X \text{ i } \lambda \in [0,1] \tag{3}$$

Definicja 4

Niech A,B będą zbiorami rozmytymi w X. Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B $(A \subseteq B) \Leftrightarrow$ gdy:

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \tag{4}$$

Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B $(A=B)$ $\Leftrightarrow$ gdy:

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x)=\mu_B(x) \tag{5}$$

Dopełnieniem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór $\overline{A}$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{6}$$

Sumą zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \cup B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{7}$$

Przecięciem zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \cap B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{8}$$

Powyższe definicje pochodzą od Zadeha, czasami jednak korzysta się z innych, mniej intuicyjnych (Kacprzyk, 1986; Czogała, Pedrycz, 1980). Szczególnie ważne są pewne definicje sumowania i mnożenia zbiorów rozmytych, nazywane miękkim przecięciem i miękką sumą, w przeciwieństwie do wyżej wymienionych, które czasem nazywa się twardym przecięciem i twardą sumą.

Definicja 5

Niech A, B będą zbiorami rozmytymi w X. Miękkim przecięciem nazywa się zbiór rozmyty AB o funkcji przynależności:

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{9}$$

Miękką sumą nazywa się zbiór rozmyty $A + B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{10}$$

Z punktu widzenia pojęcia zmiennej lingwistycznej ważne są następujące definicje:

Definicja 6

Niech A będzie zbiorem rozmytym w X. Koncentrację A oznaczamy CON(A) i definiujemy jako zbiór rozmyty o funkcji przynależności:

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2 \tag{11}$$

Rozcieńczenie A jest to zbiór rozmyty DIL(A), taki że:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = (\mu_A(x))^{0,5} \tag{12}$$

Intensyfikacja kontrastu INT(A) jest to zbiór rozmyty o funkcji przynależności:

$$\mu_{INT(A)}(x) = \begin{cases} (\mu_A(x))^2 & \forall x \in X : \mu_A(x) < 0,5 \\ (\mu_A(x))^{0,5} & \forall x \in X : \mu_A(x) \geq 0,5 \end{cases} \tag{13}$$

Zmniejszenie kontrastu BLR(A) jest to zbiór rozmyty o funkcji przynależności:

$$\mu_{BLR(A)}(x) = \begin{cases} (\mu_A(x))^{0,5} & \forall x \in X : \mu_A(x) < 0,5 \\ (\mu_A(x))^2 & \forall x \in X : \mu_A(x) \geq 0,5 \end{cases} \tag{14}$$

Mówiąc potocznie: koncentracja wyostrza zbiór rozmyty, a rozcieńczenie go spłaszcza.

Definicja 7

Niech A będzie zbiorem rozmytym w X, a B zbiorem rozmytym w Y. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywa się zbiór $A \times B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \tag{15}$$

Z definicji 7 wynika, że zbiór $A \times B$ jest rozmyty w $X \times Y$.

Definicja 8

Relację dwuargumentową R między dwoma ostrymi zbiorami X i Y definiuje się jako zbiór rozmyty w $X \times Y$, czyli:

$$R = \{(\mu_R(x, y), (x, y)) : x \in X, y \in Y\} \tag{16}$$

W przypadku gdy zbiory X i Y są skończone, można zapisać je jako:

$$R = \sum_{x,y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)} \tag{17}$$

W przypadku zwykłej nierozmytej relacji mówi się, że dwa elementy są ze sobą w relacji lub nie. Natomiast relacja rozmyta określa stopień od 0 do 1, w jakim te dwa elementy są ze sobą w relacji.

Definicja 9

Niech X, Y, Z będą zbiorami ostrymi, R relacją rozmytą w $X \times Y$, a G relacją rozmytą w $Y \times Z$ o funkcjach przynależności odpowiednio $\mu_R(x, y)$ i $\mu_G(y, z)$. Złożeniem typu max-min relacji rozmytych R i G nazywa się relację rozmytą $R \circ G$ w $X \times Z$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{R \circ G}(x, z) = \max_{y \in Y}\{\min\{\mu_R(x, y), \mu_G(y, z)\}\} \quad \forall x \in X, \forall z \in Z \tag{18}$$

Jeżeli zbiory X, Y, Z są nieskończenie wiele wymiarowe, to w powyższym złożeniu bierze się pod uwagę supremum zamiast maksimum. Podobnie jak w przypadku sumowania i mnożenia zbiorów rozmytych, tak i przy składaniu relacji można podać wiele definicji (Kacprzyk, 1986). Definicja 9 jest jednak najczęściej stosowana.

