Barbara Zakrzewska-Derylak

KOHERENTNE MIARY RYZYKA UBEZPIECZENIOWEGO

Wstęp

Dla właściwej oceny firm ubezpieczeniowych niezbędna jest wycena stosowanych przez nie taryf. Istnieje więc potrzeba badań nad metodami ustalania składek ubezpieczeniowych. Głównym zadaniem ubezpieczyciela jest właściwa kalkulacja składki ubezpieczeniowej oraz związana z nią ocena ryzyka. Uwzględniając miary ryzyka możemy posłużyć się takimi zasadami, jak: wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe, użyteczność, wiarygodność, percentyl, maksymalna strata. Zasady te stosuje się dla ubezpieczeń majątkowych. W przypadku ubezpieczeń osobowych dobrym zabezpieczeniem są ubezpieczenia życiowe, w tym emerytalne.

W niniejszym opracowaniu podjęto temat pomiaru ryzyka w kontekście kalkulacji składki netto. Poziom kalkulowanych składek wynika bezpośrednio z poziomu ryzyka objętego ubezpieczeniem. Dlatego jedną z najważniejszych funkcji zakładu ubezpieczeń jest identyfikacja, pomiar oraz ocena ryzyka i na tej podstawie kalkulacja składek ubezpieczeniowych. Oprócz miar wymienionych wcześniej bardzo istotną miarą jest miara koherentna. Podano więc jej definicję, przykłady miar, które są miarami koherentnymi, oraz przykłady często stosowanych miar, które, jak się okazuje, nie są koherentne. Wobec tych ostatnich przedstawiono propozycję konstrukcji miary koherentnej.

1. Ryzyko w dziedzinie ubezpieczeń

Działalność ubezpieczeniowa jest ściśle związana z występowaniem ryzyka. Niepomyślne zdarzenia losowe, które występują w postaci niszczącego oddziaływania zjawisk przyrodniczych lub będące skutkiem działalności ludzi, przejawiają się szkodami losowymi. Zadaniem zakładów ubezpieczeń jest przyjmowanie ryzyka od klientów w całości lub częściowo za odpowiednią cenę zwaną składką ubezpieczeniową, a następnie wypłacenie stosownego odszkodowania w przypadku, gdy ryzyko się zrealizuje. Zatem w działalności ubezpieczeniowej ryzyko ma szczególne znaczenie, gdyż jest związane z przedmiotem ubezpieczenia. Występuje również ryzyko ubezpieczyciela związane z działalnością zakładu ubezpieczeniowego jako uczestnika rynku, jak również ryzyko ubezpieczającego związane z zawarciem kontraktu ubezpieczeniowego. Najważniejszym jednak ryzykiem jest ryzyko ubezpieczeniowe, gdyż jego ocena wpływa na koszt usługi ubezpieczeniowej, czyli wysokość składki.

W niniejszym opracowaniu przyjmuje się, że prawdopodobieństwo wystąpienia szkody oraz oczekiwaną intensywność można oszacować ilościowo.

2. Metody pomiaru ryzyka

Możliwość pomiaru, a przede wszystkim określenie i zdefiniowanie miary ryzyka ma duże znaczenie ze względu na praktykę ubezpieczeniową, w tym kalkulację składki ubezpieczeniowej. Jeśli przyjmie się, że dobrym modelem opisującym ryzyko ubezpieczeniowe jest nieujemna zmienna losowa, to odpowiednią miarą tej zmiennej jest jej rozkład, czyli jej dystrybuanta lub funkcja gęstości. Dobrymi miarami ryzyka są parametry rozkładu prawdopodobieństwa, takie jak: wartość oczekiwana, odchylenie standardowe, wariancja, współczynnik zmienności, kwartyle, mediana, dominanta, odchylenie ćwiartkowe. Miarą ryzyka może być też prawdopodobieństwo wystąpienia szkody czy największa strata występujących ryzyk. W niniejszym opracowaniu proponuje się zastosowanie miary koherentnej do oceny ryzyka ubezpieczeniowego.

