

**Alicja Wolny**

# **WRAŻLIWOŚĆ WYNIKU TECHNICZNEGO ZAKŁADU UBEZPIECZEŃ NA ZMIANĘ POZIOMU REZERWY SZKODOWEJ**

---

## **Wstęp**

Zakład ubezpieczeń jest zobligowany do tworzenia funduszu ubezpieczeniowego składającego się z rezerw techniczno-ubezpieczeniowych podzielonych na trzy grupy:

- rezerwy związane ze składką,
- rezerwy związane z odszkodowaniem/świadczeniem,
- rezerwy mieszane.

W opracowaniu poruszono problem kalkulacji rezerwy na niewypłacone odszkodowania i świadczenia (dalej zwaną rezerwą szkodową) oraz problem wyboru ostatecznej wartości rezerwy z uwzględnieniem kondycji finansowej zakładu. Przeprowadzono także analizę wrażliwości wyniku technicznego zakładu ubezpieczeń na zmianę wartości rezerwy. Zmiana ta wynika najczęściej z różnorodności metod statystycznych uzyskiwanych w wyniku obliczeń błędów szacunkowych i służących do kalkulacji rezerwy.

## **1. Szacowanie wartości rezerwy szkodowej**

Celem tworzenia rezerwy szkodowej jest zapewnienie przez zakład ubezpieczeń środków finansowych na wypłatę odszkodowań dla szkód, które zajdą lub zostaną zgłoszone ubezpieczycielowi w przyszłości. Zatem podstawą kalkulacji rezerwy jest szacowanie wartości odszkodowań i świadczeń w okresach rozliczeniowych zakładu. Polski ustawodawca dopuszcza trzy podejścia w kalkulacji rezerwy szkodowej:

1. **Podejście indywidualne** – charakteryzuje się tym, że wartość wypłaconego odszkodowania oraz koszty likwidacji szkód są szacowane indywidualnie dla każdej pojedynczej szkody.
2. **Podejście ryczałtowe** – charakteryzuje się tym, że wartość wypłaconego odszkodowania i koszty likwidacji szkód są ustalane zbiorczo dla portfela ubezpieczeń.
3. **Podejście aktuarialne** – polega na ustaleniu rezerwy z zastosowaniem metod matematyki aktuarialnej i statystyki ubezpieczeniowej. Podejście to opiera się na analizie danych statystycznych dotyczących wysokości wypłaconych odszkodowań, liczby wypłaconych odszkodowań, opóźnienia w zgłaszaniu szkody, wartości poniesionych w przeszłości kosztów likwidacji szkód, wartości zebranej składki oraz wysokości inflacji.

W podejściu aktuarialnym ogólna definicja wartości rezerwy szkodowej ma postać:

$$R = C - C^z + K_s$$

gdzie  $C$  jest szacowaną całkowitą wartością odszkodowań, które zostały wypłacone lub będą wypłacone w przyszłości,  $C^z$  jest wartością odszkodowań, które zostały już wypłacone, natomiast  $K_s$  są to szacowane koszty likwidacji szkód. Istnienie części odszkodowań niewypłaconych dla szkód zaszytych wynika głównie z powodów niezgłoszenia szkody ubezpieczycielowi, niezakończenia procesu likwidacji szkody oraz niezakończenia procesu szacowania szkody. Istotą podejścia aktuarialnego jest więc oszacowanie całkowitej wartości wypłaconych odszkodowań  $C$ . W literaturze przedmiotu zaproponowano do tej pory wiele metod statystycznych służących do szacowania poziomu rezerwy szkodowej<sup>\*</sup>; opierają się one na danych historycznych dotyczących wypłaconych odszkodowań. Najbardziej znane z tych metod to: Tarbella (Tarbell, 1934), chain-ladder (Straub, 1988), Bornhuettera-Fergusona (Bornhuetter, Ferguson, 1972), Cape-Code (Struzzieri, Hussian, 1998), separacyjna (*separation*) (Zehnwirth, 1996), algebraiczna (Weller, 1995). Zastosowanie tych metod pozwala na uzyskanie szacunkowych wartości rezerwy, natomiast nie wiadomo jednoznacznie, która z metod jest w danej sytuacji najlepsza. Zatem proces szacowania rezerwy szkodowej może być wspomagany analizą wskaźników finansowych mierzących kondycję finansową zakładu ubezpieczeń. Jednym z celów zarządzania zakładem ubezpieczeń jest prowadzenie efektywnej działalności ubezpieczeniowej. Cel ten może być mierzony za pomocą wyniku technicznego zakładu. Ponieważ wartość rezerwy szkodowej wpływa bezpośrednio na po-

