

Henryk Gurgul
Stanisław Mysza
Robert Syrek

ZASTOSOWANIE FILTRÓW KALMANA DO PROGNOZOWANIA WIELKOŚCI SPRZEDAŻY WYROBÓW PRZEDSIĘBIORSTWA CERAMICZNEGO

Wprowadzenie

W zarządzaniu przedsiębiorstwem wśród wielu różnego typu prognoz szczególnie ważną rolę odgrywają prognozy sprzedaży poszczególnych produktów, które stanowią podstawę podejmowania decyzji na różnych szczeblach zarządzania przedsiębiorstwem. Prawidłowe, tj. odpowiadające potrzebom rynku, zaplanowanie wielkości sprzedaży i wynikającej stąd wielkości produkcji jest dla przedsiębiorstwa sprawą niezmiernie ważną. W branży ceramiki sanitarnej, ze względu na duże koszty związane z nagłym i niezamierzonym przezbrajaniem produkcji, szczególnie istotne jest planowanie produkcji poszczególnych wyrobów. Błędne prognozy sprzedaży mogą spowodować:

- w przypadku niedoszacowania prognoz:
 - opóźnienie w dostawie produktów,
 - brak zaspokojenia potrzeb klientów i ich utratę,
 - powstanie tzw. kosztów utraconych możliwości z tytułu braku towaru,
 - utratę pozycji rynkowej;
- w przypadku przeszacowania prognoz:
 - kłopoty ze zbytem produkcji, a w konsekwencji spadek przychodów ze sprzedaży,
 - zwiększenie zapasów, a więc wzrost kosztów magazynowania,
 - zamrożenie kapitału obrotowego w zapasach niesprzedanych wyrobów gotowych,
 - wzrost kosztów finansowych w przypadku finansowania zewnętrznego.

Opracowanie modeli służących do prognozowania sprzedaży w przedsiębiorstwach branży ceramiki sanitarnej pozwala na zwiększenie efektywności zarządzania i uniknięcie konsekwencji finansowych wynikających z błędnych prognoz sprzedaży [7].

1. Znaczenie prognoz dla branży ceramiki sanitarnej

Branża ceramiki sanitarnej jest branżą specyficzną i nietypową ze względu na przebieg procesu produkcyjnego wyrobów, tj. umywalek, misek ustępowych, bidetów, urządzeń kompaktowych, postumentów i półpostumentów [1]. Barię wejścia na rynek dla nowych firm chcących produkować ceramikę sanitarną stanowi technologia, która jest powszechnie znana, ale trudna do wprowadzenia. Występuje w tej branży ryzyko, że przy braku doświadczenia pracowników, pomimo dużych nakładów inwestycyjnych, produkowane wyroby będą wadliwe, nienadające się do sprzedaży. Często o powodzeniu produkcji decydują szczegóły technologiczne, np. skład wody używanej do produkcji, temperatura na hali, kolejność dozowania surowców i upłynniaczy, czas odlewania, rodzaj zastosowanej mieszanki gipsowej do produkcji form i inne. Każdy zakład produkcji ceramiki sanitarnej ma wypracowaną na podstawie wieloletnich doświadczeń własną technologię, uwzględniającą szczegóły specyficzne dla danego zakładu. Okres prób technologicznych jest długi, a związane z nimi koszty są trudne do przewidzenia. Zakłady produkujące ceramikę sanitarną, pomimo powodzenia na rynku, ciągle udoskonalają swoją produkcję, chcąc ograniczyć ilość braków występujących na każdym etapie produkcji. O trudnościach z tym związanych świadczy liczba zakładów produkujących ceramikę sanitarną. W Polsce produkcję taką prowadzi osiem przedsiębiorstw, wytwarzających wyroby pod markami: Cersanit, Koło, Roca, Hybner, Jopek, Pilch, Radimp, Deger. W latach 1989-1991 w Polsce powstało kilkanaście zakładów produkujących ceramikę sanitarną. Do dzisiaj przetrwały tylko dwa: Hybner i Deger (wcześniej produkował wyroby pod marką Cersan). Z wypowiedzi ekspertów znających branżę ceramiki sanitarnej wynika, że powodem takiej sytuacji była zbyt niska jakość wyrobów, przez co firmy te nie były w stanie przez dłuższy okres ponieść wywołanych tym kosztów. W ciągu ostatnich dziesięciu lat nie powstał w Polsce żaden nowy zakład produkujący ceramikę sanitarną. Produkcję zwiększają – przez rozbudowę zakładów – tylko firmy mające doświadczenie i istniejące już na rynku.

Specyfika produkcji ceramiki sanitarnej określa potrzeby w zakresie prognozowania sprzedaży poszczególnych grup asortymentowych. Produkcja ta cechuje się dużą bezwładnością, jeśli chodzi o zmiany w produkowanych asortymentach. Częsta zmiana produkowanych asortymentów, dostosowująca asortyment do nagłych potrzeb rynku, jest tu prawie niemożliwa. Ograniczenia wprowadzają dwa etapy procesu produkcyjnego ceramiki sanitarnej: wydział odlewni i wydział modelarni. Odlewianie wyrobów sanitarnych polega na zalewaniu wcześniej przygotowanej formy masą (zawiesiną) lejną. Formy mogą być wykonane z gipsu – wtedy mamy do czynienia z odlewaniem tradycyjnym, lub z tworzywa sztucznego porowatego, które jest stosowane do odlewania ciśnieniowego.

