Tadeusz Janaszak

OPIS MIERNIKÓW EKONOMICZNYCH ZA POMOCĄ HOMOMORFIZMÓW LINIOWYCH I WYKŁADNICZYCH

1. Rachunek marginalny i różniczkowy

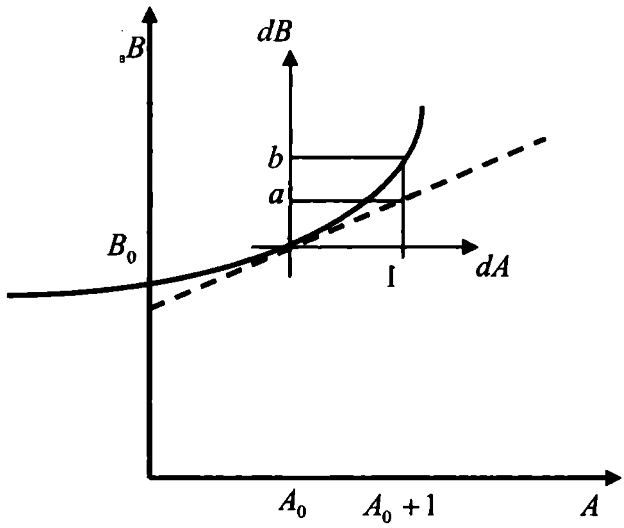
W mikroekonomii uprawia się rachunek marginalny. Niekiedy jest on utożsamiany z rachunkiem różniczkowym Nazwa „rachunek marginalny" ma swoje uzasadnienie w historycznym rozwoju nauki. Zanim na terenie ekonomii zaczęto stosować metody rachunku różniczkowego, mówiono o wielkościach krańcowych. Wielkość krańcową definiowano jako bezwzględny przyrost zmiennej zależnej *B*, w reakcji na przyrost zmiennej niezależnej *A* o jednostkę. Określano np. koszt marginalny jako koszt wyprodukowania ostatniej jednostki wytwarzanego dobra. W teorii użyteczności – jako użyteczność ostatniej jednostki towaru, którego użyteczność badamy. W teorii konsumpcji marginalna stopa substytucji towaru *A* przez towar *B*, to ilość jednostek towaru *B*, którą zdecyduje się oddać konsument za zwiększenie swojej konsumpcji towaru *A* o jedną jednostkę[1]. W zagadnieniach ekonomicznych jednostki są na ogół ukształtowane tak, że są niepodzielne. Trudno sobie np. wyobrazić pół samochodu, roweru czy oferowaną do sprzedaży niepełną paczkę papierosów[2]. Tak więc na terenie ekonomii naturalne jest określenie przyrostu zmiennej zależnej, gdy zmienna niezależna wzrośnie o jednostkę. Wielkość tę nazywa się krańcowym przyrostem zmiennej niezależnej. Jeśli krańcowa wielkość nie zmienia się zbyt szybko wraz ze wzrostem zmiennej niezależnej *A*, to przy wzroście zmiennej niezależnej *A* o dwie jednostki można przyjmować, że zmienna zależna *B* zmieni się o wartość dwu wielkości krańcowych obliczonych poprzednio. Oznacza to, ni mniej, ni więcej, że zależność przyrostu zmiennej zależnej dB od przyrostu zmiennej niezależnej dA przebiega liniowo. Stąd też uprawnione

---

[1] Jednostki, w jakich mierzymy towar *A*, mogą być inne niż jednostki, w jakich mierzymy towar *B*.

[2] Starsi Czytelnicy zapewne zaprotestują w tym miejscu, gdyż w latach 50. i 60. „Sporty" można bylo kupić na sztuki. Jednakże sztuka jest w tym momencie z całą pewnością jednostką niepodzielną. Ułamkowe ilości papierosów nie występują w sprzedaży, można je znaleźć na chodniku jako tzw. trotuaresy. Te mogą być, co prawda, przedmiotem obrotu, lecz nie w licencjonowanych punktach handlowych. Tak więc w zagadnieniach ekonomicznych dochodzimy zazwyczaj do kresu podzielności jednostek.

jest stosowanie na terenie ekonomii wyników rachunku różniczkowego, istotą tego rachunku jest bowiem lokalna aproksymacja przyrostu funkcji nieliniowych przez funkcje liniowe.



