

Monika Miśkiewicz

WYKŁADNIKI LAPUNOWA NA WGPW

Gdy bardzo mała przyczyna, która umyka naszemu postrzeganiu, powoduje znaczący skutek, którego już nie możemy nie zauważyć, mówimy, że rezultat ten jest przypadkowy [...]. Małe różnice w warunkach początkowych mogą być przyczyną bardzo dużych zmian w warunkach końcowych. Mały błąd na początku może spowodować ogromny błąd na końcu.

H. Poincare

Wstęp

Ważną właściwością systemów chaotycznych jest wrażliwość na zmiany warunków początkowych. Miarą tej wrażliwości systemu są liczby zwane wykładnikami Lapunowa (*Lyapunov exponents*). Określają one szybkość rozchodzenia się sąsiednich trajektorii (orbit) w przestrzeni fazowej. Dodatni wykładnik Lapunowa mierzy średnią wykładniczą rozbieżność dwóch najbliższych trajektorii, czyli określa, z jaką prędkością oddalają się od siebie sąsiadujące ze sobą punkty. Natomiast ujemny wykładnik jest miarą kontrakcji i mierzy wykładniczą zbieżność dwóch najbliższych trajektorii, tzn. określa, ile czasu potrzebuje system na powrót do stanu pierwotnego po wcześniejszym jego zaburzeniu. Dla m -wymiarowego systemu dynamicznego istnieje m wykładników Lapunowa, spełniających warunek (Oseledec, 1968):

$$\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1$$

Dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa dowodzi wrażliwości systemu na zmianę warunków początkowych.

W latach 80. pojawiły się różne metody wyznaczania wykładników Lapunowa na podstawie danych doświadczalnych, przy użyciu różnych technik analizy danych. Jednak metody analizy danych, rozwinięte w latach 80., koncentrowały się na bardzo dużych zbiorach danych generowanych w doświadczeniach fizycznych. Mniej uwagi poświęcano oszacowaniu wykładników Lapunowa dla systemów ekonomicznych, które podlegają losowym zaburzeniom. Wyliczenie pełnego spektrum wykładników dla danych pochodzących z doświadczeń jest niemożliwe. Istnieje jednak opracowana przez Wolfa (Wolf i in., 1985) metoda obliczania największego wykładnika Lapunowa dla danych doświadczalnych.

Celem opracowania jest wyznaczenie wykładników Lapunowa dla szeregów czasowych utworzonych przez indeks giełdowy WIG oraz wybrane spółki notowane na WGPW.

1. Wykładniki Lapunowa w systemach deterministycznych

Pojęcie wykładników Lapunowa zostało rozwinięte przy charakteryzowaniu wrażliwości na zmiany warunków początkowych deterministycznych systemów dynamicznych. Systemy te mogą być systemami z czasem dyskretnym i przyjmować postać równania rekurencyjnego:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

gdzie:

$$f: X \rightarrow X, \quad X \subset R^m,$$

X – przestrzeń stanów,

$x_t, x_{t+1} \in X$ – stan systemu odpowiednio w chwilach t i $t+1$,

x_0 – dane.

System dynamiczny, opisany równaniem (1), jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $x \in X$ oraz każdego otoczenia U punktu x istnieją $y \in U$ oraz $n \geq 1$ takie, że $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \varepsilon$, gdzie f^n jest n -krotnym złożeniem odwzorowania f . A zatem system (1) jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, gdy po skończonej liczbie kroków odległość dowolnych dwóch bliskich punktów x i y zwiększy się o więcej niż ε .

Pewną miarą tej wrażliwości systemu dynamicznego są wykładniki Lapunowa. Dla jednowymiarowego systemu dynamicznego z czasem dyskretnym:

$$f: X \rightarrow X, \quad X \subset \mathbb{R}, \quad x_{t+1} = f(x_t)$$

oraz z warunkiem początkowym x_0 , wykładnik Lapunowa $\lambda(x_0)$ jest określony wzorem:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln |f'(x_t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{t=1}^n |f'(x_t)| \quad (2)$$

o ile ta granica istnieje. Warunki na to, aby istniał wykładnik Lapunowa i był stały dla prawie wszystkich $x_0 \in X$, podają m.in. Oseledec (1968) i Ruelle (1985).

Wielkość $\lambda(x_0)$ pokazuje w przybliżeniu, ile średnio razy w jednej iteracji zwiększa lub zmniejsza się odległość między sąsiednimi trajektoriami. Gdy wykładnik Lapunowa $\lambda(x_0)$ jest ujemny i jednakowy dla wszystkich (prawie wszystkich) punktów przestrzeni stanów X , system dynamiczny, generowany przez odwzorowanie f , nie jest wrażliwy. Kiedy wykładnik ten jest dodatni, mamy do czynienia z systemem wrażliwym na zmianę warunków początkowych.