Wynika stąd, że w określonym czasie rodzaj produkowanych wyrobów zależy od rodzaju form zainstalowanych na odlewni i od możliwego zapasu tych form przygotowanych do zainstalowania. Istotne ogniwo procesu technologicznego stanowi wydział modelarni, gdzie szczególnym problemem przy planowaniu produkcji jest plan produkcji gipsowych form odlewniczych. Należy nadmienić, że z ekonomicznego punktu widzenia forma gipsowa po zainstalowaniu na tzw. ławach odlewniczych powinna być eksploatowana aż do jej całkowitego zużycia, tzn. trzeba na niej wykonać możliwie największą liczbę odlewów. Jej zbyt wczesny demontaż wywołuje wiele przerw technologicznych na odlewni oraz najczęściej powoduje zniszczenie niewykorzystanej do końca formy. Czas produkcji formy gipsowej (15 do 25 dni) i jej cykl życia (80 do 120 odlewów) oraz zdolność produkcyjna modelarni są znane w warunkach konkretnego przedsiębiorstwa branży ceramiki sanitarnej. Do sprawnego sterowania procesem produkcyjnym brakuje więc tylko wiarygodnej prognozy sprzedaży, którą można by się kierować przy planowaniu produkcji.

Biorąc pod uwagę specyfikę produkcji ceramiki sanitarnej, należy podkreślić szczególną przydatność i znaczenie krótkoterminowych prognoz sprzedaży dla tej branży. Ze względu na przebieg procesu technologicznego istnieje potrzeba zbudowania modeli pozwalających na formułowanie trafnych krótkoterminowych prognoz sprzedaży dla poszczególnych wyrobów, dla których istotne jest planowanie produkcji. Na wydziale modelarni prognoza ilościowa sprzedaży pozwala na planowanie ilości i rodzajów produkowanych form odlewniczych, a w konsekwencji stanowi podstawę informacyjną dla sporządzenia planu produkcji.

Prognozy jednokrokowe (na kolejny tydzień) są cennym źródłem informacji dla działu produkcji. Są dość dokładne, co wynika z przeprowadzonych porównań z rzeczywiście zrealizowaną sprzedażą, mogą zatem służyć do weryfikacji prognozy wykonanej wcześniej na kolejny miesiąc lub kwartał (w okresach tygodniowych), na podstawie której wykonano plan produkcji. Ma to zna-

czenie zwłaszcza przy asortymentach, które są produkowane w większej ilości, tj. takich, gdzie produkcja odbywa się na kilku formach jednocześnie. Z przyczyn ekonomicznych w przedsiębiorstwie branży ceramiki sanitarnej nie zakłada się wszystkich form na ten sam asortyment w jednym czasie – chodzi o niedopuszczenie do sytuacji, w której w jednym momencie trzeba zlikwidować wszystkie formy, gdyż zużyły się jednocześnie. Jeżeli w określonym momencie czasu jedna z wielu form zostanie zużyta i wymaga wymiany, produkcja przebiega bez zakłóceń na pozostałych formach.

Na podstawie prognoz jednokrokowych (tygodniowych) można podjąć decyzję:

- czy przygotowana (wytworzona) na wydziale modelarni forma na dany wyrób ma być założona w kolejnym tygodniu, czy nie,
- jaką formę (na który asortyment) należy założyć na ławie odlewniczej w przypadku ograniczonego miejsca na tej ławie.

Prognozy jednokrokowe mogą więc stanowić uzupełnienie prognoz, na podstawie których buduje się plan sprzedaży i produkcji. Pełnią funkcję ostrzegawczo-sterującą. Można dokonać porównania prognozy jednokrokowej (na kolejny tydzień) z prognozami zbudowanymi wcześniej, na podstawie których opracowano plan sprzedaży i produkcji poszczególnych asortymentów. Porównanie takie daje wymierne korzyści z podjętych na ich podstawie decyzji. Wyższa, w stosunku do planu produkcji, prognoza jednokrokowa (na najbliższy okres) jest podstawą w przedsiębiorstwach omawianej branży do założenia dodatkowej formy na odlewni lub rozpoczęcia produkcji dodatkowej formy. Niższa w stosunku do oczekiwań prognoza jednokrokowa jest sygnałem do ograniczenia produkcji w danym asortymencie, co skutkuje tym, że zlikwidowana forma odlewnicza nie zostaje wymieniona na nową. Powoduje to ograniczenie nadmiernego wzrostu zapasów, a ponadto daje możliwość wykorzystania wolnego miejsca do produkcji asortymentu, na który wystąpiło nagle zapotrzebowanie. Z prowadzonych badań na podstawie danych z przedsiębiorstwa z branży ceramiki sanitarnej nad znalezieniem modeli pozwalających na trafne formułowanie krótkoterminowych prognoz sprzedaży wynika, że istotne znaczenie mają ostatnie obserwacje szeregu czasowego, w tym również prognozy jednokrokowe (czyli prognozy o horyzoncie jeden). W celu budowy takich prognoz zastosowano filtr Kalmana oraz alternatywnie kilka innych modeli. Uzasadnienie wyboru takiej metodologii zostanie podane w następnych rozdziałach, gdzie przedstawiono wyniki prognozowania dla większości produkowanych w badanym przedsiębiorstwie grup asortymentowych. Wielkości sprzedaży stanowią szereg czasowy. Zanim zajmiemy się jego modelowaniem, należy przypomnieć pewne pojęcia i definicje.