<sup>\*</sup> W zasadzie nie jest to kalkulacja a estymacja, jednak takie sformułowanie występuje w literaturze przedmiotu.

ziom wyniku technicznego, istotna jest więc analiza wrażliwości wyniku technicznego na korekty wielkości rezerwy szkodowej (w ramach przedziału zmienności rezerwy uzyskanego w trakcie statystycznej analizy danych).

## 2. Wybór wartości rezerwy szkodowej

Zakład ubezpieczeń przyjmuje zwykle ochronę ubezpieczeniową ryzyk o różnym charakterze szkodowości (w grupach ryzyk). Dlatego też szacowanie wartości rezerwy szkodowej odbywa się oddzielnie dla każdej grupy ryzyka (z reguły w grupach ryzyk występują inne rozkłady szkód). Zatem ostateczna wartość rezerwy szkodowej jest sumą rezerw dla poszczególnych grup ryzyk.

Załóżmy, że w danym zakładzie ubezpieczeń występuje  $n$  grup ryzyk oraz że rezerwa szkodowa dla  $i$ -tej grupy ryzyka jest kalkulowana za pomocą  $m$  metod obliczeniowych. Wtedy wszystkich możliwych wartości rezerwy szkodowej jest  $m^n$  i wartości te są obliczane ze wzoru:

$$a_i = X_{1,j} + \dots + X_{n,z}; \quad j, z = 1, \dots, m^n$$

gdzie  $a_i$  oznacza  $i$ -tą wartość rezerwy, natomiast  $X_{k,l}$  oznacza wartość rezerwy dla  $k$ -tej grupy ryzyka obliczoną za pomocą  $l$ -tej metody obliczeniowej. Ponadto przyjmijmy, że system wskaźników  $f_1, \dots, f_k$  opisuje kondycję finansową zakładu ubezpieczeń. Do wyboru ostatecznej wartości rezerwy szkodowej proponujemy zastosowanie modelu wielokryterialnego ze skończoną liczbą alternatyw decyzyjnych, w którym:

$a_i$  – alternatywy decyzyjne, kolejne wartości rezerwy szkodowej,  $i = 1, \dots, m^n$ ,  
 $f_l$  – funkcje kryterium (założenie maksymalizacji), wskaźniki finansowe,  $l = 1, \dots, k$ .

Ponadto każdemu kryterium przypisujemy wagę  $w_l$ ,  $l = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{l=1}^k w_l = 1$ ,

która wyraża ważność tego kryterium.

	Kryteria – wskaźniki finansowe		
Alternatywy decyzyjne	$f_1$	...	$f_k$
$a_1$	$f_1(a_1)$	...	$f_k(a_1)$
...	...	...	...
$a_{m^n}$	$f_1(a_{m^n})$	...	$f_k(a_{m^n})$
Wagi	$w_1$	...	$w_k$

Do rozwiązania powyższego modelu została zastosowana metoda ważonej funkcji kompromisu (*Weighted Sum Model*) polegająca na wyznaczeniu współczynnika preferencji  $P_i$ , który pozwala na utworzenie rankingu alternatyw decyzyjnych. Współczynnik ten jest definiowany następująco:

$$P_i = \sum_{j=1}^k f_j(a_{i,z})w$$

Alternatywa, której odpowiada największa wartość współczynnika preferencji, jest decyzją najlepszą.

