Katarzyna Zeug

REKONSTRUKCJA PRZESTRZENI STANÓW NA PODSTAWIE JEDNOWYMIAROWEGO EKONOMICZNEGO SZEREGU CZASOWEGO

Wprowadzenie

W ekonomii bardzo często można zaobserwować szeregi czasowe, które wykazują różne zachowania: regularne i nieregularne, symetryczne i asymetryczne. Istnieją dwa różne podejścia wyjaśniające taki rodzaj zachowań. Podejście tradycyjne utrzymuje, że rozwój szeregu czasowego może być przedstawiony w postaci liniowego modelu dynamicznego. W tym przypadku nieregularne zachowanie szeregu jest w pełni wyjaśnione przez wpływ zewnętrznych zaburzeń losowych, które niekoniecznie muszą mieć podłoże ekonomiczne.

W ostatnich latach dostrzeżono, że nieregularne zachowanie szeregu czasowego można zapisać w postaci nieliniowego modelu dynamicznego. Zauważono bowiem, że układy złożone mają własną dynamikę. Ich uporządkowanie i rozwój nie jest przypadkowy, lecz wynika z procesów, jakie w nich zachodzą. Modele te stały się bardzo ważne dla teorii ekonomii. Za ich pomocą można próbować opisywać zjawiska i procesy ekonomiczne, które przebiegają w sposób nieregularny, np. trudne do przewidzenia fluktuacje kursów walutowych oraz kursów akcji na giełdzie.

Od czasu gdy zaczęto rozwijać hipotezę o nieliniowości modelu dynamicznego, analiza szeregów czasowych została skierowana w stronę badań zajmujących się wykrywaniem ich nieliniowej natury. Ponieważ bardzo często trudno było jednoznacznie wskazać, który układ jest nieliniowym systemem deterministycznym, a który nieliniowym systemem stochastycznym, wykształciły się metody pozwalające na ich odróżnienie. Metody te rozwinęły się głównie w naukach ścisłych (fizyka, matematyka), ale znalazły również zastosowanie w ekonomii. Skupiają się one wokół domkniętego i niezmienniczego podzbioru przestrzeni stanów zwanego atraktorem*. Więź pomiędzy teoretyczną koncepcją atraktora a analizą obserwowanego szeregu czasowego pokazuje twierdzenie o zanurzeniu (Takens, 1981), którego konsekwencją jest rekonstrukcja systemu dynamicznego na podstawie jednowymiarowego szeregu czasowego.

Celem opracowania jest próba rekonstrukcji przestrzeni stanów na podstawie jednowymiarowego finansowego szeregu czasowego złożonego z notowań następujących walut: dolara amerykańskiego (USD), jena japońskiego (JPY) oraz funta brytyjskiego (GBP). W badaniach tych wykorzystano metodę opóźnień przedstawioną przez Takensa w 1981 r. Za pomocą całki korelacyjnej oszacowano czas opóźnień oraz wyznaczono wymiar zanurzenia, posługując się metodą fałszywego sąsiada.

Dane wykorzystane w opracowaniu pochodzą z WGPW z ostatnich dziesięciu lat. Ponieważ euro jest walutą obowiązującą od 1 stycznia 2002 r., nie uwzględniono jej w poniższych badaniach. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programów napisanych przez autorkę w języku programowania Visual Basic oraz pakietu Microsoft Excel.

1. Rekonstrukcja przestrzeni fazowej

W wielu przypadkach obserwacja systemu dynamicznego daje zaledwie cząstkowe informacje na temat jego natury, bardzo często dysponuje się jedynie jednowymiarowymi szeregami czasowymi. Dlatego podstawowym krokiem w analizie tych systemów jest ich rekonstrukcja. Można rekonstruować przestrzeń stanów systemu, która będzie w pewnym sensie równoważna z „oryginalną" przestrzenią, i zastosować ją np. w prognozie nieliniowych szeregów czasowych.

Po raz pierwszy metoda rekonstrukcji przestrzeni stanów, zwana metodą pochodnych, została przedstawiona przez Packarda (1980). Nieco później Takens (1981) wprowadził metodę opóźnień, która została uogólniona w pracy Sauera (1991). Jeszcze inną metodę, zwaną analizą czynnikową, zaproponowali Broomhead i King (1986).