2. Modele szeregów czasowych w przestrzeni stanu

Szereg czasowy jest uporządkowanym ciągiem informacji. Zazwyczaj mamy do czynienia z uporządkowaniem chronologicznym (kryterium uporządkowania jest czas), jednak możliwe jest także uporządkowanie ze względu na inne kryterium, np. miejsce. Szeregi czasowe są stosowane do opisu sposobu generowania obserwacji, przewidywania przyszłych wartości, a także optymalnego sterowania systemami. Mogą być dyskretne lub ciągłe w czasie.

Szeregi czasowe są z matematycznego punktu widzenia procesami stochastycznymi, dla których parametrem (zmienną deterministyczną) jest czas [5; 6]. Najważniejszym celem budowy modeli szeregów czasowych jest możliwość konstrukcji prognoz za pomocą tych modeli. W ubiegłych dziesięcioleciach w zastosowaniach ekonometrycznych dominowały modele przyczynowo-skutkowe. Źmudne (a dodatkowo często nieskuteczne) procedury ustalania zmiennych o charakterze przyczyn, brak wystarczających danych dla wszystkich zmiennych w modelu, częsty brak porównywalności tych danych, a przede wszystkim dokładność prognoz – porównywalna lub nawet mniejsza od ich dokładności przy użyciu szeregów czasowych – spowodowały powrót do zastosowania szeregów [3].

Do opisu szeregów czasowych stosuje się często liniowe modele szeregów czasowych typu ARMA lub ARIMA. Okazuje się, że wymienione typy modeli dają się zapisać w postaci równań w przestrzeni stanu (inaczej postaci Markowa). Zapis ten pozwala na rekurencyjne wyznaczanie prognoz jednokrokowych za pomocą filtra Kalmana (*one-step prediction*). Wykorzystanie filtra Kalmana pozwala na budowę prognoz na podstawie prognoz z poprzednich okresów. Nowa prognoza wektora stanu jest sumą prognozy na poprzedni okres oraz błędu prognozy na poprzedni okres pomnożonego przez wagę (*Kalman gain*). Zapis estymatorów w postaci Kalmana pozwala też na śledzenie ich wartości w czasie, a ponadto w przypadku powiększenia próby o nowe obserwacje nie musi się powtarzać wszystkich obliczeń. Wystarczy skorygować poprzedni estymator otrzymany na podstawie mniejszej próby.

Zanim przystąpimy do estymacji, przypomnijmy podstawowe definicje z zakresu teorii przestrzeni stanu, a w dalszych podpunktach pokażemy własny, szczególnie prosty sposób wyprowadzenia zapisów ARMA oraz ARIMA w postaci równań stanu i formuły Kalmana.

Istotne znaczenie w naszych rozważaniach ma pojęcie stanu systemu.

Definicja 1

Minimalny zbiór informacji z przeszłości i terażniejszości, który umożliwia na podstawie znajomości stanu terażniejszego i przyszłego wejścia do systemu prognozowanie przyszłego zachowania się systemu, nazywa się stanem systemu.

Niech y_{1t} i y_{2t} będą wyjściami z pewnego systemu przy wejściach do systemu x_{1t} oraz x_{2t} .

Definicja 2

System nazywamy liniowym, jeśli liniowej kombinacji wejść $ax_{1t} + bx_{2t}$ odpowiada liniowa kombinacja wyjść o tych samych współczynnikach a i b .

Definicja 3

System jest niezmienniczy względem czasu, jeśli dla wszystkich t oraz t_0 zachodzi równoważność:

$$[x_t \Rightarrow y_t] \Leftrightarrow [x_{t+t_0} \Rightarrow y_{t+t_0}]$$

Systemy mające własności przedstawione w powyższych definicjach mogą być opisane za pomocą równania stanu (*state equation* lub *transition equation*):

$$y_{t+1} = Ay_t + Gx_{t+1}$$

gdzie y_t to wektor stanu (*state vector*), A – macierz przejścia (*transition matrix*), G – macierz wejścia (*input matrix* lub *selection matrix*), x_t – wektor wejścia (*input vector*), oraz równania pomiaru (*measurement* lub *observation equation*)

$$z_t = Hy_t$$

gdzie H to macierz pomiaru (*observation matrix*), z_t – wektor na wyjściu, zwany też wektorem pomiaru (*measurement vector*).

Przy stochastycznym charakterze wejścia i wyjścia otrzymuje się:

$$\begin{cases} y_{t+1} = A \cdot y_t + G a_{t+1} \\ z_t = H \cdot y_t + b_t \end{cases} \quad (1)$$

gdzie zarówno a_t , jak i b_t powinny mieć charakter białego szumu (wektor b_t nazywa się wektorem błędu pomiaru – *measurement noise* lub *output noise*).

2.1. Postać Markowa modelu ARMA

Przypomnijmy postać ogólną modelu ARMA(p, q):

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \dots - \phi_p z_{t-p} = a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \dots - \Theta_q a_{t-q} \quad (2)$$

Założmy, że zachodzi $p > q$ (jeśli tak by nie było, to rozszerzamy model, przyjmując zera za ostatnie współczynniki typu ϕ):

$$\text{AR}(p) : \Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\text{MA}(q) : \Theta_q(B) = 1 - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q, p > q$$

Model ARMA (p,q) jest niezmienniczy względem czasu. Dlatego:

$$z_{t+1} := \phi_1 z_t + \dots + \phi_p z_{t-p+1} + a_{t+1} - \Theta_1 a_t - \dots - \Theta_q a_{t-q+1}$$

Stąd (przy podstawieniu $x_{1,t} := z_t$) mamy:

$$x_{1,t+1} = \phi_1 x_{1,t} + x_{2,t} + a_{t+1}$$

przy czym:

$$x_{2,t} := \phi_2 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} - \Theta_1 a_t - \dots - \Theta_q a_{t-q+1}$$