2. Podejmowanie decyzji

Definicja 10

Niech $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ będzie zbiorem stanów natury, $D = \{d_1, d_2, ..., d_m\}$ zbiorem decyzji, $l : D \times S \to R$ funkcją wypłaty, a P rozkładem prawdopodobieństwa określonym na przestrzeni stanów natury:

$$p_j = P(s_j) \tag{19}$$

Wtedy dla każdej decyzji d_i można policzyć średnie wartości oczekiwane E_i:

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} l(d_i, s_j) p_j \tag{20}$$

oraz stosując kryterium maksymalnej wartości oczekiwanej wyznaczyć decyzję optymalną d_0, taką że:

$$E_0 = \max_{i=1,...,m} E_i \tag{21}$$

Powyższa definicja jest dobra tylko w przypadku, gdy decydent chce zmaksymalizować swój zysk, a funkcja wypłaty ściśle odpowiada jego preferencjom, np. kiedy określa ona zysk finansowy, który decydent chce osiągnąć jak najwyższy. W ogólnym przypadku jego oczekiwania mogą być jednak inne, dlatego wprowadza się pojęcia relacji preferencji oraz funkcji użyteczności (Heilpern, 1992; Krawczyk, 1990).

Definicja 11

Niech X będzie zbiorem wartości funkcji wypłaty l, $O \subset X \times X$ relacją preferencji decydenta, taką że jeśli $(x_i, x_j) \in O$, to x_i jest preferowane w stosunku do x_j. Funkcją użyteczności nazywamy funkcję $U : X \to R$, taką że:

1) $(x_i, x_j) \in O \quad \Leftrightarrow \quad U(x_i) > U(x_j)$,
2) $U(\alpha x_i + (1-\alpha)x_j) = \alpha U(x_i) + (1-\alpha)U(x_j)$,
   gdzie $\alpha \in [0,1]$ jest prawdopodobieństwem,
3) jeśli U_1 i U_2 spełniają 1) i 2), to $U_1(x_i) = aU_2(x_i) + b$, $\quad a, b \in R$, $a > 0$.

W sytuacji gdy zbiory S i D są skończone, funkcję użyteczności przedstawia się często w postaci macierzy $U = [u_{ij}]$, gdzie u_{ij} odpowiada użyteczności wynikającej z decyzji d_i, przy stanie natury s_j. Gdy jest określona macierz użyteczności, analiza decyzyjna odbywa się identycznie jak w definicji 10 (do wzoru (20) podstawia się jednak u_{ij} zamiast $l(d_i, s_j)$).

Czasami zdarza się, że nie można jednoznacznie określić zbioru stanów natury za pomocą liczb rzeczywistych lub określonego na nim rozkładu prawdopodobieństwa. Korzysta się wtedy z teorii zbiorów rozmytych.

Do dalszych obliczeń zostanie wykorzystana definicja sumowania miękkiego (10).

Definicja 12

Niech $S = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_S(s_j)}{s_j}$ będzie rozmytym stanem natury,

$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ zbiorem decyzji, a:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

macierzą użyteczności ($u_{ij} \in R$).

Użyteczność rozmytą U_i, wynikającą z podjęcia decyzji d_i, określa się jako zbiory rozmyte:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{U_i}(u_{ij})}{u_{ij}}, \text{ gdzie } \mu_{U_i}(u_{ij}) = \mu_S(s_j) \quad (22)$$

Następnie wprowadza się zbiór:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{supp} U_i$$

oraz:

$$u_{\max} = \max_{Y} u_{ij}$$

Kolejno określa się zbiory rozmyte:

$$U_{im} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{U_{im}}(u_{ij})}{u_{ij}}, \text{ gdzie } \mu_{U_{im}}(u_{ij}) = \frac{u_{ij}}{u_{\max}} \quad (23)$$

oraz:

$$U_{i0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{U_{i0}}(u_{ij})}{u_{ij}}, \text{ gdzie } \mu_{U_{i0}}(u_{ij}) = \min\{\mu_{U_i}(u_{ij}), \mu_{U_{im}}(u_{ij})\} \quad (24)$$

Przez decyzję rozmytą rozumie się zbiór:

$$D^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_{D^*}(d_i)}{d_i}, \text{ gdzie } \mu_{D^*}(d_i) = \max_{j=1,\dots,n} \mu_{U_{i0}}(u_{ij}) \quad (25)$$

Każdej decyzji d_i przyporządkowany jest więc pewien stopień przynależności $\mu_{D^*}(d_i)$. Naturalną regułą jest to, że wybiera się decyzję o najwyższym stopniu przynależności.