Jeśli ryzyko jest mierzalne i w wyniku obserwacji zebrano dane statystyczne, to parametry rozkładu można estymować metodami statystycznymi. Zatem pomiar ryzyka ubezpieczeniowego wiąże się z przewidywaniem szkód losowych, które pojawią się w przyszłości.

Pomiar ryzyka ubezpieczeniowego ma fundamentalne znaczenie przy podejmowaniu decyzji ubezpieczeniowych. Podstawową decyzją jest przyjęcie danego ryzyka do ubezpieczenia bądź jego odrzucenie. Inną ważną decyzją jest kalkulacja składki, której podstawą jest miara ryzyka ubezpieczeniowego.

2.1. Koherentne miary ryzyka

Oprócz wcześniej wspomnianych miar ryzyka, w ubezpieczeniach można zastosować mniej znaną miarę, lecz odgrywającą w nich ważną rolę. Jest to miara zwana **koherentną**, zdefiniowana przez Artznera, Delbaena, Ebera i Heatha (1999). Jej definicja jest następująca:

Niech X jest zmienną losową przedstawiającą całkowite straty ubezpieczyciela, a ρ (X) miarą ryzyka, która ma następujące właściwości:

1) subaddytywność:

$$\bigwedge_{X,Y} \rho\,(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y) \tag{1}$$

dla wszystkich losowych strat X i Y,

2) monotoniczność:

$$\bigwedge_{X,Y} X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \tag{2}$$

dla wszystkich losowych strat X,Y,

3) jednorodność:

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \tag{3}$$

dla losowych strat X oraz wszystkich $\lambda \geq 0$; stąd wynika, że:

$$\rho\,(0) = 0$$

4) niezmienniczość:

$$\rho(X+\alpha) = \rho(X)+\alpha \tag{4}$$

dla wszystkich losowych strat X oraz stałej straty α.

Miarę nazywamy **koherentną miarą ryzyka** wtedy, gdy spełnione są wszystkie powyższe aksjomaty. Na ich podstawie można twierdzić, że kapitał potrzebny do pokrycia potencjalnych strat ubezpieczyciela, powinien spełniać dwa następujące założenia:

– wraz ze zmianami (powiększeniem) strat, powinien następować odpowiednio wzrost kapitału,
– uzasadnione jest określenie tak dużego kapitału, aby możliwe było pokrycie wszystkich potencjalnych strat.

Pozostaje więc postawić pytanie: jak określić wysokość kapitału i aktywów w celu pokrycia przyszłych strat? Odpowiedź na nie możemy uzyskać analizując przedstawione wcześniej aksjomaty miary koherentnej. Tak zdefiniowana miara ryzyka spełnia potrzeby istnienia regulatora ubezpieczeń. Chodzi o to, aby ubezpieczyciel posiadał dostateczny kapitał (skwantyfikowany przez ρ(X)) do pokrycia strat każdego z ubezpieczonych ryzyk. Część majątku stanowią bieżące składki płacone przez ubezpieczonych, natomiast resztę stanowi kapitał ubezpieczyciela.

Interpretacje powyższych aksjomatów można przenieść na rynek ubezpieczeniowy, gdzie ich znaczenie jest następujące:

1. Subaddytywność – przedstawia zróżnicowanie strat w portfelu. Aksjomat ten można odnieść do łączenia ryzyka ubezpieczeniowego. Przy różnych maksymalnych stratach, jeśli dwaj ubezpieczyciele się łączą, to nie muszą zwiększać strat; w rzeczywistości, jeśli fuzja jest korzystna, mogą nawet zmniejszyć wspólne straty (fuzja nie kreuje dodatkowych ryzyk). Przykład pierwszy ilustruje, że suma maksymalnych strat jest nie mniejsza niż maksymalna suma strat. Aksjomat ten zakłada również, że przy jednakowych stratach zachodzi nierówność:

   $$\rho(nX) \leq n\,\rho(X) \text{ dla } n = 1,2,...$$

   Suma ρ(X) + ρ(Y) może być odpowiednią gwarancją globalnego ryzyka ρ (X + Y). Aksjomat ten można uznać za odpowiedź na pytanie o wysokość kapitału przeznaczonego do pokrycia przyszłych strat.
2. Monotoniczność – aksjomat ten ma następujące znaczenie w ubezpieczeniach: jeśli ubezpieczyciel A ma całkowite straty, nie większe niż ubezpieczyciel B ($X \leq Y$), to aktywa ubezpieczyciela A mogą być mniejsze od aktywów ubezpieczyciela B ($\rho(X) \leq \rho(Y)$).
3. Jednorodność – jeśli ubezpieczyciel kupuje λ procent udziału reasekuracji, to może zredukować swoje aktywa o λ procent. Aksjomat ten jest szczególnym przypadkiem subaddytywności, który pokazuje, co wydarzy się w sytuacji, gdy nie zajdzie przypadek zróżnicowania całkowitych strat (jeśli $X_1 = X_2 = X$, to $\rho(2X) = 2\,\rho(X)$).

Korzyścią wynikającą z prawidłowo sformułowanych aksjomatów miary ryzyka jest pewność decydenta o właściwie podjętych decyzjach w zarządzaniu ryzykiem.

Przykład 1

Miarę ryzyka zdefiniujemy jako maximum X_i, gdzie X_i jest zmienną losową reprezentującą straty i-tego ryzyka. Każde ryzyko jest jednakowo prawdopodobne. Niech:

$$\rho(X_i) = \text{maximum}(X_i) \qquad (5)$$

Tabela 1

Sytuacja	X_1	X_2	$2X_2$	$X_2 + 2$	$X_1 + X_2$
1	3	1	2	3	4
2	2	3	6	5	5
3	5	2	4	4	7
4	4	5	10	7	9
5	1	4	8	6	5
ρ (X)	5	5	10	7	9

Źródło: Obliczenia własne na podstawie: Hossack, Pollard, Zenwirth (1995).

Sprawdzimy, czy spełnione są aksjomaty 1-4:

1) subaddytywność:

$$\rho\,(X_1 + X_2) = 9 \leq \rho\,(X_1) + \rho\,(X_2) = 10$$

zatem maksymalna strata sumy zmiennych ($X_1 + X_2$) nie jest większa od sumy maksymalnych strat dla zmiennych X_1 oraz X_2,

2) monotoniczność:

$$X_2 \leq X_2 + 2 \Rightarrow \rho(X_2) \leq \rho\,(X_2 + 2)$$

maksymalne straty są również większe dla większych strat,

3) jednorodność:

$$\rho\,(2X_2) = 2\,\rho\,(X_2)$$

jeśli każda strata wzrośnie dwukrotnie, to maksymalna strata również wzrośnie dwukrotnie,

4) niezmienniczość:

$$\rho\,(X_2 + 2) = \rho\,(X_2) + 2$$

jeśli każda ze strat wzrośnie o 2, to maksymalna strata również wzrośnie o 2.

Wszystkie aksjomaty są spełnione, więc miara określona wzorem (5) jest koherentna.

Dobrze określone aksjomaty zdefiniowanej przez nas miary ryzyka są korzystne przy podejmowaniu właściwych decyzji w zarządzaniu ryzykiem. Stosowanie miary koherentnej jest uzasadnione. Tak zdefiniowana miara ryzyka spełnia żądanie, aby ubezpieczyciel posiadał dostatecznie duży kapitał (skwantyfikowany przez ρ (X)) do pokrycia strat każdej z ubezpieczonych sytuacji.