Podobnie:

$$x_{2,t+1} = \phi_2 x_{1,t} + x_{3,t} + (-\Theta_1) a_{t+1}$$

gdzie:

$$x_{3,t} := \phi_3 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} - \Theta_2 a_t - \dots - \Theta_q a_{t-q+2}$$

$$x_{p-1,t+1} = \phi_{p-1} x_{1,t} + x_{p,t} + (-\Theta_q) a_{t-1}$$

$$x_{p,t+1} = \phi_p x_{1,t}$$

Powyższe wzory mogą być zapisane w postaci macierzowej:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \phi_p & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} 1 \\ -\Theta_1 \\ \vdots \\ -\Theta_q \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} a_{t+1} \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{c} = [0, \dots, 0]_{(p-q) \times 1}^T$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową, a liczba w indeksie oznacza wymiar tej macierzy. Równanie wyjścia ma postać:

$$z_t = \left[1, \text{zera}, \binom{d}{1}, -\binom{d}{2}, \dots, (-1)^{d+1} \binom{d}{d} \right] y_t \quad (7)$$

Wzór (3) względnie (6) przedstawia postać Markowa procesów ARMA lub ARIMA. Dla postaci wyrażonej tymi wzorami można zastosować filtrację Kalmana.

2.3. Filtr Kalmana

Wracamy jeszcze raz do wzoru (1):

$$\begin{cases} y_{t+1} = \mathbf{A}y_t + \mathbf{G}a_{t+1} \\ z_t = \mathbf{H}y_t + b_t \end{cases}$$

Stąd wynika:

$$\begin{cases} y_t = \mathbf{A}y_{t-1} + \mathbf{G}a_t \\ z_t = \mathbf{H}(\mathbf{A}y_{t-1} + \mathbf{G}a_t) + b_t = \mathbf{H}\mathbf{A}y_{t-1} + \mathbf{H}\mathbf{G}a_t + b_t \end{cases} \quad (8)$$

W zapisie macierzowym (8) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\mathbf{A} & \mathbf{H}\mathbf{G} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ a_t \\ b_t \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ a_t \\ b_t \end{bmatrix} \quad (9)$$

Formuły Kalmana są znane w literaturze. Poniżej zostanie zaprezentowana własna, jak się wydaje – szczególnie prosta, metoda wyprowadzenia tych formuł [2]. Opiera się ona na trzech następujących elementarnych własnościach wektorów losowych:

Własność 1

$E(\mathbf{B}x) = \mathbf{B} \cdot E(x)$ dla dowolnej macierzy \mathbf{B} i dowolnego wektora losowego x .

Własność 2

$\text{Var}(\mathbf{B}x) = \mathbf{B} \cdot \text{Var}(x) \cdot \mathbf{B}^T$, gdzie \mathbf{B} jest pewną macierzą, x wektorem losowym, zaś T oznacza transpozycję.

Własność 3

Niech wektor \mathbf{x} zapisany w postaci blokowej ma rozkład normalny:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}\right)$$

wtedy warunkowa wartość oczekiwana wyraża się wzorem:

$$E(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

zaś warunkowa wariancja przyjmuje postać:

$$\text{Var}(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21}$$

Zakładamy, że wektor białych szumów ma w chwili początkowej rozkład normalny:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_b \end{bmatrix}\right)$$

Przyjmujemy również założenie o rozkładzie normalnym początkowego wektora stanu, co zapisujemy w postaci:

$$\mathbf{y}_0 \sim N(\hat{\mathbf{y}}_0, \mathbf{V}_0)$$

Zauważmy, że rozkład łączny jest też normalny, czyli że:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_b \end{bmatrix}\right)$$

Zgodnie z (9) mamy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}$$

Dlatego w chwili $t = 1$ rozkład też jest normalny o parametrach:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} &\sim N\left(\mathbf{B} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_b \end{bmatrix} \mathbf{B}^T\right) = \\ &= N\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \hat{\mathbf{y}}_0 \\ \mathbf{H} \mathbf{A} \hat{\mathbf{y}}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{V}_0 \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{G}^T & \mathbf{A} \mathbf{V}_0 \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{G} \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{G}^T \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{V}_0 \mathbf{A}^T + \mathbf{H} \mathbf{G} \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{G}^T & \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{V}_0 \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{G} \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{G}^T \mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Omega}_b \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Niech:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &:= \mathbf{A}\mathbf{V}_0\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\Sigma_a\mathbf{G}^T \\ \mathbf{K}_1 &:= \mathbf{R}_1\mathbf{H}^T(\mathbf{\Omega}_b + \mathbf{H}\mathbf{R}_1\mathbf{H}^T)^{-1}\end{aligned}$$

Dlatego mamy:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_1 &= E(\mathbf{y}_1 | \mathbf{z}_1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{z}_1 - \mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{y}}_0) \\ \mathbf{V}_1 &= \text{Var}(\mathbf{y}_1 | \mathbf{z}_1) = \mathbf{R}_1 - \mathbf{K}_1\mathbf{H}\mathbf{R}_1\end{aligned}$$

Dla dowolnego t zachodzi:

$$\mathbf{R}_{t+1} := \mathbf{A}\mathbf{V}_t\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\Sigma_a\mathbf{G}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_{t+1} := \mathbf{R}_{t+1}\mathbf{H}^T(\mathbf{\Omega}_b + \mathbf{H}\mathbf{R}_{t+1}\mathbf{H}^T)^{-1} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = E(\mathbf{y}_{t+1} | \mathbf{z}_{t+1}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{y}}_t + \mathbf{K}_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{y}}_t) \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{R}_{t+1} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{H}\mathbf{R}_{t+1} \quad (13)$$

gdzie:

$$\mathbf{z}_t = (z_1, z_2, \dots, z_t)$$

jest chronologicznym wektorem obserwacji.