W przypadku gdy istnieje wiele stanów rozmytych S_k, można postąpić na dwa sposoby. Pierwszy polega na tym, że dokonuje się pewnej agregacji zbiorów S_k w jeden rozmyty stan natury S; w drugim sposobie dla każdego zbioru S_k przeprowadza się analizę z definicji 12 i wyznacza się nową macierz użyteczności, której elementami są rozmyte użyteczności U_{i0}. Rozwiązanie problemu decyzyjnego z rozmytymi użytecznościami wygląda następująco:

Definicja 13

Niech $S = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_S(s_j)}{s_j}$ będzie rozmytym stanem natury,

$D = \{d_1, d_2, ..., d_m\}$ zbiorem decyzji, a:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & ... & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & ... & U_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ U_{m1} & U_{m2} & ... & U_{mn} \end{bmatrix}$$

rozmytą macierzą użyteczności, której elementy są zbiorami rozmytymi w pewnym zbiorze $P = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$, czyli $U_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\mu_{U_{ij}}(u_k)}{u_k}$.

Użyteczność rozmytą wynikającą z zastosowania decyzji d_i przy rozmytym stanie natury S określa się jako:

$$U_i^1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{U_i^1}(U_{ij})}{U_{ij}}, \text{ gdzie } \mu_{U_i^1}(U_{ij}) = \mu_S(s_j) \tag{26}$$

Zbiory U_i^1 redukuje się do zbiorów U_i^2 w następujący sposób:

$$U_i^2 = \sum_{k=1}^{p} \frac{\mu_{U_i^2}(u_k)}{u_k}, \text{ gdzie } \mu_{U_i^2}(u_k) = \min_j \{\mu_S(s_j), \mu_{U_{ij}}(u_k)\}$$

$$\forall j : s_j \in \operatorname{supp} S \tag{27}$$

Dalej postępuje się identycznie jak w przypadku nierozmytych wartości funkcji użyteczności, tzn. określa się zbiory U_{im}^2 z tą różnicą, że $u_{\max} = \max\limits_{k=1,\ldots,p} u_k$. Następnie porównuje się te zbiory z U_i^2, w wyniku czego określa się zbiory U_{i0}^2 i zgodnie ze wzorem (25) wyznacza się rozmytą decyzję optymalną D^*.

3. Rozwiązanie problemu metodą probabilistyczną

Rozważmy następujący prosty problem decyzyjny. Właściciel niewielkiej piekarni zastanawia się, jak zaplanować wypiek chleba w celu zmaksymalizowania swojego zysku. Jest oczywiste, że kluczową rolę odgrywa tu właściwe określenie popytu i dostosowanie do niego produkcji. Dla uproszczenia przyjął on następującą funkcję wypłaty, która odpowiada jego macierzy użyteczności:

Tabela 1

Dane obliczeniowe

d_i \ s_j	0	20	40	60	80	100
20	-20	10	10	10	10	10
40	-40	-10	20	20	20	20
60	-60	-30	0	30	30	30
80	-80	-50	-20	10	40	40

s_j – popyt,

d_i – wielkość produkcji.

W sytuacji gdy nie są dostępne żadne inne informacje, rozwiązanie zadania jest trywialne. Zakłada się, że każdy ze stanów natury jest jednakowo prawdopodobny i otrzymuje się najwyższe wartości oczekiwane dla decyzji d_1 i d_2 równe $E_{\max} = 5$.