W następnych rozdziałach przedstawiono metodę opóźnień oraz sposoby wyznaczania parametrów tej metody.

* Definicja atraktora znajduje się w dodatku zamieszczonym na końcu niniejszego opracowania.

1.1. Metoda opóźnień

Załóżmy, że stan pewnego układu dynamicznego w chwili t jest przedstawiony przez wektor $y(t) \in Y \subset R^m$. Przypuśćmy również, że związek pomiędzy stanami w kolejnych momentach czasu opisuje równanie różnicowe pierwszego rzędu:

$$y(t+1) = f(y(t)), \quad t = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

gdzie $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))$ oraz $f : Y \to Y$ jest nieznaną różniczkowalną funkcją nieliniową. Załóżmy ponadto, że znany jest tylko jednowymiarowy ciąg obserwacji $x(t)$, gdzie $x(t) = h(y(t))$ i $h : R^m \to R$ jest nieznanym odwzorowaniem. Mimo że mamy tak niewiele informacji na temat badanego układu dynamicznego (w każdej chwili t znamy wynik pomiaru tylko jednej zmiennej), możemy scharakteryzować jego stan w przestrzeni wielowymiarowej, tj. zrekonstruować atraktor badanego systemu, obliczyć jego wymiar, oszacować wykładniki Lapunowa, czy też entropię Kołmogorowa.

Twierdzenie Takensa o zanurzaniu dowodzi, że taki atraktor może być zrekonstruowany bez znajomości natury jego zmiennych czy postaci równania różnicowego.

Twierdzenie

Niech M będzie zwartą, m-wymiarową rozmaitością różniczkową. Dla par (f, h), $f \in Diff^2(M, M)$, $h \in C^2(M, R)$ jest własnością generyczną*, że odwzorowanie $\Phi : M \to R^{2m+1}$ określone wzorem:

$$\Phi_{(f,h)} = \left[h(y), h(f(y)), \ldots, h(f^{2m}(y))\right] \tag{2}$$

jest zanurzeniem , tj. dyfeomorfizmem klasy C^1, odwzorowującym M na $\Phi_{(f,h)}(M)$.

Stosując metodę opóźnień można skonstruować zbiór d zmiennych za pomocą jednowymiarowego szeregu czasowego:

$$x = (x(t), x(t-1), x(t-2), \ldots, x(1))$$

* Definicja własności generycznej, dyfeomorfizmu oraz m-wymiarowej rozmaitości znajduje się w dodatku.

Zmienne te otrzymuje się przesuwając „oryginalny” szereg czasowy o stałe opóźnienie τ, $\tau \in N$, w wyniku czego rekonstrukcja przestrzeni stanów wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
&x^d(t) = (x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau), \ldots, x(t-(d-1)\tau)) \\
&x^d(t-1) = (x(t-1), x(t-1-\tau), x(t-1-2\tau), \ldots, x(t-1-(d-1)\tau)) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x^d(j) = (x(j), x(j-\tau), x(j-2\tau), \ldots, x(j-(d-1)\tau)) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x^d((d-1)\tau+1) = (x((d-1)\tau+1), x((d-1)\tau+1-\tau), x((d-1)\tau+1-2\tau), \ldots, x(1))
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $x^d(j)$, ($j = (d-1)\tau + 1, \ldots, t$) są elementami *d*-wymiarowej zrekonstruowanej przestrzeni stanów.

Takens udowodnił, że dla $d \geq 2m + 1$, gdzie m jest wymiarem atraktora, a *d* jest wymiarem zanurzenia, przestrzeń stanów rozpięta przez zbiór *d* zmiennych będzie topologicznie równoważna z „oryginalną” przestrzenią. Niestety twierdzenie to nie określa, jak wyznaczyć parametry *d* i τ w równaniu (3). W praktyce, wyboru *d* zwykle dokonuje się metodą prób i błędów. Tradycyjnym podejściem jest obliczenie wymiaru korelacyjnego dla każdej wartości zmiennej *d*. Wielu badaczy (Čenys, Pyragas, 1988; Liebert i in., 1989; Kennel i in., 1992) podało metodę testowania wartości *d*, obserwując zachowanie sąsiednich punktów z przedziału [*d*, *d*+1].

