Henryk Zawadzki

RÓWNANIE LOGISTYCZNE A BŁĄDZENIE LOSOWE NA PROSTEJ I PRAWO ARCUSA SINUSA

Wstęp

Obserwując „typowe" trajektorie generowane przez chaotyczne systemy dynamiczne, nawet te teoretycznie najprostsze – jednowymiarowe z czasem dyskretnym, można odnieść wrażenie, że ma się do czynienia z trajektoriami procesów stochastycznych. Dopiero diagramy korelacyjne, a dla systemów wielowymiarowych wyspecjalizowane testy i narzędzia, jak np. wymiar korelacyjny czy wykładniki Lapunowa, pozwalają – i to też nie zawsze – odróżnić deterministyczny chaos od losowości. Nie jest to jednak niczym zaskakującym, jeśli weźmie się pod uwagę to, iż asymptotyczne zachowanie się pewnych charakterystyk procesów losowych i deterministycznych jest opisane za pomocą tych samych rozkładów prawdopodobieństwa.

W opracowaniu przedstawiono jeden z takich przypadków, pokazujący, co wspólnego ma nieskończony ciąg losowych doświadczeń wykonywanych według schematu Bernoulliego oraz związany z nim proces błądzenia losowego na prostej z zachowaniem się prawie wszystkich trajektorii generowanych przez system dynamiczny (X, f), w którym $X = [0, 1]$, $f : X \to X$, $f(x) = 4x(1-x)$, lub – co na jedno wychodzi – z asymptotycznym zachowaniem się rozwiązań równania rekurencyjnego (3), zwanego równaniem logistycznym.

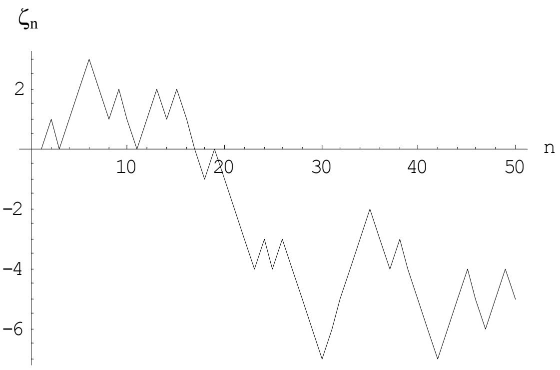
1. Błądzenie losowe na prostej i prawo arcusa sinusa

Błądzenie losowe (przypadkowe) na prostej, znane także pod nazwą błądzenia losowego w $\Re$ ($\Re$ – zbiór liczb rzeczywistych) lub procesu Bernoulliego, jest jednym z najwcześniej zdefiniowanych i badanych procesów stochastycznych. Pewne warianty tego procesu znalazły zastosowanie m.in. w fizyce, jako prosty model dyfuzji, oraz w finansach, w modelowaniu cen instrumentów finansowych (Tapiero, 1998; Weron, Weron, 1998).

Błądzenie losowe na prostej można zdefiniować jako proces stochastyczny (ζ_n) (n = 0, 1, ...), w którym:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

gdzie (ξ_n) (n = 1, 2, ...) jest ciągiem niezależnych, jednowymiarowych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. W przypadku, gdy zmienne losowe ξ_n mają nieco zmodyfikowany rozkład Bernoulliego z parametrem $p = \frac{1}{2}$, tj. gdy $P\{\xi_n = -1\} = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2}$, błądzenie nazywa się symetrycznym. Błądzenie symetryczne interpretuje się często jako ruch cząsteczki, która zaczynając od punktu 0 w chwili t = 0, porusza się w chwilach t = 1, 2,... „skokowo" po osi liczbowej, za każdym razem o jednostkę w lewo lub w prawo, z tym samym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{2}$. Wykresy trajektorii procesu błądzenia losowego można przedstawić jako łamane, złożone z odcinków o wierzchołkach $s_n = (n, \zeta_n)$ (rys. 1).