Przykład 2

Innym przykładem miary ryzyka jest miara zwana wartością końcową ryzyka (*Tail Value at Risk*):

$$\text{TVaR}\,\alpha\,(X) = \text{średnia z najwyższych } (1 - \alpha)\% \text{ strat} \qquad (6)$$

Tabela 2 uwzględnia $\alpha = 40\%$ oraz 60% względem danych umieszczonych w tab. 1.

Tabela 2

Sytuacja	X_1	X_2	$2X_2$	X_2+2	X_1+X_2
$TVaR_{40\%}$	4.0	4.0	8.0	6.0	7.0
$TVaR_{60\%}$	4.5	4.5	9.0	6.5	8.0

Średnia z trzech największych (60%) strat wynosi:

$$TVaR_{40\%}\ (X_1) = (5 + 4 + 3)\ \frac{1}{3}\ = 4$$

natomiast średnia z dwóch największych strat (40%):

$$TVaR_{60\%}\ (X_1) = (5 + 4)\ \frac{1}{2}\ = 4{,}5$$

Miara określona wzorem (6) jest zatem koherentna. Na podstawie tab. 2 stwierdzamy, że:

1) subaddytywność zachodzi:

$$TVaR_{40\%}\,(X_1 + X_2) = 7 < TVaR_{40\%}\,(X_1) + TVaR_{40\%}\,(X_2) = 8$$

2) monotoniczność jest spełniona:

$$X_2 < X_2 + 2 \Rightarrow TVaR_{40\%}\,(X_2) = 4 < TVaR_{40\%}\,(X_2 + 2) = 6$$

3) jednorodność jest spełniona:

$$TVaR_{40\%}\,(2X_2) = 8 = 2\ TVaR_{40\%}\,(X_2)$$

4) niezmienniczość zachodzi:

$$TVaR_{40\%}\,(X_2 + 2) = 6 = TVaR_{40\%}\,(X_2) + 2$$

Zdefiniowana miara $TVaR_{40\%}$ (X) jest miarą koherentną. Tail Value at Risk jest miarą, która dotyczy bardzo dużych strat. Rozkłady występujących tu zmiennych losowych są rozkładami o grubych ogonach.

2.1.1. Konstrukcja miary koherentnej

Poniższe twierdzenie, przedstawione w pracy Meyersa (2001), pozwala na konstrukcję miary koherentnej.

Twierdzenie 1

Niech Ω będzie skończonym zbiorem ryzyk, a X stratą poniesioną przez ubezpieczyciela. Każda strata jest elementem zbioru Ω.

Miara ryzyka ρ jest koherentna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina ***P*** miar prawdopodobieństwa zdefiniowana na zbiorze Ω taka, że:

$$\rho(X) = \sup \{ E_P[X] : P \in \boldsymbol{P} \} \tag{7}$$

gdzie $E_P[X]$ jest wartością oczekiwaną zmiennej X dla zadanego prawdopodobieństwa $P \in \boldsymbol{P}$.

Tak zdefiniowana miara jest koherentna.

Jednym ze sposobów konstrukcji miar prawdopodobieństwa na zbiorze Ω jest utworzenie zbioru $A = \{A_i\}_{i=1}^{m}$ podzbiorów Ω takich, że $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$. Niech n_i będzie liczbą elementów w A_i. Zakładamy, że wszystkie elementy w zbiorze Ω są jednakowo prawdopodobne. Miarę prawdopodobieństwa P_i definiujemy na elementach $\omega \in \Omega$ jako prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P_i(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_i}, & \text{jeśli } \omega \in A_i \\ 0, & \text{jeśli } \omega \notin A_i \end{cases}$$

Przykład 3

Powyższe rozważania zilustrujemy przykładem.

Tabela 3 przedstawia kolejne ryzyka i wartości funkcji strat.