Rys. 1. Przebieg procesu

Na rys. 1 przebieg globalny procesu ekonomicznego zaznaczono linią ciągłą, a styczną do niego linię prostą – linią przerywaną. Jeśli zmienna niezależna A wzrośnie o jednostkę, to zmienna zależna B wzrośnie o b jednostek, natomiast styczna do procesu wzrośnie o wielkość a, czyli o a jednostek. Tak więc wielkość marginalna[3] wynosi b, natomiast pochodna procesu[4] wynosi a. Chcąc zatem stosować na terenie ekonomii w rachunku marginalnym wyniki rachunku różniczkowego, trzeba pójść na pewien kompromis. Za wielkość marginalną musimy przyjąć nie wielkość b, która jest faktycznym przyrostem funkcji odpowiadającym przyrostowi zmiennej niezależnej o jednostkę, lecz wielkość a, która jest równa pochodnej procesu w punkcie A_0. Klasyczny rachunek marginalny jest utożsamiany na terenie ekonomii z rachunkiem różniczkowym. Zwróćmy uwagę, że nazywając pochodną wzrostem zmiennej zależnej, gdy zmienna niezależna wzrośnie o jednostkę, czyli utożsamiając pochodną z wiel-

[3] Termin „wielkość marginalna" rozumiemy jako synonim terminu „przyrost krańcowy". Na rys. 1 krzywa jest wznosząca, toteż wielkość marginalna jest dodatnia. Dla krzywych opadających, jak np. w teorii konsumenta, przyrost krańcowy będzie ujemny.

[4] Termin „proces" jest w tym momencie synonimem matematycznego pojęcia funkcji.

kością marginalną, popadamy w oczywistą sprzeczność, bowiem $a \neq b$. Z drugiej strony nie można w dziedzinie ekonomii zrezygnować z pojęcia wielkości marginalnej zdefiniowanej następująco: wielkość marginalna to przyrost zmiennej zależnej, gdy zmienna niezależna wzrośnie o jednostkę. Definicja taka znajduje uzasadnienie w historycznym procesie rozwoju ekonomii. Chcąc jednak skorzystać w ekonomii z wyników rachunku różniczkowego, trzeba utożsamić wielkość krańcową (na rys. 1 wielkość *b*) z pochodną (na rys. 1 wielkość *a*). Jak zatem wybrnąć z formalnej sprzeczności rachunku różniczkowego i marginalnego?

Aby rozwiązać ten problem, nie należy utożsamiać rachunku marginalnego z rachunkiem różniczkowym, lecz przyjąć rachunek różniczkowy za język rachunku marginalnego. Dokładność pomiarów w ekonomii z natury rzeczy nie jest idealna, więc kształt krzywych przedstawiających przebiegi procesów ekonomicznych jest na ogół znany, natomiast dokładne wartości funkcji nie są znane. Można zatem przyjąć rysunek krzywej obrazującej przebieg procesu za globalny, w dużym zakresie zmiennej niezależnej, przebieg procesu, natomiast lokalnie przyjmować, że przebieg procesu jest liniowy. Na rys. 1, przy takiej konwencji, linia ciągła to globalny przebieg procesu, natomiast linia przerywana to lokalny przebieg procesu. Jeśli przyjmiemy taką konwencję, eliminujemy sprzeczność między pojęciem przyrostu marginalnego zmiennej zależnej i pochodnej tej zmiennej. Dla funkcji liniowych przyrost marginalny i pochodna są wielkościami identycznymi[5]. Własności lokalne procesu to termin używany