Drugą sprawą jest wybór czasu opóźnień τ. Powyższe twierdzenie dotyczy jego nieznanych wartości. W praktyce, aby uniknąć niewłaściwych interpretacji, czas opóźnień wybiera się za pomocą funkcji autokorelacji lub funkcji wzajemnej informacji (*mutual information function*) (Farmer, Sidorovich, 1988), czy też za pomocą całki korelacyjnej (metoda *C-C*) (Grassberger, Procaccia, 1983). Metody wyboru parametrów *d* i τ zostaną omówione w dalszej części opracowania.

Innym problemem jest rekonstrukcja przestrzeni stanów w przypadku, gdy mamy do czynienia z danymi rzeczywistymi (np. rynek finansowy), wtedy równanie (1) ma postać:

$$y(t+1) = f(y(t)) + \xi(t) \tag{4}$$

gdzie $\xi(t)$ jest składnikiem losowym (szumem). Zakłócenia losowe pojawiają się na rynku podczas nieliniowego współdziałania inwestorów, których reakcje mogą zwiększać efekt jakichś zewnętrznych zaburzeń losowych. Innym powodem, dla którego powinno się zapisywać równanie (1) w postaci równania (4), jest to, że mały składnik szumu może w rezultacie zmylić badacza i doprowadzić do błędnych wniosków na temat postaci atraktora. Problem ten niestety nie został poruszony w poniższych rozważaniach, omówiono go natomiast w pracy Goodharta (1989).

1.2. Całka korelacyjna

Wymiar korelacyjny, po raz pierwszy wprowadzony przez Grassbergera i Procaccia, dostarcza wstępnych informacji na temat złożoności systemu dynamicznego. Można go obliczyć w przypadku, gdy nie wiemy, jaki jest wymiar przestrzeni stanów i mamy tylko jednowymiarowy szereg informacji.

Zanim wyjaśnimy, czym jest wymiar korelacyjny, określimy najpierw całkę korelacyjną (*C* (*d, r*)). *C* (*d, r*) jest zdefiniowana jako prawdopodobieństwo znalezienia pary wektorów, których odległość od siebie w zrekonstruowanej *d*-wymiarowej przestrzeni nie jest większa od *r*:

$$C(d,N,r,t)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n}I\left(r-r_{ij}\right),\quad r>0 \tag{5}$$

gdzie *I(x)* jest funkcją wskaźnikową (funkcja Heaviside) w postaci:

$$I(a)=\begin{cases}0 & \text{dla } a<0\\ 1 & \text{dla } a\geq 0\end{cases} \tag{6}$$

$n=N-t(d-1)$ jest liczbą wektorów w *d*-wymiarowej przestrzeni, *N* jest liczbą danych, t jest wskaźnikiem opóźnienia, a:

$$r_{ij}=\sqrt{\sum_{k=0}^{m-1}\left(x_{i-k}-x_{j-k}\right)^2}$$

Niech:

$$C(d,r,t)=\lim_{N\to\infty}C(d,N,r,t) \tag{7}$$

Wtedy wymiar korelacyjny definiujemy następująco:

Definicja

Granicę:

$$D_C=\lim_{r\to 0}\frac{\ln C(d,r,t)}{\ln r} \tag{8}$$

nazywamy wymiarem korelacyjnym atraktora systemu dynamicznego. Jeśli granica (8) istnieje, to dla małych wartości r zachodzi przybliżona równość:

$$\ln C(d,r,t) \approx D_C \ln r$$

Wprowadzimy teraz pojęcie statystyki *BDS* (Brock i in., 1991), która opiera się na pojęciu całki korelacyjnej i testuje hipotezę zakładającą, że zbiór danych jest iid (independent, identically distributed). Jest ona użyteczna dla systemów chaotycznych, jak również dla nieliniowych systemów stochastycznych.