Tabela 3

Ryzyko	Wartość X_1	Wartość X_2	X_1+X_2	$2X_1$	X_1+3
1	1	2	3	2	4
2	3	4	7	6	6
3	4	5	9	8	7
4	6	7	13	12	9

a) $\Omega = \{1,2,3,4\}$

Niech $A_1 = \{1,2\}$ oraz $A_2 = \{3,4\}$, wówczas spełnione są założenia:

$$A = \{A_1, A_2\},\ A_1 \cup A_2 = \Omega,\ n_1 = 2,\ n_2 = 2$$

Ryzyko pierwsze przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem wynoszącym $\frac{1}{2}$, ryzyko drugie przyjmuje wartość 3 z prawdopodobieństwem wynoszącym również $\frac{1}{2}$. Ryzyko trzecie i czwarte z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przyjmują wartości kolejno równe cztery i sześć.

Obliczmy wartości oczekiwane P_1 dla ryzyka pierwszego i drugiego oraz P_2 dla ryzyka trzeciego i czwartego:

$$E_{P1}[X_1] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$E_{P2}[X_1] = 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\rho\ (X_1) = \sup\ \{E_{Pi}[X_1] : i = 1,2\} = \sup\ \{2,5\} = 5$$

Sprawdźmy, czy miara określona w przykładzie 3 jest koherentna.

$$E_{P1}[X_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$E_{P1}[X_2] = 5 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

1) subaddytywność jest spełniona:

$$\rho\ (X_2) = \sup\{3,6\} = 6$$

$$\rho\ (X_1+X_2) = \sup\{5, 11\} \leq \rho\ (X_1) + \rho\ (X_2) = 11$$

2) monotoniczność jest spełniona:

$$X_1 \leq X_2 \Rightarrow \rho(X_1) = \sup\{2,5\} = 5 < \rho(X_2) = \sup\{3,6\} = 6$$

3) jednorodność jest spełniona:

$$\rho(2X_1) = \sup\{4, 10\} = 10$$

$$2\rho(X_1) = 10$$

4) niezmienniczość zachodzi:

$$\rho(X_1 + 3) = 8$$

$$\rho(X_1) + 3 = 8$$

Wszystkie aksjomaty zostały spełnione, więc miara zdefiniowana wzorem (7) jest miarą koherentną.

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

Jeśli na podstawie tab. 3 określimy inną miarę koherentną $B_i = \{ i \}$, to wartości oczekiwane wyniosą:

$$E_{P1}[X_1] = 1,\quad E_{P2}[X_1] = 3,\quad E_{P3}[X_1] = 4,\quad E_{P4}[X_1] = 6$$

W tym przypadku miara $\rho_B(X_1) = \sup\{ E_{Pi}[X_1]: i=1,2,3,4\} = 6$

$$E_{P1}[X_2] = 2,\quad E_{P2}[X_2] = 4,\quad E_{P3}[X_2] = 5,\quad E_{P4}[X_2] = 7$$

miara $\rho_B(X_2) = \sup\{ E_{Pi}[X_2]: i=1,2,3,4\} = 7$

Opierając się na tab. 3 sprawdzamy aksjomaty miary koherentnej:

1) subaddytywność jest spełniona:

$$\rho_B(X_1 + X_2) = 13;\ \rho_B(X_1) + \rho_B(X_2) = 6+7 = 13$$

2) monotoniczność zachodzi:

$$X_1 \leq X_2 \Rightarrow \rho_B(X_1) = 6 \leq \rho_B(X_2) = 7$$

3) jednorodność jest spełniona:

$$\rho_B(2X_1) = 12 = 2\rho_B(X_1)$$

4) niezmienniczość jest spełniona:

$$\rho_B(X_1+3) = 9 = \rho_B(X_1) + 3$$

Miara $\rho_B(X)$ jest więc miarą koherentną.