W powyższym modelu system wskaźników finansowych opisujących kondycję finansową zakładu jest systemem otwartym. Oznacza to, że system może być modyfikowany w przypadku, gdy istnieje uzasadniona potrzeba wprowadzenia lub usunięcia wskaźnika. Pozwala na to również addytywność współczynnika preferencji, do którego można dodawać nowe wartości bez zmiany wcześniejszych obliczeń. Jest to istotne ułatwienie w przypadku procesu wyboru rezerwy szkodowej, gdyż nawet w przypadku niewielkiej liczby grup ryzyk oraz metod obliczeniowych liczba możliwości jest duża (np. jedynie 5 grup ryzyk oraz 3 metody dają już 125 alternatyw decyzyjnych).

Poniżej został przedstawiony przykład obliczeniowy obrazujący praktyczne zastosowanie modelu wielokryterialnego. Zostały przyjęte trzy grupy ryzyk, dla których poziom rezerw szkodowych został oszacowany dwoma metodami obliczeniowymi. Ponadto w modelu zostały uwzględnione 3 kryteria:  $f_1$  – pieniężne pokrycie zobowiązań ubezpieczeniowych,  $f_2$  – zabezpieczenie zobowiązań ubezpieczeniowych składką,  $f_3$  – rentowność działalności ubezpieczeniowej oraz wagi tych kryteriów wynoszące odpowiednio 0,1; 0,3; 0,6.

Tabela 1

Poziom rezerwy szkodowej dla grup ryzyk wraz z wartościami kryteriów

Metoda obliczeniowa	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
(m2,m2,m2)	2023	3060	845	34,11%	27,20%	5,70%
(m2,m2,m1)	1934	3680	856	33,46%	29,68%	3,64%
(m1,m2,m1)	2003	3140	805	34,09%	27,29%	4,21%
(m2,m1,m2)	2134	3980	815	32,92%	31,79%	2,10%
(m2,m1,m1)	1904	3220	823	34,09%	27,28%	3,60%
(m1,m1,m1)	2000	3240	839	33,93%	27,89%	3,12%
(m1,m2,m2)	2098	3130	823	33,96%	27,76%	2,91%
(m1,m1,m2)	1987	3000	901	34,16%	27,01%	3,20%
			Wagi	0,1	0,3	0,6

Dane umowne.

Ze względu na złożoność obliczeniową zostały przyjęte jedynie 3 grupy ryzyk oraz 2 metody obliczeniowe, jednak możliwe jest wprowadzenie do układu kryteriów większej liczby wskaźników.

Na podstawie powyższych danych został uzyskany następujący ranking wartości rezerwy szkodowej ze względu na poziom funkcji preferencji  $P$ .

Tabela 2

Łączne wartości poziomu rezerwy szkodowej

$a_i$	$P_i$
5928	0,1499039
6470	0,1443447
5948	0,1412424
6929	0,1408835
5947	0,1375419
6079	0,136316
6051	0,134705
5888	0,134403

Zatem najlepsza wartość ostatecznej rezerwy szkodowej przy wagach kryteriów na poziomie 0,1; 0,3; 0,6 wynosi  $a_i = 6929$ .

### 3. Analiza wrażliwości poziomu rezerwy szkodowej na zmianę wag kryteriów oceny

Zakład ubezpieczeń jest ustawowo zobligowany do prowadzenia jedynie działalności ubezpieczeniowej i nie może zajmować się bezpośrednio żadnym innym rodzajem działalności pozaubezpieczeniowej. Stąd podstawowym źródłem przychodu zakładu są zebrane składki, natomiast największym obciążeniem finansowym – wypłacane odszkodowania. Dlatego też analiza poziomu wyniku technicznego jest niezbędnym elementem zarządzania gospodarką finansową zakładu. Zatem w procesie ustalania rezerwy szkodowej (z uwzględnieniem kondycji finansowej zakładu) ważna jest analiza wrażliwości modelu, a przez to i wyniku technicznego na zmianę wartości rezerwy.