Wrażliwość systemu na zmiany warunków początkowych jest istotną cechą chaosu. Nie istnieje mimo wszystko jedna, powszechnie akceptowana definicja deterministycznego chaosu. W literaturze można znaleźć ich wiele. Niektóre z nich zostały przedstawione w pracy Zawadzkiego (1996). Na potrzeby niniejszego opracowania przyjmujemy, że jest on nieokresowym, długoterminowym zachowaniem się ograniczonego deterministycznego systemu, który jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych.

Przykład 1. Odwzorowanie liniowe

Jeśli f będzie funkcją liniową w postaci:

$$f : R \rightarrow R, f(x) = ax, \quad \text{gdzie } a > 0$$

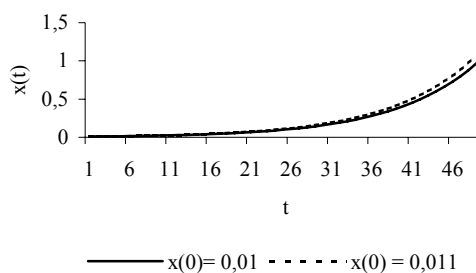
to system dynamiczny będzie opisany równaniem:

$$x_{t+1} = f(x_t) = ax_t \quad (3)$$

Ponieważ $f'(x) = a$ dla każdego $x \in R$, więc wykładnik Lapunowa jest stały dla dowolnej trajektorii, mianowicie:

$$\lambda(x_0) = \ln a$$

Jeśli $0 < a < 1$, wykładnik Lapunowa dla powyższego systemu jest ujemny. W tym przypadku wszystkie trajektorie są zbieżne do zera. Dla $a = 1$ f jest odwzorowaniem stałym, a wykładnik Lapunowa jest równy zero. Jeśli $a > 1$, wykładnik Lapunowa jest dodatni i odległość pomiędzy najbliższymi trajektoriami staje się dowolnie duża. Dla $a > 1$ rozważany system jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych.



Rys. 1. Wrażliwość na zmianę warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie liniowe dla $a = 1,1$, gdzie $x(0)$ jest wartością początkową

Przykład 2. Odwzorowanie logistyczne

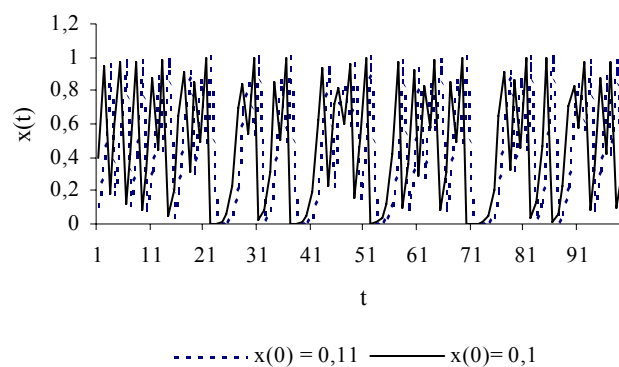
Rozważmy odwzorowanie logistyczne $f : [0,1] \rightarrow \left[0, \frac{\mu}{4}\right]$ dane wzorem:

$$f(x) := \mu x(1-x), \text{ gdzie } \mu \in (0,4] \quad (4)$$

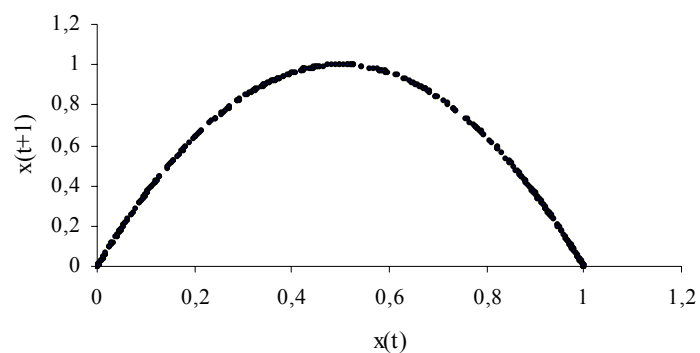
Obliczenie wykładnika Lapunowa nie jest proste, ponieważ pochodna odwzorowania f :

$$f'(x) = \mu(1-2x)$$

nie jest stała. Można jednak pokazać, że dla $\mu = 4$ wykładnik Lapunowa systemu generowanego przez odwzorowanie $f(x) = 4x(1-x)$ jest równy $\lambda = \ln 2 \approx 0.693$ dla prawie wszystkich punktów przedziału $[0,1]$; natomiast dla punktów $x_0 \in [0,1]$, dla których istnieje $n = n_0(x)$ takie, że $f^n(x_0) = 0$, wykładnik ten ma wartość $\lambda = \ln 4 \approx 1.39$ (Peitgen, Jürgens, Saupe, 1992).