2.2. Ryzyko ubezpieczeń o wysokim wskaźniku szkodowości

W sytuacji, gdy występują duże szkody (tak jak w przypadku ryzyka o dużej szkodowości) pojawiają się kłopoty z danymi dla końcowych przedziałów szeregu rozdzielczego. Rozkłady występujących tu zmiennych są rozkładami o grubych ogonach, zatem występują kłopoty z określeniem ogona dystrybuanty empirycznej. Dla ogona możemy skonstruować dystrybuantę ciągłą wyrażoną wzorem analitycznym. Do modelowania ogonów rozkładów jest często stosowany rozkład Pareto.

Dla rozkładu Pareto funkcja gęstości ma postać:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \qquad \text{dla } x > \beta \tag{8}$$

dystrybuanta:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \qquad \text{dla } x > \beta \tag{9}$$

$$m = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \qquad \text{dla } \alpha > 1 \tag{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha - 2} - \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}\right)^2 \qquad \text{dla } \alpha > 2 \tag{11}$$

Parametr α charakteryzuje wagę ogona dystrybuanty. Im mniejsza jest jego wartość, tym cięższy jest ogon. Dla $\alpha \le 1$ nie istnieje wartość oczekiwana rozkładu, dla $\alpha \le 2$ rozkład nie ma skończonej wariancji, z kolei dla $2 < \alpha \le 3$ skośność jest nieskończona. W praktyce wielkości odszkodowań są z góry ograniczone i następuje odcięcie ogona przekraczające dane ograniczenie.

Definicja 1

Mówimy, że rozkład nieujemnej zmiennej losowej X jest ciężko-ogonowy, jeśli:

$$E\, e^{rX} = \infty \text{ dla każdego } r > 0$$

Ng, Tang i Yang (2002) przedstawiają twierdzenie pozwalające określić maximum sum ciężkoogonowych rozkładów zmiennych losowych.

2.3. Inne miary ryzyka

Często stosowanymi przez aktuariuszy miarami ryzyka są miary , które nie są koherentne. Są to klasyczne miary ryzyka, takie jak: odchylenie standardowe (im większa wartość odchylenia, tym większe ryzyko), współczynnik zmienności, parametry pozycyjne (kwartale, percentyle, odchylenie ćwiartkowe).

Prześledzimy następujące przykłady dwóch popularnych miar statystycznych. W przykładzie czwartym miara nie jest subaddytywna, a w przykładzie piątym nie spełnia aksjomatu monotoniczności.

Wprowadzimy definicję miary VaR (*Value at Risk*). Niech α oznacza pewne prawdopodobieństwo, wtedy:

$$\mathrm{VaR}\,\alpha\,(X) = \inf\,\{x: P\,(X \le x) > \alpha\}$$

Przykład 4

Jedną z miar ryzyka jest VaR (*Value at Risk*), gdzie ρ (X) jest 85. percentylem losowych strat X. Tabela 4 przedstawia sytuacje, w których dla zmiennej X_1 nie więcej niż 85% sytuacji ma wartości wynoszące zero, podobnie dla zmiennej X_2, stąd suma ich miar ma wartość zero; dla sumy zmiennych X_1 oraz X_2 percentyl 85% wynosi 10.

Tabela 4

Sytuacja	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
1	2	3	4
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

cd. tabeli 4

1	2	3	4
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	10	10
10	10	0	10
$VaR_{85\%}$	0	0	10

$$\rho(X_1) + \rho(X_2) = 0 < \rho(X_1 + X_2) = 10$$

Wynika stąd, że nie jest spełniony aksjomat subaddytywności, więc miara nie jest koherentna.

Przykład 5

W kalkulacji składki netto często korzysta się z zasady odchylenia standardowego. Przyjęta według tej zasady miara ryzyka nie jest koherentna, gdyż nie jest monotoniczna.