Niech F będzie rozkładem wielowymiarowej zmiennej X w przestrzeni stanów oraz niech całka korelacyjna ma postać:

$$C(d,r) = \iint I(r - \|x - y\|)dF(x)dF(y), \quad r > 0 \tag{9}$$

Jeśli zmienna X jest iid, wtedy dla:

$$I(r - \|x - y\|) = \prod_{k=1}^{d} I(r - |x_k - y_k|)$$

otrzymujemy:

$$C(d,r) = C^d(1,r)$$

gdzie:

$$C(1,r) = \int [F(x+r) - F(x-r)]dF(x) \equiv C$$

Denker i Keller (1986) pokazali, że $C(d,N,r)$ jest estymatorem statystyki *U*. Natomiast Brock i in. (1991), korzystając z teorii statystyki *U* dla regularnych procesów, udowodnili, że jeśli $N \to \infty$, to $\sqrt{N}\left[C(d,N,r) - C^d(1,r)\right]$ ma rozkład normalny ze średnią zero i wariancją:

$$\sigma^2(d,r) = 4\left[K^d - C^{2d} + 2\sum_{i=1}^{d-1}\left(K^{d-i}C^{2i} - C^{2d}\right)\right] \tag{10}$$

gdzie:

$$K \equiv \int [F(x+r) - F(x-r)]^2 dF(x)$$

(zakładamy, że $K > C^2$). Zatem statystyka *BDS* będzie zdefiniowana wzorem:

$$BDS(d,N,r) = \frac{\sqrt{N}}{\sigma(d,r)}\left[C(d,N,r) - C^d(1,r)\right] \tag{11}$$

z rozkładem normalnym. Jeśli rozkład F jest nieznany, to nie możemy wyznaczyć wartości C i K oraz wariancji $\sigma^2(d,r)$. W takim przypadku $C(1,r)$ i $\sigma^2(d,r)$ muszą być oszacowane przez $C(1,N,r,t)$ i :

$$\overline{\sigma}^2 = 4\left\{d(d-1)\overline{C}^{2(d-1)}\left(\overline{K} - \overline{C}^2\right) + \overline{K}^d - \overline{C}^{2d} + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{i=1}^{d-1}\left[\overline{C}^{2i}\left(\overline{K}^{d-i} - \overline{C}^{2(d-i)}\right) - d\overline{C}^{2(d-i)}\left(\overline{K} - \overline{C}^2\right)\right]\right\}$$

gdzie:

$$\overline{C} = C(d,N,r,t)$$

oraz:

$$\overline{K} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{1\le i\le j\le k\le n} I\left(r - \left\|y_i - y_j\right\|\right) I\left(r - \left\|y_i - y_k\right\|\right)$$

Zatem statystyka *BDS* przyjmuje postać:

$$BDS(d,N,r) = \frac{\sqrt{N}}{\overline{\sigma}}\left[C(d,N,r,t) - C^d(1,N,r,t)\right] \tag{12}$$

Statystyka *BDS* jest bardzo pomocna w rozróżnianiu chaotycznych szeregów czasowych od nieliniowych stochastycznych szeregów czasowych. Własności statystyki *BDS* można znaleźć w publikacji Brocka i in. (1991).

1.3. Metoda C-C wyboru czasu opóźnień τ

Niech $S(d,N,r,t)$ będzie statystyką określoną wzorem:

$$S(d,N,r,t) = C(d,N,r,t) - C^d(1,N,r,t) \tag{13}$$

gdzie $C(d,N,r,t)$ jest całką korelacyjną. Statystyka ta nazwana jest metodą *C-C* wyboru czasu opóźnień τ ($\tau = t\tau_s$, τ_s jest czasem próby). $S(d,N,r)$ można interpretować jako szereg korelacji nieliniowego szeregu czasowego. Ponadto uważa się, że jest ona miarą nieliniowych zależności.