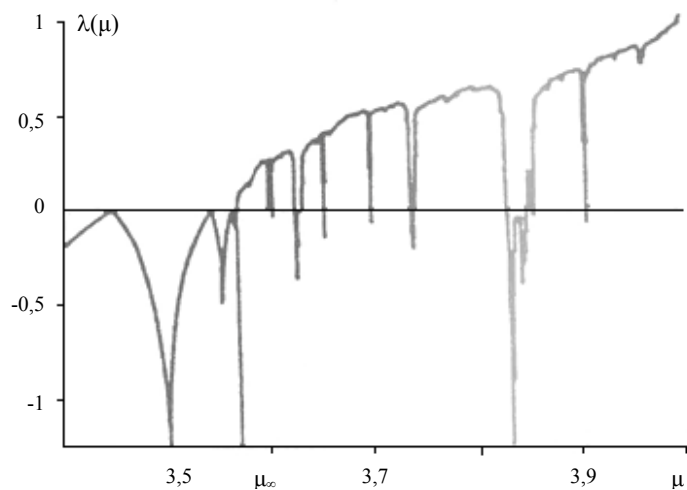


Rys. 2. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie logistyczne dla $\mu = 4$



Rys. 3. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie logistyczne dla $\mu = 4$

Dla rozważanego odwzorowania logistycznego, zależność wykładnika Lapunowa λ od parametru μ jest bardzo skomplikowana i nieregularna.



Rys. 4. Zależność wykładnika Lapunowa λ od parametru μ

Źródło: Zawadzki (1996).

Podaną definicję wykładnika Lapunowa dla jednowymiarowego systemu dynamicznego z czasem dyskretnym można uogólnić na przypadek wielowymiarowy. Dla systemu dynamicznego (1), w którym $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow X$ ($m \geq 1$), wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako granice:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_i(n, x_0)|, \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

gdzie $\mu_i(n, x_0)$ są wartościami własnymi macierzy $Df^n(x_0)$, $Df^n(x_0)$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania f^n równą:

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot Df(x_1) Df(x_0)$$

gdzie $Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]$, f_i są składowymi odwzorowania f , $i, j = 1, 2, \dots, m$.

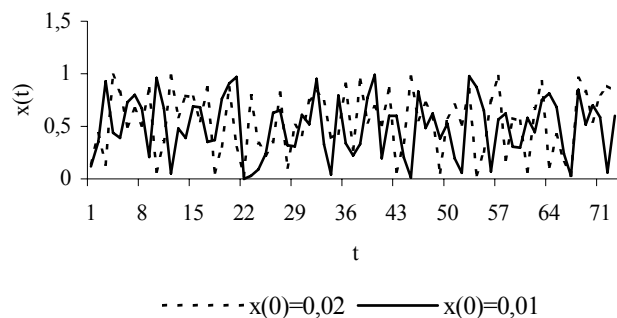
Przykład 3. Odwzorowanie Arnolda (Arnold's cat map)

Rozważmy odwzorowanie $f : T^2 \rightarrow T^2$ (T^2 – torus dwuwymiarowy) dane wzorem:

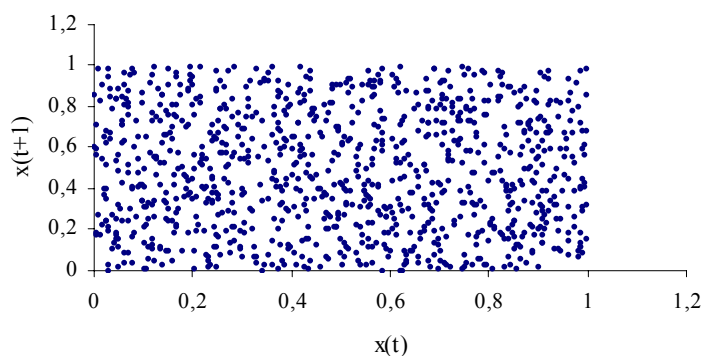
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \pmod{1} \quad (6)$$

Wykładniki Lapunowa są równe:

$$\lambda_1 = \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = -\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$



Rys. 5. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie Arnolda



Rys. 6. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie Arnolda

Dla systemów dynamicznych o znanych równaniach istnieje program o nazwie *Dynamics*, służący do obliczania pełnego spektrum wykładników Lapunowa (Nusse, Yorke, 1998). Wartości wykładników dla wybranych systemów dynamicznych, obliczone przez ten program, przedstawiają poniższe przykłady.