Prognoza wyraża się wzorem:

$$\hat{\mathbf{z}}_{T+j|T} = E(\mathbf{z}_{T+j} | \mathbf{z}_j, j \leq T) = \mathbf{H}\mathbf{A}^j\hat{\mathbf{y}}_T \quad (14)$$

Definicja 4

Ciąg formuł (10)-(14) nazywa się filtrem Kalmana.

Za pomocą tych formuł można rekurencyjnie wyznaczyć warunkową wartość oczekiwaną, warunkową wariancję, a na ich podstawie prognozę.

W literaturze [4] można znaleźć opinię, że filtr Kalmana pozwala na uzyskiwanie dobrych prognoz krótkoterminowych. Poza tym za pomocą formuł (10)-(14) daje się zapisać większość popularnych modeli ekonometrycznych [4], od regresji liniowej po model strukturalny o sezonowości trygonometrycznej, co więcej, w tym ujęciu estymatory mogą nawet zależeć od czasu (*random time-varying coefficients*). Dlatego w pracy porównano jakość prognoz jednokrokowych (dla tych samych zestawów danych) za pomocą filtra Kalmana z prognozami również jednokrokowymi liniowego modelu trendu i random

walk z dryftem oraz modelami, które należą do klasy modeli adaptacyjnych: wygładzania wykładniczego i metody średnich ruchomych (*moving average*). Dwa pierwsze typy modeli należą do najczęściej stosowanych w praktyce. Jak podkreśla Zeliaś [8], modele adaptacyjne są konstruowane w taki sposób, by pomijać (rozluźniać) założenia klasycznej teorii predykcji, uwzględniając m.in. ewentualną niestalość struktury ekonomicznej i możliwość zmian parametrów czasie. Autor podkreśla dużą elastyczność tej klasy modeli i ich zdolność dostosowywania się do nieregularnych zmian kierunku lub szybkości trendu czy też zniekształceń i przesunięć wahań periodycznych. Te cechy modeli adaptacyjnych czynią je wygodnym narzędziem prognoz krótkookresowych (operatywnych), szczególnie tych zmiennych endogenicznych, których przebieg w czasie jest labilny. Taki właśnie przebieg mają ceramiczne szeregi czasowe. Trend liniowy, a także metoda średnich ruchomych są dobrze znane w zastosowaniach. Metodę prognozowania za pomocą dwóch pozostałych modeli przedstawimy krótko w następnym podrozdziale.

2.4. Prognozowanie za pomocą modelu random walk z dryftem i wygładzania wykładniczego

Model random walk z dryftem wyraża się wzorem:

$$z_t = z_{t-1} + a_t + \beta \quad (15)$$

gdzie β oznacza stałą zwaną dryftem. Uwzględniając niezmienniczość względem czasu, można uzyskać za pomocą iteracji następujący wzór:

$$z_{t-1} = z_{t-2} + a_{t-1} + \beta$$

$$z_t = z_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a_{t-1} + \beta t \quad (16)$$

Łatwo zauważyć, że charakterystyki probabilistyczne tego szeregu czasowego wynoszą:

$$E(z_t) = z_0 + \beta t$$

$$\text{Var}(z_t) = \sigma_a^2 \cdot t$$

$$\text{Cov}(z_t, z_{t-\tau}) = |t - \tau| \sigma_a^2$$

Tak więc jest to szereg niestacjonarny zarówno ze względu na średnią, jak i wariancję.

Jak widać z poniższych przekształceń, model wyrównania wykładniczego jest w istocie modelem ARIMA(0,1,1).

$$\Delta z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-1} \Leftrightarrow \frac{1-B}{1-\Theta_1 B} z_t = a_t \Leftrightarrow (1-B)(1 + \Theta_1 B + \Theta_1^2 B^2 + \dots) z_t = a_t \Leftrightarrow$$

$$z_t = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} z_{t-j} + a_t, \quad \text{gdzie } \alpha = 1 - \Theta_1$$

Uwzględniając, że $E(a_t) = 0$, można podać wzór na prognozę:

$$\hat{z}_t = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} z_{t-j}$$

$$\begin{aligned} \hat{z}_{t+1} &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} z_{t+1-j} = \alpha z_t + \alpha \sum_{j=2}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} z_{t+1-j} = \\ &= \alpha z_t + \alpha(1-\alpha) \sum_{j=2}^{\infty} (1-\alpha)^{j-2} z_{t+1-j} = \alpha z_t + \alpha(1-\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} z_{t-j} = \\ &= \alpha z_t + (1-\alpha) \hat{z}_t \end{aligned}$$

Widać więc, że prognoza dla chwili $t+1$ jest kombinacją wypukłą wcześniejszej obserwacji z_t oraz prognozy \hat{z}_t . Wpływ obu ostatnich wielkości na \hat{z}_{t+1} zależy tylko od α .

W następnym rozdziale przedstawimy wyniki prognoz sprzedaży niektórych asortymentów ceramiki sanitarnej wyznaczonych za pomocą filtra Kalmana oraz (dla porównania) za pomocą zasygnalizowanych tu metod.

3. Dane i wyniki empiryczne

Dane wykorzystane do estymacji parametrów modeli przedstawiają tygodniową wielkość sprzedaży poszczególnych asortymentów. Statystyki opisowe tych szeregów czasowych przedstawia tab. 1.