Aby badać nieliniową zależność i eliminować niepożądane korelacje czasowe, musimy podzielić szereg czasowy $x(t), t = 1,2,...,N$ tak, aby powstały rozłączne szeregi (względem zmiennej *t*). Wtedy statystyka $S(d,N,r,t)$ jest obliczana dla rozłącznych szeregów:

– dla $t=1$ mamy jednowymiarowy szereg czasowy $\{x_1,...,x_N\}$ oraz:

$$S(d,N,r,1) = C(d,N,r,1) - C^d(1,N,r,1)$$

– dla $t=2$ mamy dwa rozłączne szeregi czasowe $\{x_1, x_3,...,x_{N-1}\}$ i $\{x_2, x_4,...,x_N\}$ o długości *N*/2, a statystyka $S(d,N/2,r,2)$ jest ich średnią arytmetyczną.

Zatem ogólny wzór ma postać:

$$S(d,r,t) = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\left[C_s(d,r,t) - C_s^d(d,r,t)\right] \tag{14}$$

Dla stałych parametrów *d* i *t* oraz dla każdego *r* statystyka $S(d,r,t)$ będzie równa zero, gdy dane będą iid i $N \to \infty$. Dla danych rzeczywistych (dane te mogą być skorelowane) w wielu przypadkach statystyka $S(d,r,t)$ będzie różna od zera. Optimum lokalne (ekstremum) $S(d,r,t)$ możemy otrzymywać w miejscach, gdzie $S(d,r,t)$ wykazuje najmniejszą wariancję z *r*. Zatem wybierając różne wartości r_j, definiujemy miarę wariancji $S(d,r,t)$ z *r*:

$$\Delta S(d,t) = \max\{S(d,r_j,t)\} - \min\{S(d,r_j,t)\} \tag{15}$$

Stąd optimum lokalne jest minimum $\Delta S(d,t)$. Ostatecznie czas opóźnień τ jest związany z pierwszym optimum lokalnym.

1.4. Metoda wyboru wymiaru zanurzenia *d*

Przyjmijmy, że $y_r(t)$ jest *r*-tym najbliższym sąsiadem punktu $y(t) = [x(t), x(t+\tau),...,x(t+(d-1)\tau)]$ w *d*-wymiarowej przestrzeni, a odległość pomiędzy nimi wynosi:

$$R_d(t,r)=\sqrt{\sum_{k=0}^{d-1}\left[x(t+k\tau)-x_r(t+k\tau)\right]^2} \tag{16}$$

gdzie $R_d(t,r)$ jest odległością euklidesową.

Następnie obliczmy odległość $R_{d+1}(t,r)$ w (d +1)-wymiarowej przestrzeni:

$$R_{d+1}^2(t,r)=R_d^2(t,r)+\left[x(t+d\tau)-x_r(t+d\tau)\right]^2 \tag{17}$$

Jeśli $R_{d+1}(t,r)$ znacząco przewyższa $R_d(t,r)$, to punkty $y_r(t)$ i $y(t)$ nie są najbliższymi sąsiadami i są tzw. fałszywymi sąsiadami.

Istnieją dwa kryteria wyznaczania wymiaru zanurzenia. Pierwsze otrzymujemy przez wyznaczenie fałszywego sąsiada pewnego punktu, dla którego zachodzi nierówność:

$$\left[\frac{R_{d+1}^2(t,r)-R_d^2(t,r)}{R_d^2(t,r)}\right]^{1/2}=\frac{\left|x(t+d\tau)-x_r(t+d\tau)\right|}{R_d(t,r)}>R_T \tag{18}$$

gdzie R_T jest pewnym ograniczeniem (zwykle przyjmuje się wartość $R_T=15$ (Abarbanel, 1996)). Powyższe kryterium nie jest wystarczające do jednoznacznego wyznaczenia właściwego wymiaru zanurzenia. Drugi warunek, który musi być spełniony, jest następujący:

$$\frac{R_{d+1}(t)}{R_A}>A_T \tag{19}$$

gdzie:

$$R_A=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[x(t)-\bar{x}\right]^2, \qquad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x(t)$$