Tabela 5

Sytuacja	X_1	X_2
1	1,5	5
2	2,5	5
3	3,5	5
4	4,5	5
5	5	5
6	5	5
7	4,5	5
8	3,5	5
9	2,5	5
10	1,5	5
$E(X_i)$	3,4	5
$\sigma(X_i)$	1.28	0
$E(X_i) + 2\sigma(X_i)$	5.96	5

$$\rho(X) = E(X) + 2\sigma(X_i) \tag{12}$$

$$\rho(X_1) = 5.96$$

$$\rho(X_2) = 5$$

1) subaddytywność zachodzi:

$$\rho(X + Y) = E(X+Y) + 2\sigma(X+Y) \leq E(X) + E(Y) + 2\sigma(X) + 2\sigma(Y) =$$

$$= \rho(X) + \rho(Y)$$

2) monotoniczność nie zachodzi:

$$\rho(X_1) = 5.96 \geq \rho(X_2) = 5 \qquad \text{dla } X_1 \leq X_2$$

Miara zdefiniowana wzorem (7) nie jest miarą koherentną, gdyż nie jest monotoniczna.

Wprowadźmy definicję miary ryzyka o nazwie *Tail Conditional Expectation* (TCE) lub *Tail Value at Risk* (TVaR), o którym była mowa w przykładzie 2:

$$TCE_\alpha(X) = TVaR_\alpha(X) = E[X : X \geq VaR_\alpha(X)]$$

Tak zdefiniowana miara jest koherentna.

Podsumowanie

Dla właściwej oceny firmy ubezpieczeniowej istotna jest wycena stosowanych przez nią taryf ubezpieczeniowych. Niekompletne dane we wszelkich analizach statystycznych to jedna z poważniejszych przyczyn zmniejszenia dokładności wyników przy szacowaniu składki ubezpieczeniowej. Dlatego też wybór odpowiedniej miary ryzyka jest bardzo istotny. Oprócz stosowanych powszechnie miar ryzyka zaproponowano miarę koherentną, której stosowanie jest uzasadnione. Tak zdefiniowana miara spełnia żądanie, aby ubezpieczyciel posiadał dostatecznie duży kapitał, skwantyfikowany przez $\rho(X)$, do pokrycia strat każdej z ubezpieczonych sytuacji. Opierając się na literaturze przedmiotu zaproponowano inne miary ryzyka, takie jak Value at Risk czy Tail Value at Risk. Dobrze zdefiniowana miara ryzyka może być wykorzystywana do kalkulacji składki w ubezpieczeniach majątkowych, życiowych czy emerytalnych.

Literatura

Analiza i metody zmniejszania ryzyka w polskim systemie ubezpieczeń majątkowych. Red. W. Ronka-Chmielowiec. AE, Wrocław 1998.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.: *Coherent Measures of Risk.* „Math. Finanse 9” 1999, No 3.

Hossack J.B., Pollard J.H., Zenwirth B.: *Introductory Statistics with Applications in General Insurance.* Cambridge University Press, Cambridge 1995.

Meyers G.G.: *Setting Capital Requirements With Coherent Measures of Risk*. Part 1, 2. „The Actuarial Review” 2002, August-October.

Meyers G.G.: *The Cost of Financing Insurance*. FCAS, MAAA „Astin Bulletin” 2001.

Meyers G.G.: *Coherent Measures of risk An Exposition for the Lay Actuary.* www.risklab, 2000.

Ng K.W., Tang Q.H., Yang H.: *Maxima of Sums of Heavy-Tailed Random Variables.* „Astin Biulletin” 2002, Vol. 32, No 1.

Plucińska A., Pluciński E.: *Elementy probabilistyki.* PWN, Warszawa 1979.

Teoria i Praktyka Ubezpieczeń Gospodarczych. Red. H. Ogrodnik. AE, Katowice 2000.

Ubezpieczenia – Rynek i Ryzyko. Red. W. Ronka-Chmielowiec. PWE, Warszawa 2002.

COHERENT MEASURES OF THE INSURANCE RISK

Summary

The main operation of the insurer is the calculation of insurance premium and measurement of risk. The present paper develops the risk measures, describes the coherent ones to define four axioms: subadditivity, monotonicity, positive homogeneity and translation invariance. It also provides examples and application of the coherent measures in insurance.