Tabela 1

Statystyki opisowe szeregów czasowych

Kod asortymentu	Min.	Max.	Średnia	Mediana	SD	Skośność	Kurtoza	Liczność próbki
1	2	3	4	5	6	7	8	9
K1	0	332	63,51	46	54,87	1,79	4,18	143
K2	0	874	164,31	124	163,19	1,98	4,6	143
U3	0	319	66,27	57	49,39	2,1	7,56	143

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
U4	0	613	40,97	26	59,9	6,37	55,93	143
P5	0	58	15,05	13	12,14	1,1	1,21	143
P6	0	158	30,14	24	26,92	1,76	4,53	143
P7	0	357	58,54	32	68,84	1,77	2,89	143
M8	0	479	49,74	34	60,6	3,66	18,88	143
B9	0	35	7,86	6	8,03	1,35	1,16	143
K10	0	156	18,9	13	22,19	2,66	10,51	143
K11	0	467	49,16	34	61,36	4,06	21,69	143
U12	0	518	183,86	175	114,27	0,47	-0,47	143
U13	0	359	73,77	50	71,85	1,56	2,51	143
U14	0	240	38,66	19	46,58	1,76	3,18	101
N15	0	534	137,38	123	91,91	1,2	2,56	143
N16	0	382	92,25	72	80,55	1,38	1,79	124
N17	0	1088	217,67	129	265,67	1,68	1,96	143
N18	0	485	75,22	53	90,28	2,01	5,07	67
N19	0	602	95,67	61	102	2,22	7,3	68
K22	0	1723	534,28	507	443,67	0,6	-0,44	87
K25	0	1050	227,93	191	192	1,39	3,23	69
B29	0	40	5,92	3	7,5	2,17	5,16	143
K30	0	37	5,54	3	6,37	2,04	5,56	116
K31	0	120	20,38	13	21,07	2,1	5,8	143
P32	0	110	19,69	13	20,96	1,67	3,05	143
P33	0	81	20,5	17	18,1	1,21	1,02	143
U34	0	342	67,55	60	54,08	1,6	4,33	143
U35	0	475	20,11	10	43,4	8,25	81,8	143
B36		57	15,66	13	13,16	1,33	1,33	143
M38		685	17,77	4	61,08	9,29	96,93	143
M39		400	29,12	8	59,7	3,67	16,07	115

Do estymacji parametrów modeli przestrzeni stanu wykorzystano wersję filtracji kalmanowskiej, znanej jako metoda błędów predykcji (PEM – *Prediction Error Method*), polegającej na minimalizacji błędów jednokrokowych prognoz (*one-step ahead forecast error*). Jako kryterium wyboru najlepszego modelu spośród alternatywnych modeli różnych rzędów przyjęliśmy kryteria informacyjne podane przez Akaike'a: FPE (*Final Prediction Error*) oraz AIC (*Akaike's Information Criterion*), zdefiniowane następująco:

$$\text{FPE} = \frac{1 + \frac{d}{N}}{1 - \frac{d}{N}} V$$

oraz:

$$\text{AIC} = \log\left(V\left(1 + 2\frac{d}{N}\right)\right)$$

gdzie d jest liczbą estymowanych parametrów, N – licznością próbek, natomiast V – funkcją straty (*loss function*), czyli funkcją podającą naszą stratę (niezadowolenie) w zależności od błędu prognozy. W naszych obliczeniach wykorzystano kwadratową funkcję straty minimalizującą średniokwadratowy błąd prognozy. I tak np. w kryterium AIC ze wzrostem d maleje $\log(V)$.

Na podstawie danych empirycznych oszacowano modele w postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \mathbf{z}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \end{cases} \quad (17)$$

znane w literaturze jako tzw. *steady-state innovations models*. Łatwo zauważyć, że jest to uproszczona wersja modelu rozważanego w poprzednim rozdziale. Residua z równania pomiaru w (17) zakłócają proces przejścia od stanu w chwili t do stanu w chwili $t + 1$. Wagą decydującą o sile tych zakłóceń jest macierz (wektor) \mathbf{K} . W modelu (1) zakładano niezależność zakłóceń w równaniach stanu i pomiaru. Dla tych modeli przeprowadzono analizę residuów, badając funkcje autokorelacji oraz zera i bieguny równań charakterystycznych.

Macierze przykładowego modelu w postaci kanonicznej (dla danych zestawu nazwanego B36) wyznaczone za pomocą programu MATLAB są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,41404 & -0,77934 & -0,006934 & 0,79184 & 0,58268 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad K = \begin{bmatrix} -0,0091674 \\ 0,022476 \\ 0,2056 \\ 0,033586 \\ 0,062607 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 10,461 \\ 5,4188 \\ 7,4237 \\ 5,0322 \\ 12,527 \end{bmatrix}$$

W tab. 2 podano statystyki opisowe residuów szeregu czasowego modelowanego za pomocą filtru Kalmana.