[5] Problemy z zastosowaniem rachunku różniczkowego występują w również fizyce. R.P. Feynman w pierwszym tomie *Wykładów* na kilku stronach (s. 127-131) opisuje ruch spadającego swobodnie kamienia. Zgodnie z drugim prawem Newtona, z każdą chwilą kamień nabiera coraz większej szybkości. Można liczyć zatem średnie szybkości kamienia w różnych odcinkach czasu. Nie sposób jednak przyjąć za definicję prędkości chwilowej drogi kamienia przebytej w czasie ostatniej sekundy. Jeśli bowiem zmierzymy drogę przebytą w czasie pól sekundy, to podwojenie tej drogi nie da w wyniku drogi przebytej faktycznie w czasie sekundy. Droga przebyta w czasie drugiej połowy sekundy będzie większa, niż droga przebyta w ciągu pierwszej połowy sekundy, gdyż chyżość kamienia wzrasta z każdą chwilą, a więc w żadnym odcinku czasu droga przebyta przez kamień nie jest liniową funkcją czasu. Z drugiego prawa Newtona wiadomo, że przebyta droga zależy od czasu w sposób kwadratowy. Toteż żaden fizyk nie odważy się powtórzyć za ekonomistą: prędkość chwilowa to ilość metrów przebyta w czasie ostatniej sekundy. Fizyk wie, że szybkość spadającego kamienia ciągle wzrasta i stwierdzenia zapożyczone z rachunku marginalnego nie mają sensu na terenie fizyki.

Jadąc samochodem, moglibyśmy ewentualnie, przy bardzo spokojnej jeździe, przyjąć prędkość chwilową za ilość metrów przebytych w ostatniej sekundzie, gdyż zmiany prędkości samochodu nie muszą być gwałtowne. Gdyby umieścić w samochodzie licznik pokazujący w metrach na sekundę prędkość chwilową samochodu, krańcowa ilość metrów, czyli ilość metrów przebytych w ostatniej sekundzie, niewiele różniłaby się od prędkości chwilowej pokazywanej przez licznik prędkości samochodu. Przeniesienie tego rozumowania na powszechnie używaną jednostkę: kilometry na godzinę, byłoby pozbawione sensu, gdyż każdy użytkownik samochodu wie, że w czasie jazdy po drogach publicznych niemożliwe jest utrzymanie przez całą godzinę jednakowej prędkości. Jeśli na odcinku o dozwolonej prędkości siedemdziesiąt kilometrów na godzinę pojedziemy „setką", nie unikniemy mandatu, tłumacząc, że podczas ostatniej godziny przejechaliśmy zaledwie pięćdziesiąt kilometrów.

na terenie matematyki; w dziedzinie ekonomii mówi się raczej o własnościach krańcowych. W świetle przyjętych warunków używania rachunku różniczkowego jako języka rachunku marginalnego, własności krańcowe są jednymi z własności lokalnych procesów. Inne własności lokalne będziemy rozpatrywać w dalszej części opracowania.

Z zastosowaniami rachunku różniczkowego do ekonomii jest związana jeszcze jedna trudność. Jak wspomnieliśmy, jednostki w ekonomii nie są podzielne, a rachunek różniczkowy zakłada nieskończone rozdrabnianie przedziałów. Przyjmując jednak konwencję, że globalny przebieg procesu jest krzywą, a lokalny prostą, usuwamy również i tę przeszkodę. Wartości funkcji liniowej obliczamy dla takich wielkości argumentu, dla jakich mają one sens[6].

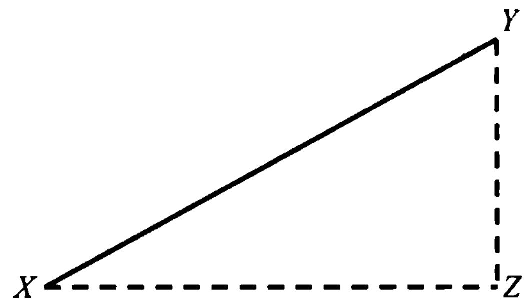
2. Prosta styczna jako własność krańcowa

W rachunku różniczkowym istnieją różne sposoby konstrukcji pochodnej. W najprostszym ujęciu o pochodnej funkcji w danym punkcie mówi się jako o tangensie nachylenia prostej stycznej do danej linii będącej wykresem interesującej nas funkcji. Tak to tłumaczy w podręczniku do ekonomii P.A. Samuelson [16, s. 208]: *„Krańcowa skłonność do konsumpcji*[7] *jako* ***geometryczna***[8] *miara nachylenia.* Wiemy teraz, jak wyliczyć *MPC* z danych o dochodzie i konsumpcji. A co z jej wyrażeniem geometrycznym? *MPC* jest miarą liczbową nachylenia funkcji konsumpcji". W przypisie na tej samej stronie P.A. Samuelson wyjaśnia: „Miarę liczbową nachylenia jakiejś linii można zilustrować za pomocą narysowanego dalej trójkąta. Przez miarę nachylenia linii *XY* zawsze rozumiemy liczbowy stosunek długości odcinka *ZY* do odcinka *XZ*. Nachylenie jest więc stosunkiem *przyrostu w pionie do przesunięcia w poziomie.*