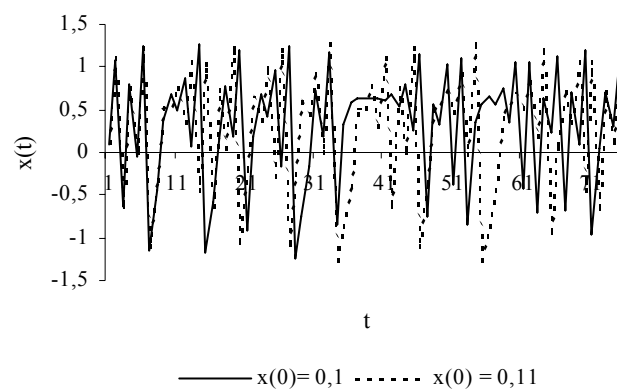
Przykład 4. Odwzorowanie Hénona

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (7)$$

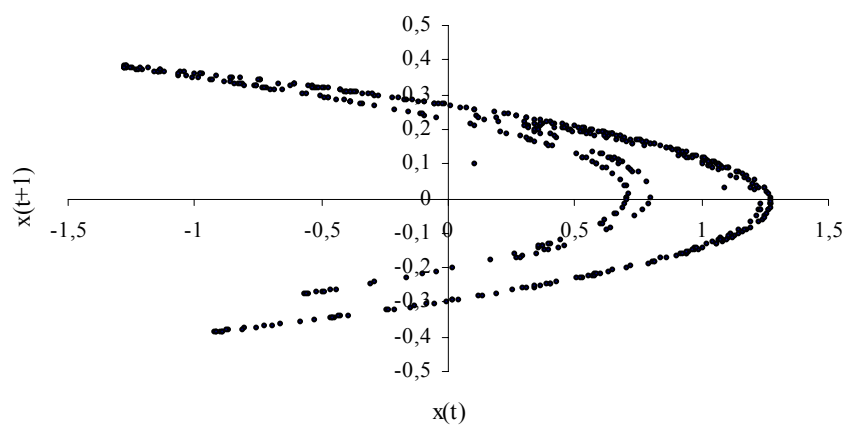
$$y_{n+1} = bx_n \quad (8)$$

Dla parametrów $a = 1.4$ i $b = 0.3$ wykładniki Lapunowa są równe:

$$\lambda_1 = 0.390781, \quad \lambda_2 = -1.594753$$



Rys. 7. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie Henona dla $a = 1.4$ i $b = 0.3$



Rys. 8. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie Henona dla $a = 1.4$ i $b = 0.3$

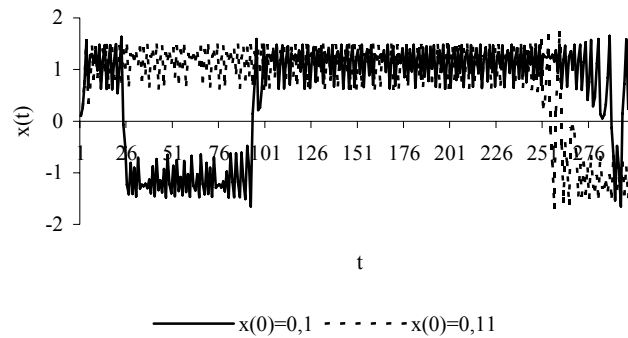
Przykład 5. Odwzorowanie Duffy'ego

$$x_{n+1} = y_n \quad (9)$$

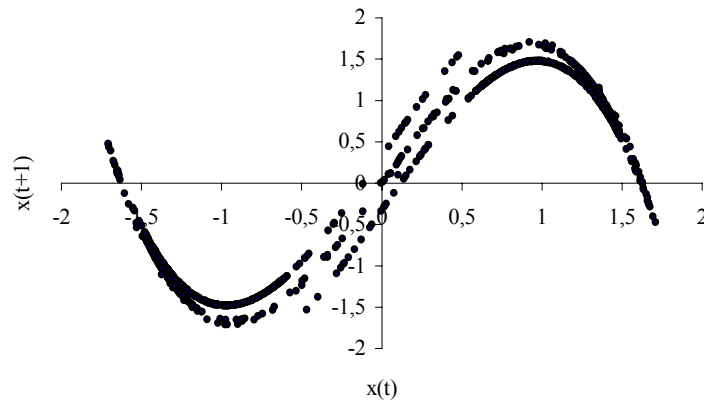
$$y_{n+1} = -bx_n + ay_n - y_n^3 \quad (10)$$

Dla parametrów $a = 2.75$ i $b = 0.2$ wykładniki Lapunowa są równe:

$$\lambda_1 = 0.475637104, \quad \lambda_2 = -2.085809$$



Rys. 9. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie Duffy'ego dla $a = 2.75$ i $b = 0.2$