Tabela 2

Statystyki opisowe residuów z filtru Kalmana

Kod asortymentu	Średnia	Mediana	SD	Skośność	Kurtoza	RMSE	MAE
1	2	3	4	5	6	7	8
K1	3,48	-0,30	38,78	0,89	3,09	38,80	27,05
K2	7,58	-13,52	116,82	1,83	5,22	116,66	79,58
U3	5,87	-3,57	41,32	1,91	6,96	47,52	32,29
U4	1,02	-8,89	58,80	6,76	6,83	58,61	28,34
P5	1,17	0,57	10,79	0,71	1,05	10,88	8,32
P6	0,15	-4,55	24,05	1,98	6,14	23,97	16,41
P7	-0,36	-13,01	64,97	1,56	2,83	64,74	46,36
M8	9,54	-1,64	55,76	3,03	15,01	56,38	32,86
B9	1,19	-0,63	7,44	1,29	1,67	7,51	5,32
K10	-0,02	-3,67	17,52	1,08	2,02	17,45	12,83
K11	12,98	4,40	49,67	4,61	34,41	51,17	27,38
U12	3,85	-0,13	109,98	0,22	-0,07	109,67	85,56
U13	8,73	-0,07	60,88	0,70	1,04	61,29	45,27
U14	2,94	-3,29	39,52	0,85	0,29	39,43	30,32
N15	6,47	7,73	74,84	0,25	0,08	74,86	59,92
N16	-1,41	-12,07	61,87	1,35	2,58	61,63	44,20
N17	-1,37	-71,63	229,95	1,51	2,40	229,14	167,36
N18	13,89	2,69	68,56	3,22	17,72	69,45	40,02
N19	-0,79	-2,68	68,41	0,72	0,73	67,91	52,45
K22	34,60	23,12	364,42	0,44	0,23	364,22	281,71
K25	31,30	-11,44	171,26	1,67	4,78	172,88	121,24

cd. tabeli 2

1	2	3	4	5	6	7	8
B29	-0,11	-1,75	6,98	2,10	5,25	6,96	4,81
K30	1,26	-0,21	5,63	2,14	7,42	5,75	3,84
K31	3,08	-3,91	21,09	2,15	6,23	21,24	14,36
P32	-0,04	-6,40	20,08	1,66	3,26	20,01	15,35
P33	1,27	-,67	16,48	0,97	0,85	16,48	12,38
U34	-0,50	-5,61	41,88	1,01	2,15	41,74	31,70
U35	0,66	-9,20	43,20	8,27	82,08	43,06	18,31
B36	0,04	-2,43	12,51	1,12	1,26	12,47	9,20
M38	2,33	-6,53	57,69	10,00	107,97	57,53	15,76
M39	9,38	0,92	50,83	4,50	25,66	51,50	23,61

Jak widać, w większości przypadków wartości skośności i spłaszczenia świadczą o braku normalności reszt, co potwierdził też test Jarque-Bera. Badano również występowanie efektu ARCH w resztach modelu za pomocą testu Engle'a. Efekt ARCH stwierdzono tylko w siedmiu przypadkach.

Za pomocą filtru Kalmana oraz alternatywnych modeli opisanych w rozdziale 2 wykonano prognozy, otrzymując wyniki przedstawione w tab. 3.

Tabela 3

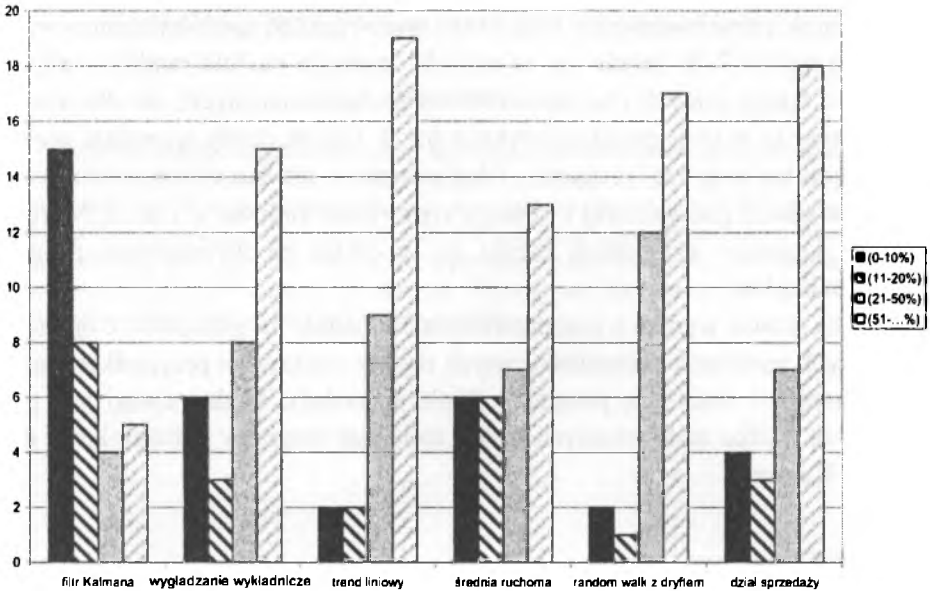
Prognozy i rzeczywiste wielkości sprzedaży

Kod asortymentu	Prognozy						Sprzedaż rzeczywista
	filtr Kalmana	wygładzanie wykładnicze	trend liniowy	średnia ruchoma	random walk z dryftem	dział sprzedaży	
1	2	3	4	5	6	7	8
K1	22	42	16	38	19	64	20
K2	90	74	19	44	51	194	90
U3	74	65	63	52	36	60	56
U4	65	49	56	24	2	38	23
P5	6	22	18	28	38	36	7
P6	18	31	23	29	10	17	15
P7	40	82	90	58	72	63	55
M8	189	115	82	210	153	69	195
B9	9	6	6	4	6	15	9

cd. tabeli 3

1	2	3	4	5	6	7	8
K10	14	13	9	18	7	20	13
K11	4	34	21	18	29	40	5
U12	331	213	226	240	269	209	335
U13	122	122	91	129	298	109	118
U14	4	42	48	23	67	49	9
N15	184	193	146	218	388	177	195
N16	885	195	177	195	364	165	815
N17	402	329	363	313	332	308	355
N18	108	138	158	133	286	96	99
N19	33	128	139	113	264	85	55
K22	495	561	606	585	651	667	501
K25	448	339	354	439	280	392	505
B29	6	8	9	9	3	8	6
K30	20	7	8	2	3	8	20
K31	62	24	28	32	6	35	62
P32	9	19	17	29	1	22	13
P33	3	15	14	6	4	16	7
U34	20	55	40	58	76	39	24
U35	10	19	18	18	7	18	4
B36	15	17	18	18	24	24	17
M38	10	11	-4	16	2	8	11
M39	8	22	2	10	23	58	9