[6] Fizyk może mierzyć czas z coraz większą dokładnością w miarę rozwoju techniki pomiarowej. W końcu też zostanie mu jakaś niepodzielna jednostka. Jednakże w teoretycznych rozważaniach fizyk jest przekonany, że czas płynie w sposób ciągły i jego upływ można z powodzeniem zobrazować za pomocą kontinuum liczb rzeczywistych. Jest zatem w zupełnie innej sytuacji niż ekonomista, który w przykładach obserwowanych przez siebie zjawisk ma do czynienia z wielkościami dyskretnymi. A jednak zarówno w fizyce, jak i w ekonomii z powodzeniem stosuje się rachunek różniczkowy. Tak więc matematyka jest uniwersalnym językiem wielu dziedzin, lecz zakres rozumienia jej wyników musi być w każdej z dziedzin starannie interpretowany i weryfikowany.

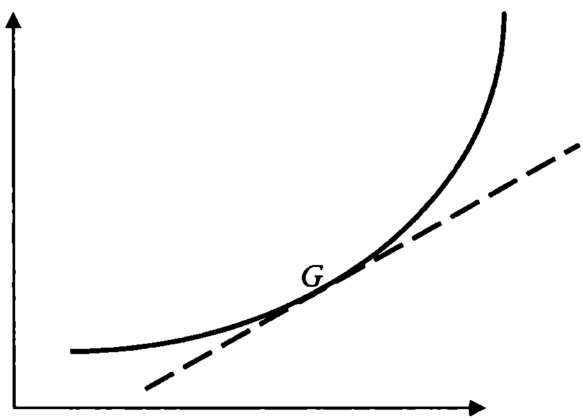
[7] W skrócie *MPC*.

[8] Moje podkreślenie (T.J.).



Rys. 2

Jeżeli linia *XY* nie jest prostą, jak to się dzieje w przypadku wielu krzywych występujących w teorii ekonomii, nachylenie krzywej obliczamy jako nachylenie stycznej do krzywej w danym punkcie. Innymi słowy, jeśli znaleźć nachylenie w punkcie *G* (rys. 2.), to (1) najpierw przykładamy linijkę, rysując styczną w punkcie *G*, a następnie (2) obliczamy kąt nachylenia – stosunek przyrostu w pionie do przesunięcia w poziomie – narysowanej linii stycznej. W przypadku funkcji konsumpcji jej nachyleniem jest *MPC*, czyli krańcowa skłonność do konsumpcji. Analogicznie tam, gdzie chodzi o funkcję oszczędności, jej nachylenie definiujemy jako krańcową skłonność do oszczędzania, czyli *MPS*".



Rys. 3

Rozumowanie Samuelsona składa się z trzech etapów:

(i) Wyjaśnienie, czym jest liczbowa miara nachylenia linii prostej.

(ii) Narysowanie linii prostej stycznej do wykresu funkcji obrazującej przebieg procesu ekonomicznego.

(iii) Przyjęcie liczbowej miary nachylenia linii prostej stycznej do funkcji obrazującej przebieg procesu ekonomicznego jako lokalną właściwość tej funkcji.

Samuelson nie wyjaśnia, czym jest styczność; za pomocą linijki kreśli prostą, która realizuje intuicyjne pojęcie styczności. Zakłada przy tym, że formalne ujęcie styczności tkwi w podstawach rachunku różniczkowego. Geometryczna miara nachylenia funkcji, obrazującej przebieg procesu, jest jego własnością lokalną, natomiast wygląd całej krzywej jest globalną własnością procesu. Wielkość marginalna jest w rozumowaniu Samuelsona tożsama z pochodną.