Rys. 10. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie Duffy'ego $a = 2.75$ i $b = 0.2$

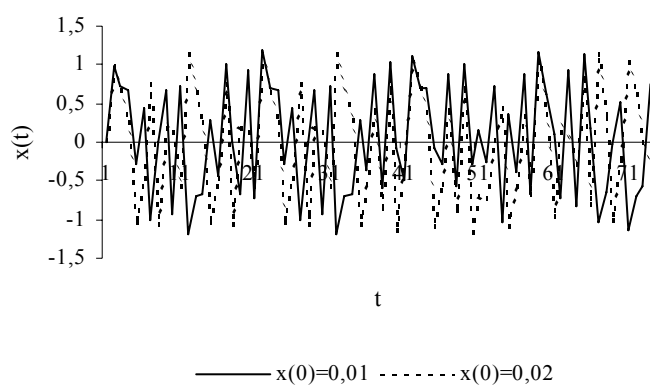
Przykład 6. Odwzorowanie Kaplana-Yorke'a

$$x_{n+1} = ax_n \bmod 1 \quad (11)$$

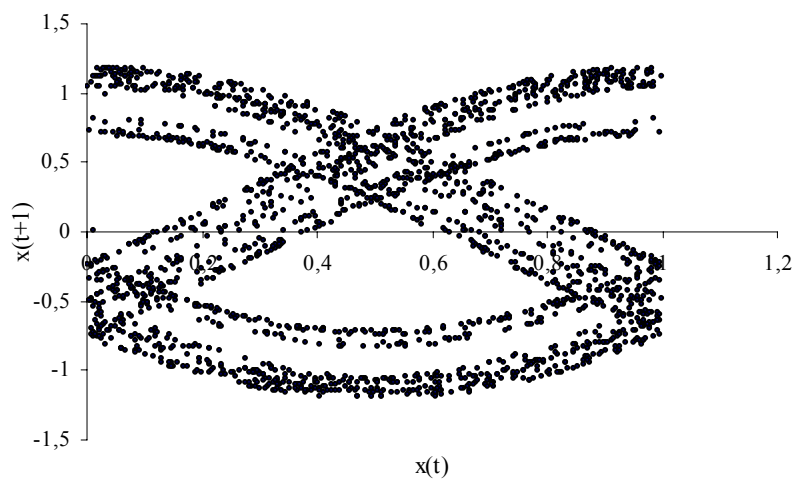
$$y_{n+1} = -by_n + \cos(2\pi x_n) \quad (12)$$

Dla parametrów $a = 3$ oraz $b = 0.25$ wykładniki Lapunowa są równe:

$$\lambda_1 = 1.0986296, \quad \lambda_2 = -1.3863117$$



Rys. 11. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie Kaplana-Yorke'a dla $a = 3$ i $b = 0.25$



Rys. 12. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie Kaplana-Yorke'a dla $a = 3$ i $b = 0.25$

Przykład 7. Odwzorowanie Ikedy

$$x_{n+1} = \gamma + \mu(x_n \cos \varphi - y_n \sin \varphi) \quad (13)$$

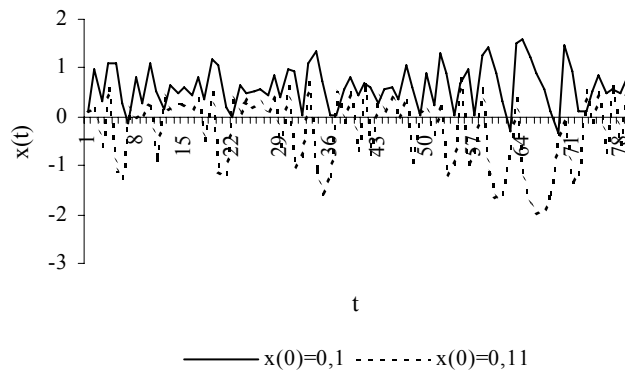
$$y_{n+1} = \mu(x_n \sin \varphi + y_n \cos \varphi) \quad (14)$$

gdzie:

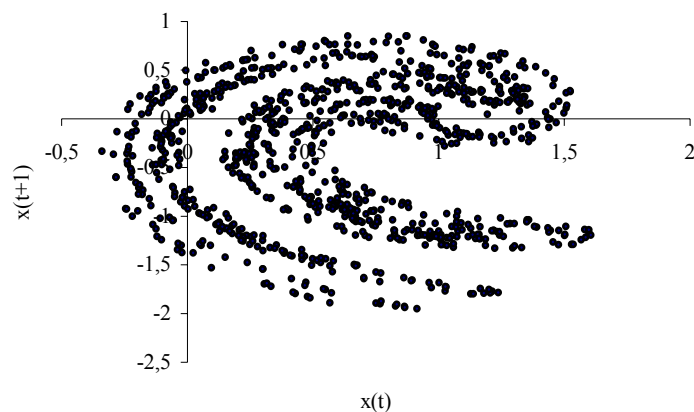
$$\varphi = \beta - \frac{\alpha}{1 + x_n^2 + y_n^2}$$