Założmy, że piekarz ma informacje o możliwych stanach natury, pochodzące z różnych źródeł, ale mające jednakową wagę. Są one następujące:

I_1 – popyt wyniesie około 40
I_2 – popyt wyniesie około 60
I_3 – bardzo możliwe, że popyt wyniesie 40

I_4 – popyt wyniesie nieco mniej niż 80
I_5 – popyt wyniesie nieco więcej niż 60
I_6 – popyt wyniesie mniej więcej 60

Wszystkie informacje są jednakowo ważne. Po opuszczeniu „rozmytych" informacji, czyli „około", „mniej więcej", „nieco mniej" i „nieco więcej" otrzymuje się konkretne wskazania: dwa na 40, trzy na 60 i jedno na 80. Biorąc pod uwagę te wskazania, rozkład jednostajny $\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right\}$ zamienia się na rozkład $\left\{0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6},0\right\}$. Zmieniają się też wartości oczekiwane, które są odpowiednio równe $E_1 = 10$, $E_2 = 20$, $E_3 = 20$, $E_4 = 5$. $E_{max} = 20$ dla decyzji d_2 i d_3. Zadanie zostało rozwiązane, mimo pominięcia ważnych informacji rozmytych. Jak bardzo są one ważne, pokaże rozwiązanie zadania, w którym te informacje zostaną uwzględnione. Do jego rozwiązania zostanie wykorzystana teoria zbiorów rozmytych.

4. Rozwiązania z wykorzystaniem teorii zbiorów rozmytych

Najpierw trzeba przedstawić informacje I_k jako odpowiednie zbiory rozmyte, posługując się pojęciem zmiennej lingwistycznej (Kacprzyk, 1986):

$I_1 = 0,5/20+1/40+0,5/60$
$I_2 = 0,5/40+1/60+0,5/80$
$I_3 = 0,25/20+1/40+0,25/60$
$I_4 = 0,5/60+1/80$
$I_5 = 1/60+0,5/80$
$I_6 = 0,71/40+1/60+0,71/80$

Następnie trzeba połączyć wszystkie rozmyte informacje w jeden rozmyty stan natury $S = \sum \frac{\mu_S(s_j)}{s_j}$. Ponieważ wszystkie I_k są jednakowo ważne, można zrobić to w ten sposób, że $\forall s_j \ \mu_S(s_j)$ będzie średnią arytmetyczną z wartości funkcji przynależności I_k. Wtedy:

$$S = 0,125/20+0,535/40+0,708/60+0,452/80 \tag{28}$$

Korzystając z algorytmu przedstawionego w definicji 10 wyznacza się kolejno użyteczności rozmyte U_i wynikające z decyzji d_i:

U_1 = 0,935/10
U_2 = 0,125/-10+0,926/20
U_3 = 0,125/-30+0,535/0+0,84/30
U_4 = 0,125/-50+0,535/-20+0,708/10+0,452/40

zbiory rozmyte U_{im}:

U_{1m} = 0,25/10
U_{2m} = 0/-10+0,5/20
U_{3m} = 0/-30+0/0+0,75/30
U_{4m} = 0/-50+0/-20+0,25/10+1/40

i zbiory U_{i0}:

U_{10} = 0,25/10
U_{20} = 0/-10+0,5/20
U_{30} = 0/-30+0/0+0,75/30
U_{40} = 0/-50+0/-20+0,25/10+0,452/40

Ostatecznie decyzją rozmytą jest zbiór D^* taki, że $\mu_{D^*}(d_i) = \max\limits_{jk}\{\mu_{U_{i0}}(u_{ij})\}$, czyli:

$$D^* = 0{,}25/d_1 + 0{,}5/d_2 + 0{,}75/d_3 + 0{,}452/d_4 \qquad (29)$$

W takiej sytuacji, zgodnie z definicją 10, wybiera się decyzję d_i o najwyższym stopniu przynależności w zbiorze rozmytym D^* (w naszym przykładzie optymalna jest decyzja d_3).

Przy pominięciu rozmytego charakteru informacji I_k, decyzje d_2 i d_3 są nieodróżnialne, natomiast wykorzystując je można zauważyć, że decyzja d_3 jest o wiele lepsza od pozostałych.

W modelu, który został przeanalizowany chodziło o określenie decyzji optymalnej, która maksymalizuje zysk właściciela piekarni. Często jest to właściwa i wystarczająca metoda, jednak nie bierze ona pod uwagę indywidualnych preferencji decydenta. W szczególnym przypadku mogą się one różnić od przyjętych założeń.

Rozpatrzmy następującą sytuację: decydent musiał określić swój poziom zadowolenia za pomocą określeń „niski", „bardzo niski", „średni", „wysoki", „bardzo wysoki". Tabela 1 wygląda teraz następująco:

Tabela 2

Dane obliczeniowe

s_j / d_i	0	20	40	60	80	100
20	N	Ś	Ś	Ś	Ś	Ś
40	BN	N	W	W	W	W
60	BN	BN	N	W	W	W
80	BN	BN	N	Ś	BW	BW

BN – poziom bardzo niski,
N – niski,
Ś – średni,
W – wysoki,
BW – bardzo wysoki.