W analizie matematycznej za pochodną funkcji w zadanym punkcie można przyjmować zarówno liczbę będącą granicą ilorazu różnicowego, która geometrycznie jest miarą nachylenia funkcji, jak i prostą styczną. Prosta styczna w układzie współrzędnych: odcięta A, rzędna B ma wzór:

$$B - B_0 = a \cdot (A - A_0) \tag{1}$$

a w układzie współrzędnych: odcięta dA, rzędna dB:

$$dB = a \cdot dA \text{ [9]} \tag{2}$$

Ostatni wzór można zapisać w formie:

$$a = \frac{dB}{dA} \tag{3}$$

skąd widać, że współczynnik kierunkowy a jest tangensem nachylenia stycznej oraz „ceną", którą trzeba zapłacić w jednostkach towaru B za jedną jednostkę towaru A[10]. Prosta (2) jest wyznaczona przez liczbę a. Jeśli ustalony jest punkt (A_0, B_0), to prosta (1) jest jednoznacznie określona przez liczbę a. Stąd wynika, że pochodna może być uważana zarówno za liczbę, jak i za obiekt geometryczny – prosta, jak i obiekt algebraiczny – funkcja liniowa dana wzorem (1) lub homomorfizm liniowy dany wzorem (2)[11]. Ponieważ teoria matematyki utożsa-

[9] Pierwszy z tych wzorów nazywa się funkcją liniową, a drugi – homomorfizmem liniowym.

[10] Te na pozór oczywiste sprawy należy jasno punktować. Autorowi uświadomił to znajomy prawnik, który mówił, że tak długo rozumie mikroekonomię, aż nie pojawi się termin „tangens".

[11] W teoretycznej matematyce pokazuje się wzajemną odpowiedniość obiektów geometrycznych, algebraicznych i liczbowych. Jeśli zbiory obiektów są z pewnego punktu widzenia identyczne, to mówi się o nich, że są izomorficzne. Obiektów izomorficznych można używać wymiennie [9].

mia liczby z prostymi, a te z funkcjami i homomorfizmami liniowymi, wszystkie te obiekty mogą być uważane za pochodne. Pochodne utożsamiliśmy w rachunku marginalnym z wielkościami krańcowymi, więc uprawnione jest uważanie za wielkości krańcowe zarówno liczby będące współczynnikami nachylenia prostych stycznych do procesów[12], jak i same proste styczne czy ich wzory algebraiczne (1) i (2)[13].

Potraktujmy teraz wzory (1) i (2) jako równania pęku linii prostych. Współczynnik a uważamy za parametr przebiegający zbiór liczb rzeczywistych. Poszukiwanie wielkości krańcowej może być traktowane jako wybór z pęku tej prostej, która jest styczna do wykresu badanego procesu[14].

3. Multiplikatywny charakter wzrostu kapitału w czasie

Rozważmy zmiany wysokości kapitału w czasie. Niech wielkość kapitału K będzie funkcją czasu t. W zagadnieniach związanych ze zmianami wielkości kapitału ekonomistę nie tyle interesują przyrosty bezwzględne dK kapitału, co przyrosty względne $\frac{dK}{K}$. Względny przyrost nie ma miana. Ponieważ w komunikacji liczby niemianowane są niewygodne w użyciu, więc stosuje się odczyt wielkości przyrostu względnego w ujęciu procentowym. Względną wielkość przyrostu mnoży się przez 100%. Procentowy odczyt przyrostu względnego, oprócz tego, że daje tej wielkości miano, ma tę zaletę, że podaje liczby łatwiejsze do zrozumienia. Lepiej jest usłyszeć, że wartość kapitału wzrosła o 2,5%, niż że kapitał wzrósł 1,025 razy. Liczba 1,025 to iloraz wartości kapitału po wzroście o 2,5% i pierwotnej jego wielkości. Wprowadźmy oznaczenie:

$$qK = \frac{K + dK}{K}, \text{ czyli } qK = 1 + \frac{dK}{K} \tag{4}$$

[12] Czyli tangensami nachylenia tych prostych.

[13] Uświadomienie sobie tych prostych faktów jest ważne, gdyż niektórzy ekonomiści, nawet zajmujący się metodami ilościowymi, podobnie jak znajomy prawnik autora, natychmiast przestają rozumieć wypowiedź, gdy padnie słowo „homomorfizm".

[14] W pracy [9] pokazano, że przy użyciu tego pęku można zdefiniować pojęcie styczności w kategoriach topologicznych. Pojęcie to okazuje się tożsame z klasyczną definicją styczności, będącą podstawą rachunku różniczkowego.