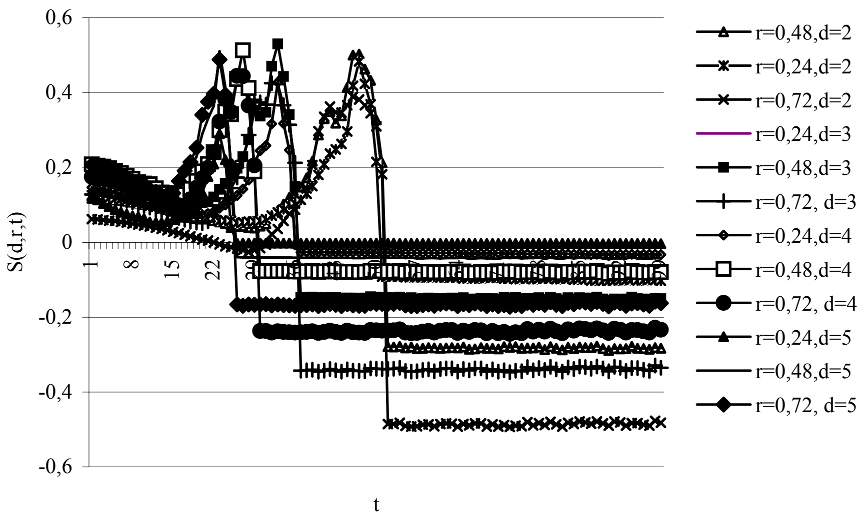
natomiast A_T jest pewnym ograniczeniem (zwykle przyjmuje się wartość $A_T=2$ (Abarbanel, 1996)).

Jeśli zachodzą kryteria (18) i (19), to punkty $y_r(t)$ i $y(t)$ są fałszywymi sąsiadami.

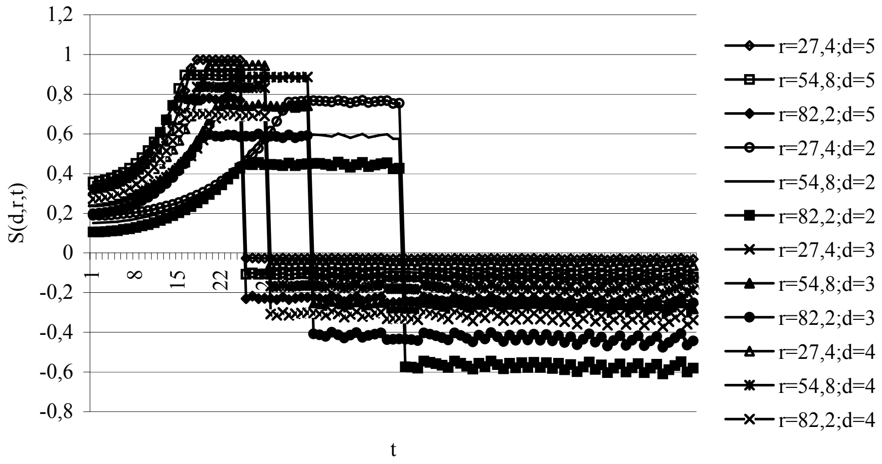
2. Czas opóźnień, wymiar zanurzenia – obliczenia numeryczne

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły, przy pomocy metody opóźnień, zrekonstruować przestrzeń stanów. Wykorzystano do tego celu szeregi finansowe utworzone z cen zamknięcia walut notowanych na WGPW w ostatnich dziesięciu latach.