Przyporządkujmy tym określeniom zbiory rozmyte. Niech:

BN = 1/1+0,36/2

N = 1/1+0,6/2

Ś = 0,4/2+1/3+0,4/4

W = 0,6/4+1/5

BW = 0,36/4+1/5

Postępując zgodnie z definicją 12 wyznacza się kolejno użyteczności rozmyte U_i^1:

U_1^1 = 0,935/Ś

U_2^1 = 0,125/N+0,926/W

U_3^1 = 0,125/BN+0,537/N+0,84/W

U_4^1 = 0,125/BN+0,537/N+0,708/Ś+0,453/BN

oraz zbiory rozmyte U_i^2:

U_1^2 = 0,4/2+0,935+0,4/4

U_2^2 = 0,125/1+0,125/2+0,6/4+0,926/5

U_3^2 = 0,595/1+0,595/2+0,6/4+0,86/5

U_4^2 = 0,595/1+0,757/2+0,708/3+0,616/4+0,453/5

Postępując teraz identycznie jak w przykładzie z ostrymi wartościami funkcji użyteczności, tworzy się zbiory rozmyte U_{im}^2 i porównuje się je z U_i^2. Otrzymane zbiory U_{i0}^2 wyznaczają w konsekwencji rozmytą decyzję:

$$D^*=0,6/d_1+0,926/d_2+0,86/d_3+0,616/d_4 \qquad (30)$$

W tej sytuacji optymalna jest decyzja d_2.

Otrzymany wynik różni się od poprzedniego, kiedy chodziło o zmaksymalizowanie zysku. Wynika to z tego, że dla decydenta wypłaty w wysokości 20 i 30 są jednakowo użyteczne i przypisany jest im taki sam poziom zadowolenia – wysoki.

Wnioski

Podany przykład, mimo że bardzo prosty, pokazuje, jak ostrożnie należy korzystać z teorii zbiorów rozmytych. Zaletą jest wykorzystanie całości informacji zawartych w wyrażeniach werbalnych, które wcześniej były bądź pomijane, bądź przybliżane probabilistycznie. Wadą są skomplikowane obliczenia oraz pokusa nadmiernego rozmycia zadania. W przykładzie chęć uwzględnienia preferencji decydenta spowodowała wybór gorszej, czyli dającej mniejszy zysk decyzji, trudno się jednak spodziewać, że byłby on rzeczywiście zadowolony właśnie z takiej decyzji.

Literatura

Czogała E., Pedrycz W.: *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1980.

Heilpern S.: *Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności.* AE, Wrocław 1992.

Heilpern S.: *Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka i niepewności.* AE, Wrocław 2001.

Kacprzyk J.: *Zbiory rozmyte w analizie systemowej.* PWN, Warszawa 1986.

Krawczyk S.: *Matematyczna analiza sytuacji decyzyjnych.* PWE, Warszawa 1990.

Metody ilościowe w ekonomii. Red. W. Ostasiewicz. AE, Wrocław 1986.

Nahotko S.: *Ryzyko ekonomiczne w działalności gospodarczej.* PWN, Warszawa 1997.

Ostasiewicz W.: *Zastosowanie zbiorów rozmytych w ekonomii.* PWN, Warszawa 1986.

THE USAGE OF THE FUZZY SETS IN THE ONE-STAGE PROCESS OF DECISION MADE BY ONE PERSON

Summary

Mathematics has served man as a tool for describing the reality ever since. This description should be as precise as possible because the conclusions will be drown and decisions will be made on this basis. On the other hand it should be simple, so that the cost of its analysis will not exceed the benefis. The classic model of the decision making does not foresee such situation when a man defines some cases not precisely. For instance he uses such expression as „very", „less", „almost" which we leave up or approach of loosing some information encoded in them. The fuzzy sets, which Zadeh defined in the 60's, help us to describe the reality allowing fuzzy (not sharp) information.

In the following paper I present the appliance of the fuzzy sets in the typical situation according to Zadeh's definition. This approach allows to obtain „better" results, however, in the further stage too much fuzzy may generate „worse" results.