Wielkość qK jest krotnością wzrostu kapitału[15]. Z punktu widzenia analizy zastosowania języka matematyki do zagadnień ekonomicznych, lepiej jest operować wielkościami niemianowanymi qK oraz $\frac{dK}{K}$ niż odczytem procentowym tych wielkości[16]. W rachunku różniczkowym symbolem dK oznacza się różniczkę zmiennej K, a symbolem qK – quotus zmiennej K [9]. Ekonomistę interesuje nie tylko względny wzrost kapitału, lecz również czas, w jakim się ten wzrost dokonał. Zauważmy od razu, że czas płynie w sposób addytywny, a ekonomistę interesuje multiplikatywny wzrost kapitału w czasie.

Zgodnie z poczynionymi uwagami w zagadnieniach praktycznych lepiej jest mówić o procentach niż o krotności. Kryje się jednak tutaj pewne niebezpieczeństwo pomylenia pojęć. Odczytując za pomocą procentów względny wzrost kapitału, mówimy: „kapitał wzrósł o pewną ilość procent". Wyrażenie to sugeruje, że badamy addytywny, a nie multiplikatywny przyrost kapitału, skąd wynika, że wykresy funkcji obrazujących wzrost kapitału aproksymuje się liniami prostymi, co jest niewłaściwą metodą postępowania, gdyż do aproksymacji procesów związanych z finansami powinny być użyte funkcje wykładnicze, a nie liniowe. Linie proste, zgodnie z poczynionymi wcześniej uwagami, można utożsamić z homomorfizmami grupy addytywnej zbioru liczb rzeczywistych w siebie i są narzędziem odpowiednim do badania procesów, w których zarówno w dziedzinie, jak i przeciwdziedzinie interesują nas przyrosty addytywne. W finansach upływający czas można utożsamić z addytywną grupą zbioru liczb rzeczywistych, natomiast w przeciwdziedzinie takich procesów mamy do czynienia z multiplikatywną grupą zbioru liczb rzeczywistych. Stąd też najodpowiedniejszym narzędziem badawczym procesów w dziedzinie finansów są homomorfizmy i funkcje wykładnicze.

W sytuacji gdy mierzymy tempo wzrostu kapitału w czasie, staramy się uchwycić liczbowo stosunek przyrostu względnego kapitału do czasu dt, w jakim ten przyrost się dokonał. Jeśli dt jest przedziałem czasu o określonej długości, to jedną z możliwości wyrażenia zależności względnego przyrostu kapitału od czasu jest wzór:

---

[15] Termin „krotność" jest łatwy do zrozumienia, gdy wartość kapitału wzrośnie np. dwa razy, czyli dwukrotnie. Jeśli kapitał wzrośnie 1,025 razy, to wyrażenie: „kapitał wzrósł jeden i dwadzieścia pięć tysięcznych krotnie" jest mało zrozumiałe. Wyrażenie: „kapitał wzrósł o dwa i pół procent" jest na pewno łatwiejsze w odbiorze.

[16] Odczyt procentowy jest bardzo wygodny i czytelny w zagadnieniach praktycznych, jednakże czasami jest nadużywany. O ile łatwo przyjąć informację, że ceny wzrosły w ciągu badanego okresu o 2% lub 35%, o tyle trudno zrozumieć, co to znaczy, że ceny te wzrosły o 500%. W pierwszej chwili odbiorca informacji myśli, że ceny wzrosły pięciokrotnie, a po zastanowieniu dojdzie do skutku, że jednak wzrosły sześciokrotnie. W takich sytuacjach lepiej jest operować krotnością niż procentami.

$$\frac{1}{dt}\cdot\frac{dK}{K}\cdot 100\%,\ \text{czyli}\ \frac{1}{dt}\cdot\frac{dK}{K} \tag{5}$$

który nosi nazwę nominalnej stopy zwrotu kapitału K w okresie od momentu t do momentu $t+dt$, wyrażonej w procentach na jednostkę czasu. W praktycznych zagadnieniach jako miano podaje się tylko procent, a za podstawową jednostkę czasu przyjmuje się jeden rok. Wartość wyrażenia danego wzorem (5) nie zależy od jednostki, jaką mierzymy kapitał K i jego przyrost bezwzględny dK, natomiast zależy od przyjętej jednostki czasu.