W zaproponowanej metodzie na wybór alternatywy decyzyjnej istotny wpływ mają ustalone wartości wag. Najlepsza wartość rezerwy, a przez to wartość wyniku technicznego, zmienia się więc w zależności od tego, które ze wskaźników finansowych zostaną uznane za bardziej istotne, a które za mniej istotne.

W celu przeprowadzenia analizy wrażliwości decyzji na zmianę wag, dla zadanych wag interesujące jest wyznaczenie wartości będącej najmniejszą (modulo) zmianą poziomu wag powodującą zmianę na pierwszej pozycji w rankingu alternatyw (*Percent-top critical criterion – PT*). Wartość ta jest definiowana następująco (Rios Insua, 1990):

$$PT_{l,j} = \min_{i,j} \left| \frac{100\delta_{l,i,j}}{w_l} \right|, \quad l, j = 1, \dots, k$$

gdzie  $\delta_{l,i,j}$  oznacza najmniejszą zmianę wagi  $w_l$  dla kryterium  $f_l$ , która powoduje zamianę miejscami alternatywy  $a_1$  oraz  $a_j$ . Wartość  $\delta_{l,i,j}$  dla wagi  $l$ , powodująca zmianę w rankingu  $a_1$  oraz  $a_j$ , musi spełniać następujące warunki (Rios Insua, 1990):

1.  $\delta_{l,i,j} < \frac{(P_j - P_1)}{[f_l(a_1) - f_l(a_j)]}$  dla  $f_l(a_j) > f_l(a_1)$
2.  $\delta_{l,i,j} > \frac{(P_j - P_1)}{[f_l(a_1) - f_l(a_j)]}$  dla  $f_l(a_j) < f_l(a_1)$

W praktyce, powyższe własności pozwalają na analizę zmian najlepszej wartości rezerwy szkodowej oraz wartości wyniku technicznego ze względu na każdy wskaźnik finansowy. W przypadku planowania przyszłej strategii zakładu, symulacja wrażliwości wyniku na „ważność” poszczególnych wskaźników finansowych umożliwia rozpatrywanie różnych scenariuszy wyników finansowych.

W prezentowanym wyżej przykładzie został uzyskany następujący ranking wartości rezerwy szkodowej oraz wyniku technicznego (ustalone wagi: 0,1; 0,3; 0,6).

Tabela 3

Poziom wyniku technicznego zakładu dla uzyskanych wartości rezerwy szkodowej

$a_i$ – Rezerwa dla okresu t	$P_i$	Wynik techniczny	Rezerwa dla okresu t-1	Zmiana stanu
5928	0,1499039	7106	3016	2912
6470	0,1443447	7648	3016	3454
5948	0,1412424	7126	3016	2932
6929	0,1408835	8107	3016	3913
5947	0,1375419	7125	3016	2931
6079	0,136316	7257	3016	3063
6051	0,134705	7229	3016	3035
5888	0,134403	7066	3016	2872

Tabela 3 pokazuje, że wynik techniczny dla najlepszej wartości rezerwy szkodowej jest znacznie niższy od maksymalnego. Wynika to z tego, że najistotniejsze kryterium  $f_3$  ma wagę znacznie wyższą od kryteriów  $f_1, f_2$ .

Przyjmijmy, że waga kryterium  $f_3$  zostanie zmniejszona w stosunku do innych kryteriów. Stosując wprowadzone powyżej własności należy przypilnować, aby zmiana wagi była większa od wartości:

$$\frac{(P_j - P_1)}{[f_3(a_1) - f_3(a_j)]}, \quad j = 2, \dots, 8$$

Ograniczenia dolne dla kolejnych alternatyw przedstawia tab. 4.