Na podstawie wykonanych prognoz obliczono błąd bezwzględny jako różnicę rzeczywistej wielkości sprzedaży i prognozy. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci histogramów szeregów rozdzielczych, w których klasami są przedziały wielkości błędów prognoz (wartości bezwzględne błędów).



Rys. 1. Porównanie jakości prognoz krótkookresowych za pomocą wybranych modeli

Jak widać, w przypadku wszystkich zestawów danych najczęściej prognoz o błędzie nie większym niż 10% jest w przypadku filtra Kalmana – dla 19 asortymentów błąd prognozy nie jest większy od pięciu. Najmniej prognoz o błędzie nie większym od 10% jest w przypadku prognoz zbudowanych na podstawie analizy trendu liniowego i modelu typu random walk z dryfmem. Za zdecydowanie najlepszymi prognozami z wykorzystaniem filtra Kalmana podążają kolejno prognozy oparte na metodzie średniej ruchomej i wygładzania wykładniczego, które są lepsze od prognoz działu sprzedaży opartych na metodach jakościowych. Przypadki, w których błędy prognoz są duże, wynikają ze znacznej nieregularności szeregów czasowych, na podstawie których wyznaczono te prognozy.

Wnioski

W przedsiębiorstwach produkujących ceramikę sanitarną bardzo istotnym problemem zarządzania jest ustalenie wielkości produkcji, tak aby dokładnie zaspokoić popyt, bez konieczności utrzymywania większych zapasów wyrobów gotowych danego asortymentu. W przedsiębiorstwach ceramiki sanitarnej decyzje o wielkości produkcji są podejmowane na podstawie jakościowych prognoz działów sprzedaży. Najczęściej ustala się wielkość produkcji opierając się

na wielkości sprzedaży w ostatnim okresie, przeważnie w ostatnim tygodniu. Często praktycy – pracownicy tych firm – nazywają taki sposób prognozowania „metodą naiwną”. W istocie jest to metoda oparta na modelu random walk bez dryftu, o takich samych charakterystykach probabilistycznych, jak dla modelu (15), z tym że w tych charakterystykach $\beta = 0$. Jednak działy sprzedaży nie podają błędu tak ustalonej prognozy. Błąd prognozy jest iloczynem wartości wariancji w chwili początkowej i czasu, a więc rośnie liniowo w czasie. Nieregularność szeregów czasowych często nie pozwala na wyznaczenie prognoz o małym błędzie.

Jak jednak wynika z przeprowadzonych badań, prognozowanie oparte na wybranych modelach ekonometrycznych daje w większości przypadków rezultaty lepsze niż intuicyjne prognozy działu sprzedaży. Godne uwagi jest przy tym to, że z kilku zastosowanych metod najlepsze prognozy jednokrokowe dała metoda Kalmana.

Literatura

1. Gurgul H., Mysza S., Syrek R.: *Modele GARCH w prognozowaniu wielkości sprzedaży ceramiki sanitarnej*. W: *Zarządzanie przedsiębiorstwem w warunkach integracji europejskiej*. Cz. 2. Red. M. Czyż, Z. Cięciwa. AGH, Kraków 2004, s. 391-400.
2. Gurgul H., Schleicher St.: *Estymatory MNK a estymatory sekwencyjne*. „Folia Oeconomica Cracoviensia” 1996, Vol. XXXVIII, Kraków 1994-1995, s. 153-162.
3. Gurgul H., Mestel R., Schleicher C.: *Stock Market Reactions to Dividend Announcements: Empirical Evidence from the Austrian Stock Market*. „Financial Markets and Portfolio Management” 2003, Vol. 17, No 3, s. 332-350.
4. Hamilton D.J.: *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1994.
5. Mestel R., Gurgul H.: *ARIMA Modeling of Event Induced Stock Price Reactions in Austria*. „Central European Journal of Operations Research” 2003, Springer-Verlag, Vol. 11, No 4, p. 317-333.
6. Mills T.C.: *The Econometrics of Financial Markets*. Cambridge University Press, Cambridge 1999.
7. Skowronek C.: *Zapasy w majątku obrotowym sektora przedsiębiorstw*. „Gospodarka Materiałowa i Logistyka” 1998, nr 1, 2.
8. Zeliaś A.: *Teoria prognozy*. PWE, Warszawa 1997.

**APPLICATION OF KALMAN FILTERING TO FORECASTING
THE SALE SIZE BY SANITARY CERAMICS COMPANY****Summary**

Forecasts can be valuable sources of information for the process of planning the output of sales of sanitary ceramics. The correct forecasts can significantly improve the management process within the firm. In the paper the one step forecasts by Kalman filtering, exponential smoothing, moving average, random walk with drift and linear trend are compared. One can also find enclosed qualitative forecasts of the sale department. It has been proved that forecasts based on the mentioned models (especially Kalman filtering) are less biased than the traditional forecasts of sale departments that are based on intuition.