Oprócz wzoru (5) w praktyce gospodarczej stosuje się również wzór na tzw. efektywną stopę procentową:

$$\left(\left(1+\frac{dK}{K}\right)^{\frac{1}{dt}}-1\right),\ \text{czyli}\ \left((qK)^{\frac{1}{dt}}-1\right) \tag{6}$$

Wzory (6) można przemnożyć przez 100% i wówczas otrzymamy procentowy odczyt tych wielkości. Wzór (5) jest znacznie prostszy od wzoru (6). Obydwa są ważne w działalności gospodarczej, gdyż pozwalają na obliczenie spodziewanej stopy zwrotu kapitału w alternatywnych przedsięwzięciach gospodarczych, które inwestor ma do wyboru. Załóżmy, że każde z możliwych do realizacji przedsięwzięć może być przeprowadzone w czasie odpowiednim dla danej alternatywy, wówczas za pomocą wzoru (5) lub (6) oblicza się, w jakim tempie będzie rósł kapitał dla każdego członu alternatywy. Inwestor lub ekspert od podejmowania decyzji w przedsiębiorstwie lub instytucji finansowej dobrze wie, jak zinterpretować wzory (5) i (6). Wzór (5) jest prostszy, ale daje tylko orientację, jaki jest rząd stopy zwrotu; dokładną jej wartość ekspert uzyskuje dopiero po zastosowaniu bardziej skomplikowanego wzoru (6)[17]. W następnym punkcie zanalizujemy, jakimi obiektami geometrycznymi i algebraicznymi są stopy zwrotu dane wzorami (5) i (6).

[17] W podejmowaniu decyzji o kierunku inwestowania, oprócz wielkości obliczonej za pomocą wzorów (5) lub (6) bierze się pod uwagę wiele innych czynników, jak np. stopień ryzyka, dobra marka kontrahenta, obecność na danym rynku, powiązania nieformalne i inne. Wielkość stopy zwrotu jest jednym z czynników wpływających na decyzję.

4. Stopy zwrotu jako obiekty algebraiczne i geometryczne

Załóżmy, że przedsięwzięcie rozpoczyna się w chwili t_0, trwa jeden miesiąc i przynosi w tym czasie 2% zysku. Oznacza to, że z każdej złotówki po miesiącu uzyskamy dwa grosze zysku. Ponieważ jeden miesiąc to jedna dwunasta roku, więc przyjmując jeden rok za podstawową jednostkę ze wzoru (5), uzyskujemy wartość nominalnej stopy procentowej równą 24%.

Gdybyśmy zatem powtórzyli przedsięwzięcie dwunastokrotnie, za każdym razem inwestując tylko początkowy kapitał K_0, po roku uzyskalibyśmy dwadzieścia cztery grosze od każdej złotówki. Stan kapitału K_0 po roku przy tak prowadzonych operacjach wynosiłby:

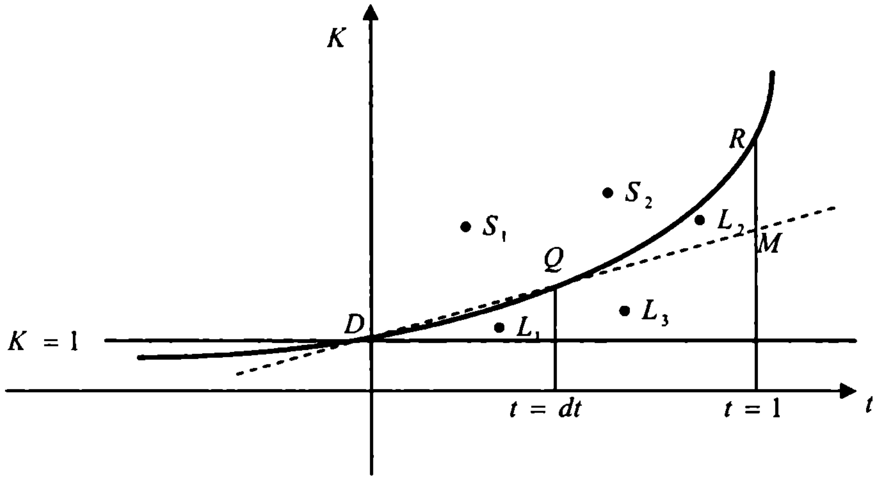
$$K_0 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02}{\frac{1}{12}}\right) = K_0 \cdot (1 + 12 \cdot 0{,}02) = K_0 \cdot (1 + 0{,}24) = K_0 \cdot 1{,}24$$