Tabela 4

Wartości rezerwy szkodowej przy zmienionych wagach kryteriów

Lp.	$a_i$	Wynik techniczny	Ograniczenie zmiany wagi dla kryterium $f_3$	Nowe wagi zmieniające lidera rankingu		
				$w_1$	$w_2$	$w_3$
1	5928	7106	-	-	-	-
2	6470	7648	0,269866788	0,2349334	0,4349334	0,330133212
3	5948	7126	0,583135751	0,3915679	0,5915679	0,016864249
4	6929	8107	0,250565676	0,2252828	0,4252828	0,349434324
5	5947	7125	0,588668396	0,3943342	0,5943342	0,011331604
6	6079	7257	0,526663658	0,3633318	0,5633318	0,073336342
7	6051	7229	0,544764331	0,3723822	0,5723822	0,055235669
8	5888	7066	0,62	0,39	0,59	0,02

Zatem aby np. zwiększyć wynik techniczny z poziomu 7106 do poziomu 7648, należy zwiększyć istotność kryterium drugiego i trzeciego przez wzrost wag  $w_2$ ,  $w_1$  oraz zmniejszyć wagę  $w_3$ . Ustalenie wag kryteriów jest na ogół indywidualnym problemem zakładu ubezpieczeń. W konkretnej sytuacji finansowo-ekonomicznej zakłady mogą znacznie różnić się preferencjami odnośnie do ważności celów do osiągnięcia przy kalkulacji rezerwy szkodowej.

## Wnioski

Powyższa metoda umożliwia w prosty sposób wybór rezerwy szkodowej uwzględniający preferencje decydenta w obszarze zarządzania gospodarką finansową zakładu ubezpieczeń. Bezpośredni wpływ wartości rezerwy na wynik techniczny można łatwo zauważyć w trakcie przeprowadzania analizy wrażliwości rankingu alternatyw decyzyjnych na wagi kryteriów. Własności poziomu zmian wag, wykorzystywane w tej analizie, pozwalają na szybkie uzyskiwanie scenariuszy różniących się „ważnością” kryteriów, w tym przypadków wskaźników finansowych, co pozwala na efektywne planowanie kondycji finansowej zakładu.



## Literatura

- Bornhuetter R.L., Ferguson E.F.: *The Actuary and IBNR*. PCAS LIX, 1972.
- Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z.: *Programowanie wielokryterialne*. PWE, Warszawa 1987.
- Kwiecień M.: *Analiza wrażliwości w zadaniu wielokryterialnej oceny decyzji z ważoną funkcją kompromisu*. W: *Metody i zastosowania badań operacyjnych 2000*. Praca zbiorowa pod red. D. Kopańskiej-Bródki. AE, Katowice 2001.
- Rios Insua D.: *Sensitivity Analysis in Multi-Objective Decision Making. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin 1990.
- Straub E.: *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag, New York 1988.
- Struzzieri P.J., Hussian P.R.: *Using Best Practices to Determine a Best Reserve Estimate*. CAS Reserving Call Papers, 1998, Vol. 1, Fall.
- Tarbell T.F.: *Incurred But Not Reported Claims Reserves*. Proceeding of the CAS, 1934, Vol. 20.
- Weller A.O.: *An Algebraic Reserving Method for Paid Loss Data*. CAS Forum, 1995, Fall.
- Zehnwirth B.: *Three Powerful Diagnostic Models for Loss Reserving*. Research Paper No 34, Center for Actuarial Studies, The University of Melbourne, Melbourne 1996.

### SENSITIVITY OF THE TECHNICAL RESULT OF THE INSURANCE COMPANY ON THE CHANGE OF THE DAMAGE RESERVE LEVEL

#### Summary

The paper presents a multi-criteria model which is supposed to support the choice of the insurance reserve levels. The model is based on the historical values estimated statistically that are independent for any given risk group. Criteria for the final reserve level have been defined as the financial factors. Thanks to the latter, it is possible to consider financial condition of the company. After having made a decision the technical results' sensitivity to the changing reserve value have been analyzed. The above mentioned analysis allows to establish quickly the scenarios with different criteria's „importance” which enable planning the financial results as well as future strategy effectively.