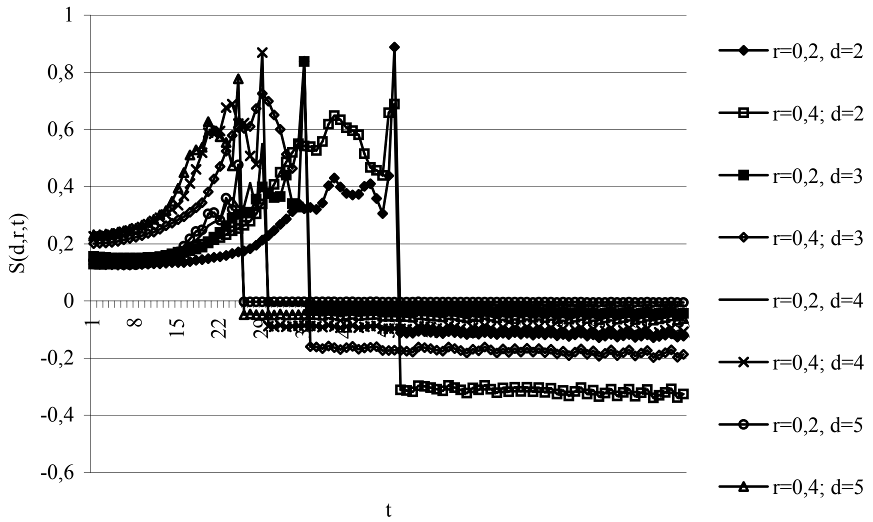
Stosując metodę całki korelacyjnej *C-C* oszacowano czas opóźnień τ. Pod uwagę brano różne wartości parametru *r* i wymiaru zanurzenia *d*. Uzyskane rezultaty przedstawiono na rys. 1-3 oraz w tab. 1.



Rys. 1. Wartość S(d, r, t) dla GBP



Rys. 2. Wartość S(d, r, t) dla JPY



Rys. 3. Wartość S(d, r, t) dla USD

Następnie za pomocą metody fałszywego sąsiada oszacowano wymiar zanurzenia d. Wyniki przedstawia tab. 1.

Tabela 1

Zestawienie wartości wymiaru zanurzenia i czasu opóźnień szeregów cen wybranych walut

Waluty	Czas opóźnień τ	Wymiar zanurzenia d
GBP	20	6
JPY	25	5
USD	28	5

Niestety zbyt duże wymiary zanurzeń nie pozwalają na graficzne przedstawienie zrekonstruowanej przestrzeń stanów.

Podsumowanie

W opracowaniu podjęto próbę zrekonstruowania przestrzeni stanów na podstawie jednowymiarowych szeregów czasowych utworzonych z notowań walut: *USD, GBP, JPY*. Rozważane szeregi składały się z cen zamknięcia i pochodziły z okresu od 4 stycznia 1993 r. do 27 listopada 2003 r. Badania przeprowadzono korzystając z programu napisanego przez autorkę w języku programowania Visual Basic oraz z pakietu Excel. Korzystając z metody *C-C* (całki korelacyjnej) dokonano wyboru czasu opóźnień τ oraz na podstawie metody fałszywego sąsiada oszacowano wymiar zanurzenia d. Otrzymane wyniki pozwoliły na rekonstrukcję przestrzeni stanów za pomocą tzw. metody opóźnień zaproponowanej w 1981 r. przez Florisa Takensa. Niestety zbyt duże wymiary zanurzenia nie pozwoliły na jej graficzne przedstawienie.

Rekonstrukcja przestrzeni stanów to zaledwie początek charakterystyki badanego szeregu. Za jej pomocą i wymiaru korelacyjnego można określić, czy badany szereg ma charakter chaotyczny czy stochastyczny. Idąc dalej, można oszacować wykładniki Lapunowa, czy też entropię Kołmogorowa, a następnie wyznaczyć krótkookresową prognozę.

Dodatek

1. Podzbiór *A* przestrzeni stanów *X* nazywamy **atraktorem** układu dynamicznego (f, X), gdy:
   a) jest zwarty,
   b) jest dodatnio niezmienniczy, tzn. dla każdego $x \in A$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$, $f^n(x) \in A$,
   c) istnieje otoczenie $U = U(A, \varepsilon) \supset A$ takie, że dla każdego $x \in U$ i $n \geq 0$, $f^n(x) \in U$ oraz $f^n(x) \to A$, przy $n \to \infty$,
   d) jest topologicznie tranzytywny względem systemu dynamicznego, tzn. dla dowolnych otwartych zbiorów $V, W \subset A$ istnieje $n \geq 0$ takie, że $f^n(V) \cap W = \varnothing$.
2. **Własność generyczna** oznacza, że zbiór par odwzorowań (f, h), dla których $\Phi(f, h)$ jest zanurzeniem, tworzy (z odpowiednią topologią) zbiór gęsty i otwarty w przestrzeni funkcyjnej $Diff^2(R^m, R^m) \times C^2(R^m, R)$.
3. Odwzorowanie $f : R^m \to R^m$ nazywamy **dyfeomorfizmem** klasy C^r $(r \geq 0)$, jeżeli jest odwracalne oraz gdy f i f^{-1} należą do $C^r(R^m)$. W szczególności dyfeomorfizm klasy C^0 nazywamy **homeomorfizmem**. Zbiór wszystkich dyfeomorfizmów klasy C^r, odwzorowujących R^m w R^m, oznaczamy $Diff^r(R^m, R^m)$.
4. Zbiór $M \subset R^m$ nazywamy *k*-wymiarową **rozmaitością** klasy C^r w R^m $(r \geq 1, k \leq m)$, jeżeli dla każdego $x \in M$ istnieje dyfeomorfizm Φ klasy C^r, odwzorowujący pewne otoczenie *U* (otwarte w *M*) punktu *x* w pewien otwarty zbiór $V \subset R^k$.