Rys. 1. Fragment przykładowej trajektorii symetrycznego procesu Bernoulliego (ζ_n), w którym $\xi_n = \pm 1$

Jeżeli $x > 0$ i y są liczbami całkowitymi, to łamana:

$$(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \dots, s_x) \subset \Re^2$$

w której $s_x = (x, y)$ nazywa się drogą (cząsteczki) od początku układu współrzędnych do punktu o współrzędnych (x, y). Mówimy, że cząsteczka ta spędza czas od $k - 1$ do k na dodatniej stronie osi liczbowej, jeżeli k-ty odcinek jej drogi leży na dodatniej stronie osi, tzn. jeżeli co najmniej jedna z rzędnych wierzchołków s_{k-1} i s_k jest dodatnia. Prawo arcusa sinusa, a dokładnie – pierwsze prawo arcusa sinusa mówi (zob. np. Feller, 1966), że dla każdego ustalonego $\alpha \in (0, 1)$ prawdopodobieństwo, że frakcja k/n czasu spędzonego na dodatniej stronie osi liczbowej będzie mniejsza od α, zmierza przy $n \to \infty$ do wartości:

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{2}{\pi} arc\sin\sqrt{\alpha} \qquad (2)$$

Oznacza to, że wielkość k/n ma (asymptotycznie) rozkład arcusa sinusa. Rozkład ten jest szczególnym przypadkiem rozkładu beta (β ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)). Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie arcusa sinusa ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

dystrybuanta wyraża się wzorem:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} arc\sin\sqrt{x}$$

a wartość oczekiwana i wariancja są odpowiednio równe $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$.

2. O probabilistycznych własnościach rozwiązań równania logistycznego

Na nieregularny, „losowy” charakter rozwiązań równania logistycznego:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad \lambda > 0, \; x_0 \in [0,1], \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (3)$$

w przypadku $\lambda = 4$ zwrócili po raz pierwszy uwagę Ulam i Neumann (1947), proponując wykorzystanie tego równania jako generatora liczb losowych. Jednakże obiektem zainteresowania i przedmiotem intensywnych badań szerokiego grona naukowców (głównie matematyków, ale również fizyków, biologów i ekonomistów) stało się to równanie dopiero po ukazaniu się artykułu Maya (1976). Dziś jest ono jednym z najczęściej opisywanych w literaturze przykładów tzw. równań chaotycznych. Coraz częściej zresztą zamiast o równaniu rekurencyjnym (3) pisze się o jednowymiarowym, chaotycznym systemie dynamicznym z czasem dyskretnym (X, f_λ), w którym $X = [0, 1]$, $f_\lambda: X \rightarrow X$, $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda \in (0, 4]$. Podejście takie umożliwia formułowanie związanych z tym równaniem problemów w języku teorii nieliniowych systemów dynamicznych i ich rozwiązywanie za pomocą metod tejże teorii. Warto podkreślić, że jak dotychczas, jedynie dla wartości $\lambda = 2$ oraz $\lambda = 4$ udało się znaleźć rozwiązania równania logistycznego w postaci $x_n = \varphi(n, x_0)$ (Falconer, 1997; Sprott, 2003). Dla $\lambda = 2$ mamy:

$$x_n = \frac{1}{2}\{\exp[2^n(\ln(2x_0 + 1)] - 1\} \tag{4}$$

a dla $\lambda = 4$:

$$x_n = \frac{1}{2}\{1 - \cos[2^n \operatorname{arc}\cos(1 - 2x_0)]\} \tag{5}$$

Jak już zostało wspomniane, równanie (3) może być wykorzystane jako generator liczb losowych. Dowiedziono bowiem, że dla $\lambda = 4$ i prawie wszystkich (w sensie miary Lebesgue'a w $\Re$) punktów $x_0 \in [0, 1]$ generuje ono ciągi liczb losowych (pseudolosowych) o rozkładzie arcusa sinusa. Prawdopodobieństwo, że dla $n \rightarrow \infty$ obliczona za pomocą wzorów (3) lub (5) liczba x_n należy do przedziału $\Delta = [0, \alpha]$ $(\alpha \in [0, 1]$, będzie równe:

$$P(x_n \in \Delta) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{6}$$

czyli będzie równe prawdopodobieństwu, że w procesie błądzenia losowego na prostej, frakcja k/n czasu spędzonego przez cząsteczkę na dodatniej stronie osi liczbowej będzie mniejsza od α (wzór (2)).

Formalnie rzecz ujmując, generowanie przez równanie rekurencyjne:

$$x_{n+1} = f(x_n)\ , n = 0, 1, 2, ...$$

gdzie $x_0 \in X$, $f : X \rightarrow X$, (czy odpowiadający mu system dynamiczny (X, f)) rozkładu prawdopodobieństwa o funkcji gęstości g, należy rozumieć jako istnienie miary μ o gęstości g, niezmienniczej względem funkcji f. Dokładniej, niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą ($\mathcal{M}$ oznacza σ-ciało podzbiorów zbioru X, na których określona jest miara μ, czyli zbiorów μ-mierzalnych) i niech $f : X \rightarrow X$ będzie funkcją mierzalną, czyli funkcją spełniającą warunek $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{M}$. Funkcja f zachowuje miarę μ, jeżeli dla każdego zbioru A ∈ $\mathcal{M}$, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Miarę μ nazywamy wtedy niezmienniczą względem funkcji f. Miara μ ma gęstość g, jeżeli dla każdego zbioru A ∈ $\mathcal{M}$:

$$\mu(A) = \int_A g(x)dx$$

gdzie g : X → [0, ∞) jest funkcją mierzalną względem miary Lebesgue'a w X.