Dla parametrów $\alpha = 6$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 1$ oraz $\mu = 0.9$ wykładniki Lapunowa są równe:

$$\lambda_1 = 0.50633, \quad \lambda_2 = -0.717051$$



Rys. 13. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie Ikedy dla $\alpha = 6$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.9$



Rys. 14. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie Ikedy $\alpha = 6$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.9$

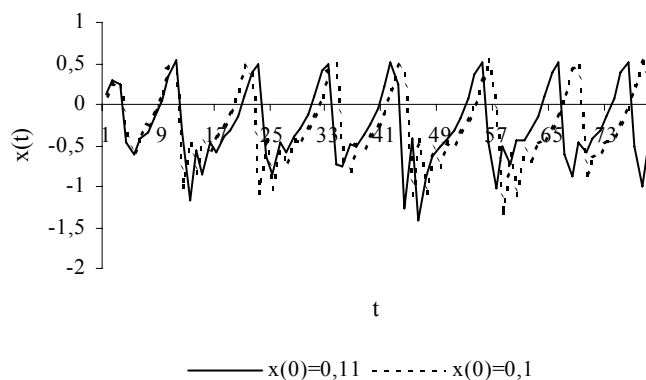
Przykład 8. Odwzorowanie Tinkerbella

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + ax_n + by_n \quad (15)$$

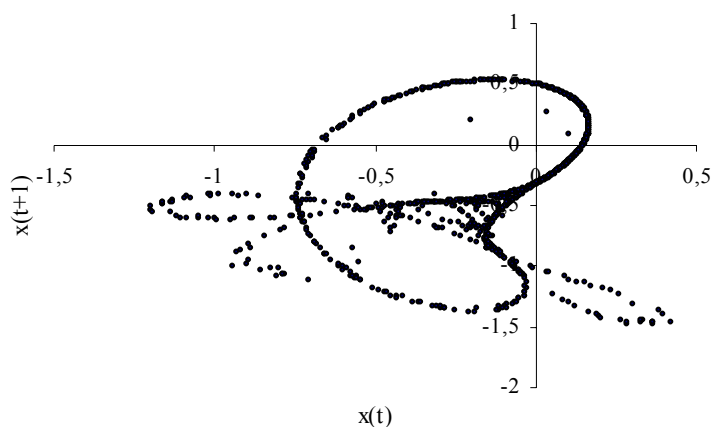
$$y_{n+1} = 2x_n y_n + cx_n + dy_n \quad (16)$$

Dla parametrów $a = 0.9$, $b = -0.6$, $c = 2$ oraz $d = 0.5$ wykładniki Lapunowa są równe:

$$\lambda_1 = 0.199881, \quad \lambda_2 = -0.498624$$



Rys. 15. Wrażliwość na zmiany warunków początkowych systemu generowanego przez odwzorowanie Tinkerbella dla $a = 0.9$, $b = -0.6$, $c = 2$, $d = 0.5$



Rys. 16. Diagram korelacyjny dla systemu generowanego przez odwzorowanie Tinkerbella dla $a = 0.9$, $b = -0.6$, $c = 2$, $d = 0.5$

2. Wykładniki Lapunowa w systemach stochastycznych

Rozważmy stochastyczny system dynamiczny z dodanym szumem opisany równaniem:

$$x_t = f(x_{t-1}) + e_t, \quad 1 \leq t \leq N \quad (17)$$

gdzie:

$$f: X \rightarrow X, \quad X \subset \mathbb{R}^m,$$

X – przestrzeń stanów,

x_t – stan systemu w chwili t ,

$\{e_t\}$ – m -wymiarowy szum.

Niech $x_0^A, x_0^B \in \mathbb{R}^m$ oznaczają dwa początkowe wektory stanów, takie że:

$$x_0^A - x_0^B = U\delta$$

gdzie U jest stałym wektorem jednostkowej długości. Po jednej iteracji modelu (17), z tym samym losowym zaburzeniem, otrzymujemy:

$$\|x_1^A - x_1^B\| = \|f(x_0^A) - f(x_0^B)\| = \|Df(x_0^A)(x_0^A - x_0^B)\| + o(\delta)$$

gdzie Df jest macierzą Jacobiego odwzorowania f .