Literatura

Abarbanel H.D.: *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg-New York 1996.

Brock W.A., Hsieh D.A., LeBaron B.: *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press, Cambridge, MA 1991.

Broomhead D.S., King G.P.: *Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data*. „Physica D” 1986, 20.

Čenys A., Pyragas K.: *Estimation of the Number of Degrees of Freedom from Chaotic Time Series*. „Physics Letters A” 1988, Vol. 129, No 4.

Darbellay G., Finardi M.: *Could Nonlinear Dynamics contribute to Intra – Day Risk Managment?* „The European Journal of Finance” 1997, 3.

Denker M., Keller G. „Journal Stat.Phys.” 1986, 44.

Eubank S., Farmer J.D.: *An Introduction to Chaos and Randomness*. In: *1989 Lectures in Complex Systems, SFI Studies in the Scienes of Complexity, Lectures*. Vol. 2. Ed. E.J. Addison. Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, CA 1990.

Farmer J.D., Sidorovich J.J.: *Exploating Chaos to Predict the Future and reduce Noise*. 1988.

Fraser A.M., Swinney H.L.: *Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information*. „Physical Review A” 1986, Vol. 33, No 2.

Goodhart C.: *News' and the Foreign Exchange Market*. Proceedings of the Manchester „Statistical Society” 1989.

Grassberger P., Procaccia I.: *Characterization of Strange Attractors*. „Phys. Rev. Lett.” 1983, Vol. 50.

Grassberger P., Procaccia I.: *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*. „Physica D” 1983.

Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.: *Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction using a Geometrical Construction*. „Physical Review A” 1992, Vol. 45, No 6.

Kim H.S., Eykholt R., Salas J.D.: *Nonlinear Dynamics, Delay Time and Embedding Windows*. „Physica D” 1999, 127.

Liebert W., Schuster H.G.: *Proper Choice of the Time Delay for the Analysis of Chaotic Time Series*. „Phys. Rev. Lett. A” 1989, 142.

Packard N.H., Crutchfield J.P, Farmer J.D., Shaw R.S.: *Geometry from a Time Series*. „Phys. Rev. Lett.” 1980, 45.

Sauer T., Yorke J., Casdagli M.: *Embedology*. „J. Statist. Phys.” 1991, 65 (3/4).

Sprott J.C.: *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press Inc., New York 2003.

Stark J.: *Recursive Prediction of Chaotic Time Series*. Vol. 3. Springer-Verlag, New York 1993.

Takens F.: *Detectingstrange Attractors in Turbulence*. In: *Lecture Notes in Mathematics*. Eds. D.A. Rand, L.S. Young. Springer-Verlag, Berlin 1981.

Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996.

RECONSTRUCTION OF THE STATE SPACE ON THE BASIS OF A SINGLE ECONOMIC TIME SERIES

Summary

In this paper we have used the time delay method – Takens (1981) – for the reconstruction of state space on the basis of a single time series. In order to compute the delay time τ we had used the C-C method and then we applied the false neighbours method to compute the embodying dimension *d*. Our data set is composed of a daily foregin – exchange returns obtained from WGPW for USD, GBP and JPY.