Ulam i Neumann (1947) zasugerowali jedynie, że dla równania (3) miara niezmiennicza istnieje. Wzór:

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{7}$$

którym określona jest ta miara, otrzymał Rechard (1956) za pomocą operatora Frobeniusa-Perrona $\mathcal{P}$ (Hunt i in., 2002; Lasota, Mackey, 1994). Operator $\mathcal{P}$ miał w tym przypadku postać:

$$\mathcal{P}\ f(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left[f\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x}\right)\right)\right]$$

Funkcja gęstości miary μ ze wzoru (7) jest rozwiązaniem równania funkcyjnego $\mathcal{P} f = f$, czyli punktem stałym operatora $\mathcal{P}$.

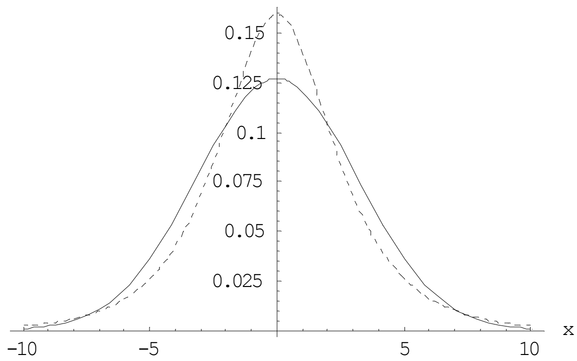
Stosując przekształcenie:

$$Y = \ln\frac{X}{1-X} \tag{8}$$

można za pomocą wzoru (3) wygenerować liczby pseudolosowe o rozkładzie zbliżonym do rozkładu normalnego N(0, π), czyli tzw. „normalny" lub „gaussowski" chaos. Łatwo bowiem pokazać, że jeśli zmienna losowa X ma rozkład arcusa sinusa, to zmienna losowa Y, zdefiniowana wzorem (8), ma rozkład o gęstości:

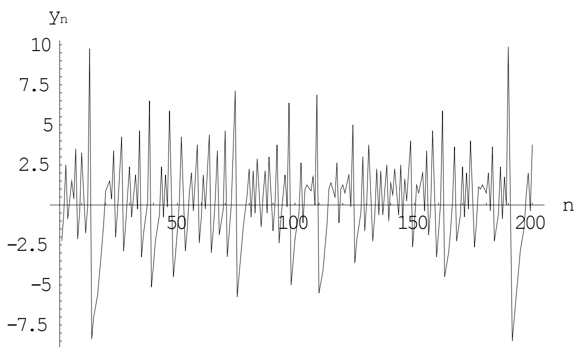
$$g(x) = \frac{1}{\pi\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)} = \frac{\sec \mathrm{h}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\pi} \tag{9}$$

z wartością oczekiwaną równą zero i odchyleniem standardowym π (rys. 2).

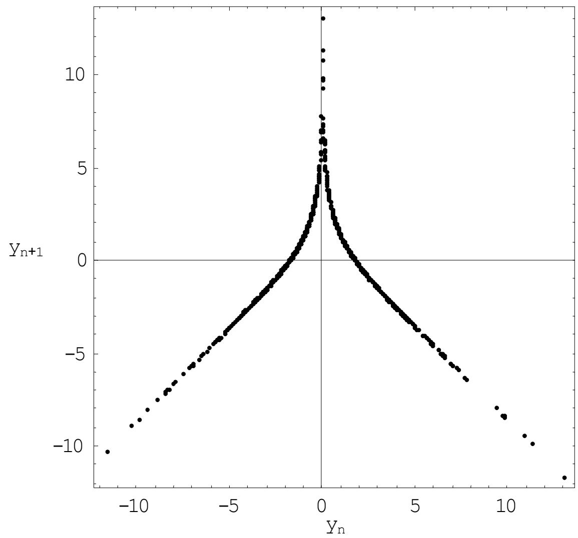


Rys. 2. Wykres funkcji gęstości rozkładu normalnego N(0, π) i funkcji gęstości określonej wzorem (9) (linia przerywana)