Zakładamy, że $D^2 f$ jest jednostajnie ograniczona dla wszystkich x w atraktorze:

$$J_i = Df(x_i^A)$$

oraz że:

$$T_M = J_M \cdot J_{M-1} \cdot \dots \cdot J_1$$

Stosując wzór na pochodną funkcji złożonej:

$$\frac{d(x_M^A - x_M^B)}{d\delta} = T_M U$$

można pokazać, że:

$$\|x_M^A - x_M^B\| = \|T_M \delta\| + o(\delta)$$

przy $M \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $K^M \delta \rightarrow 0$, gdzie K jest górnym ograniczeniem opartym na pochodnej pierwszego i drugiego rzędu funkcji f . Przy takich warunkach ograniczających, T_M jest liniowym przybliżeniem odwzorowania f po M krokach iteracji.

Niech $v_1(M)$ oznacza największą wartość własną $T_M^T \cdot T_M$. Formalna definicja wykładnika Lapunowa jest następująca:

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2M} \log |v_1(M)| \right\} \quad (18)$$

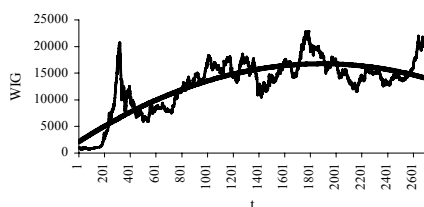
o ile ta granica istnieje.

3. Wykładniki Lapunowa na WGPW

W latach 80. pojawiły się metody wyznaczania wykładników Lapunowa na podstawie danych doświadczalnych. Koncentrowały się one na bardzo dużych zbiorach danych generowanych w doświadczeniach fizycznych. Mniej uwagi poświęcano oszacowaniu wykładników Lapunowa dla systemów ekonomicznych.

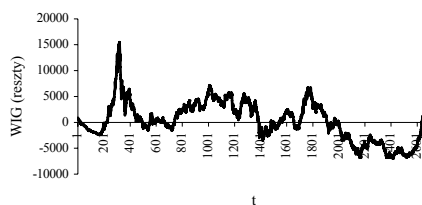
Wyliczenie pełnego spektrum wykładników Lapunowa dla danych pochodzących z doświadczeń nie jest możliwe ze względu na nieznaną równań. Istnieje jednak opracowany przez Wolfa algorytm obliczania największego wykładnika Lapunowa na podstawie szeregu czasowego (Wolf i in., 1985). Dodatnia wartość tego wykładnika oznacza, że system jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych. Metoda polega na mierzeniu oddalania się sąsiadujących ze sobą punktów w zrekonstruowanej przestrzeni fazowej.

Tabela 1 zawiera wykładniki Lapunowa obliczone na podstawie szeregów czasowych utworzonych przez indeks giełdowy WIG oraz wybrane spółki notowane na WGPW. Spośród spółek WGPW wybrano cztery: BRE, BZWBK, ELEKTRIM, ŻYWIEC. Poniżej przedstawiono szeregi czasowe utworzone ze wskaźnika WIG oraz wyszczególnionych spółek.