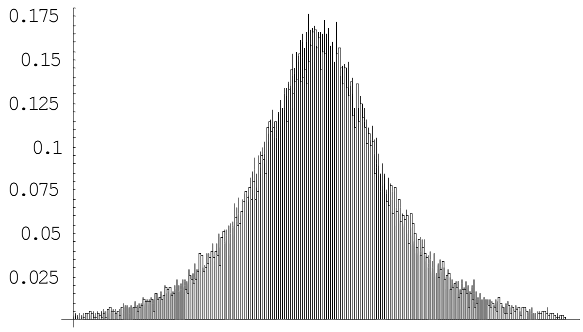
Na rys. 3, 4 i 5 przedstawiono kolejno 200 pierwszych wyrazów ciągu (y_n), obliczonych na podstawie wzorów (3) i (8), oraz diagram korelacyjny i histogram (dla $x_0 = 0.1$).



Rys. 3. 200 pierwszych elementów ciągu (y_n)



Rys. 4. Diagram korelacyjny dla (y_n) (n = 1000)



Rys. 5. Histogram dla (y_n) (n = 100 000)

Podsumowanie

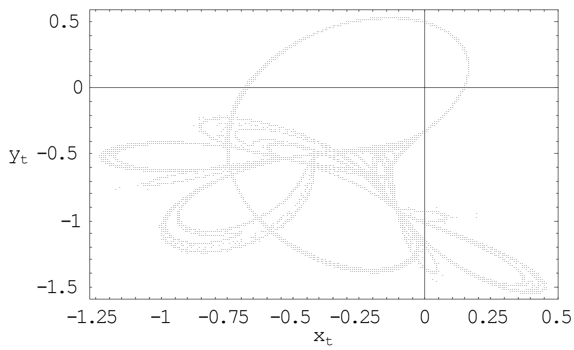
Wspomniany w rozdziale 2 problem wyznaczania miary (funkcji gęstości g miary) μ, niezmienniczej względem odwzorowania f, jest w przypadku niektórych odwzorowań trudny i otwarty. Jest tak m.in. w odwzorowaniu Hénona:

$$f(x, y) = (1 - 1.4x^2 + 0.3y, x)$$

oraz odwzorowaniu Tinkerbella (Sprott, 2003):

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 + 0.9x - 0.6y,\ 2xy + 2x + 0.5y)$$

Być może problem wyznaczenia miary niezmienniczej dla któregoś z tych chaotycznych odwzorowań zostanie dołączony do listy problemów Smale'a (1998), np. w miejsce rozwiązanego niedawno problemu nr 14, czyli problemu istnienia dziwnego atraktora Lorenza (Tucker, 2002).



Rys. 6. Atraktor systemu dynamicznego generowanego przez odwzorowanie Tinkerbella ($x_0 = -0.72$, $y_0 = -0.64$)

Literatura

Falconer K.: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester-New York 1997.

Feller W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa.* T. I. PWN, Warszawa 1966.

Hunt B.R., Kennedy J.A., Li T.Y., Nusse H.E.: *SLYRB Measures: Natural Invariant Measures for Chaotic Systems*. „Physica D" 2002, 170.

Lasota A., Mackey M.C.: *Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg 1994.

May R.M.: *Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics*. „Nature" 1976, Vol. 261.

Rechard O.W.: *Invariant Measures for many-one Transformations*. „Duke Mathematical Journal" 1956, No 23.

Smale S.: *Mathematical Problems for the Next Century*. „Mathematical Intelligencer 20" 1998, No 2.

Sprott J.C.: *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press Inc., New York 2003.

Tapiero Ch.S.: *Applied Stochastic Models and Control for Finance and Insurance*. Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London 1998.

Tucker W.: *A Rigourous ODE Solver and Smale's 14th Problem*. „Foundations of Computational Mathematics" 2002, No 2.

Ulam St.M, von Neumann J.: *On Combination of Stochastic and Deterministic Processes*. „Bulletin of the American Mathematical Society" 1947, Vol. 53.

Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996.

LOGISTIC EQUATION AND A LINE RANDOM WALK PROCESS AND ARCUS SINUS RULE

Summary

It is often difficult to distinguish between typical trajectories generated by chaotic dynamical systems and trajectories of stochastic processes. Asymptotic behaviour of some characteristics of the deterministic (chaotic) systems and random processes are sometimes the same random distributions. In this article we have described an example showing what one of the basic models of probability theory has in common, namely – random walk process with behaviour of almost all trajectories of one-dimensional chaotic, logistic map.