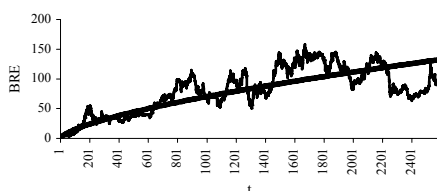


Rys. 17. Wartości WIG oraz dopasowana funkcja trendu określona wzorem

$$y = -0,0041x^2 + 15,562x + 2095$$

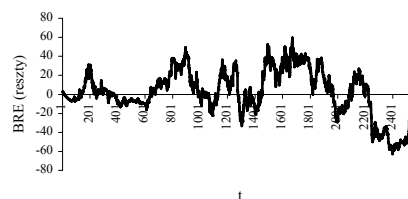


Rys. 18. Wartości WIG z wyeliminowanym trendem

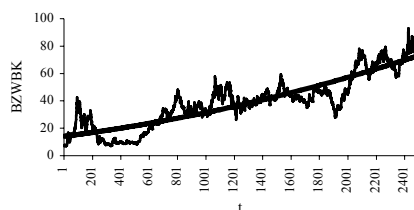


Rys. 19. Wartości BRE oraz dopasowana funkcja trendu określona wzorem

$$y = 0,7148x^{0,6644}$$

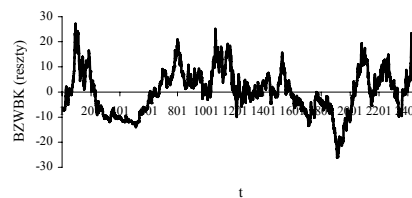


Rys. 20. Wartości BRE z wyeliminowanym trendem

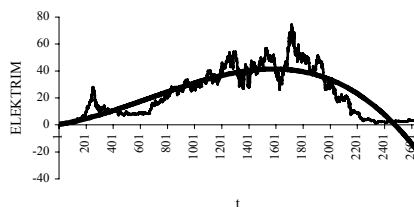


Rys. 21. Wartości BZWBK oraz dopasowana funkcja trendu określona wzorem

$$y = 0,000004x^2 + 0,0132x + 14,113$$

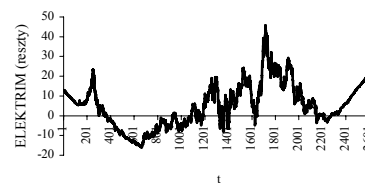


Rys. 22. Wartości BZWBK z wyeliminowanym trendem



Rys. 23. Wartości ELEKTRIM oraz dopasowana funkcja trendu określona wzorem

$$y = -0,00000001x^3 + 0,00003x^2 + 0,0166x + 0,3383$$

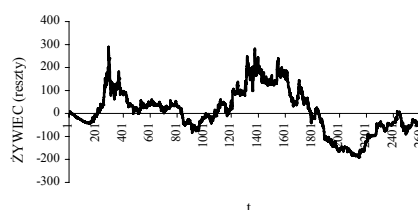


Rys. 24. Wartości ELEKTRIM z wyeliminowanym trendem



Rys. 25. Wartości ŻYWIEC oraz dopasowana funkcja trendu określona wzorem

$$y = 1,975x^{0,6775}$$



Rys. 26. Wartości ŻYWIEC z wyeliminowanym trendem

W celu obliczenia największego wykładnika Lapunowa posłużono się napisaną w języku QBASIC wersją programu opracowanego przez Wolfa. Program ten jest zamieszczony jako dodatek w pracy Petersa (1997).

Tabela 1

Wykładniki Lapunowa dla szeregów utworzonych przez indeks giełdowy WIG oraz wybrane spółki WGPW

Spółka	Wartość największego wykładnika Lapunowa
BRE	0,00071
BZWBK	0,00026
ELEKTRIM	-0,00016
ŻYWIEC	0,00025
WIG	0,00001

Podsumowanie

W opracowaniu zbadano wrażliwość na zmianę warunków początkowych szeregów czasowych utworzonych przez indeks giełdowy WIG oraz spółki BRE, BZWBK, ELEKTRIM, ŻYWIEC. W tym celu obliczono wartość największego wykładnika Lapunowa dla każdego z rozważanych szeregów. Z informacji podanych w tab. 1 wynika, że objęte badaniem spółki są wrażliwe na zmianę warunków początkowych. Wyjątkiem okazał się ELEKTRIM, charakteryzujący się ujemną wartością wykładnika.

Literatura

- Dechert W.D., Gencay R.: *Lyapunov Exponents as Nonparametric Diagnostic for Stability Analysis*. In: *Nonlinear Dynamics Chaos and Econometrics*. Ed. M.H. Pesaran, S.M. Potter.
- Nychka D., Ellner S., McCaffrey D., Gallant A.R.: *Finding chaos in noisy systems*. „J.R. Statist. Soc. B” 1992.
- Nusse H.E., Yorke J.A.: *Dynamika. Badania numeryczne*. PWN, Warszawa 1998.
- Oseledec V.I.: *Mul'tiplikativnaja ergodiceskaja teorema. Charaktericeskije pokazateli Liapunova dinamiceskich sistem*. Trudy Moskovskogo Matematycznego Obscestva. T. XIX, 1968.

- Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D.: *Fractals for the Classroom*. Springer-Verlag, New York 1992.
- Peters E.E.: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe. Nowe spojrzenie na cykle, ceny i ryzyko*. WIG-Press, Warszawa 1997.
- Sprott J.C.: *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press Inc. New York 2003.
- Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.: *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*. „Physica 16D” 1985.
- Yao Q., Tong H.: *Quantifying the Influence of Initial Values on Non-linear Prediction*. „J. R. Statist. Soc. B” 1994.
- Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane przykłady ekonomiczne*. AE, Katowice 1996.
- Ziehmann C., Smith L.A., Kurths J.: *The Bootstrap and Lyapunov Exponents in Deterministic Chaos*. „Physica D” 1999.

LYAPUNOV EXPONENTS FOR TIME SERIES OF WGPW CORPORATIONS

Summary

In this paper a concept of a Lyapunov exponent of a deterministic system and stochastic system has been described. The Lyapunov exponents of a dynamical system are measures of the average degree of divergence of the nearby orbits in a phase space. A positive exponent is an indication of the chaotic dynamics, i.e. the system has a property of sensitive dependence on the initial conditions. The numerical examples show that the series generated by WGPW corporations are sensitive dependence to the initial conditions. Moreover, there are computed Lyapunov exponents in some deterministic systems.