Aby znaleźć nominalną stopę zwrotu jako długość pewnego odcinka, wykreślimy prostą przechodzącą przez punkty o współrzędnych: $(0, 1)$ oraz (dt, α), gdzie współczynnik α jest równy względnemu przyrostowi kapitału w czasie od t_0 do momentu $t_0 + dt$. W przykładzie liczbowym dt jest równe $\frac{1}{12}$, natomiast współczynnik α wynosi 0,02. Prosta ta ma w układzie współrzędnych: odcięta t, rzędna K, równanie:

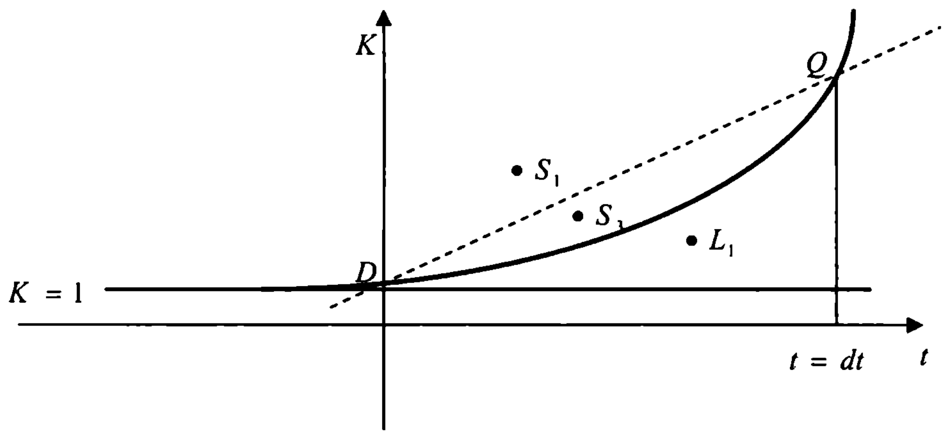
$$K = 1 + \frac{\alpha}{dt} \cdot t \tag{7}$$

Daje ono zależność od czasu wartości jednej złotówki w oprocentowaniu prostym, czyli zwrot kapitału w przedsięwzięciu, w którym nie inwestuje się zarobionych od kapitału zysków[18], tak jak zostało opisane powyżej.

[18] W rozumowaniu pomijamy opodatkowanie.



Rys. 4



Rys. 5

Na rys. 4 wykresem nominalnej stopy procentowej[19] jest prosta przerywana D, Q, przy czym punkt D ma współrzędne $(0,1)$, a punkt Q ma współrzędne (dt, α), gdzie, jak powiedziano wyżej, współczynnik α jest równy względnemu przyrostowi kapitału w czasie od t_0 do momentu $t_0 + dt$. Współczynnik ten geometrycznie jest długością odcinka zawartego między prze-

[19] Termin „stopa procentowa" uważamy w tym rozumowaniu za stopę zwrotu.

cięciem prostych $K = 1$ i $t = dt$ oraz punktem Q. Nominalna stopa procentowa β jest równa $\beta = \frac{\alpha}{dt}$. W przykładzie liczbowym $\beta = 0{,}24$. Liczba β jest wyrażona długością odcinka prostej o równaniu $t = dt$ zawartego między przecięciem prostych $K = 1$ i $t = 1$ oraz prostą D, Q, czyli punktem M. Przy użyciu nominalnej stopy procentowej równanie (7) można przepisać w formie:

$$K = 1 + \beta \cdot t \tag{8}$$

Powtarzając przedsięwzięcie inwestycyjne dwunastokrotnie, za każdym razem inwestując nie tylko początkowy kapitał, ale i pieniądze zarobione w poprzednich przedsięwzięciach, uzyskalibyśmy dochód nie tylko z kapitału początkowego, ale i z zysku przynależnego w kolejnych przedsięwzięciach. Z teorii procentu składanego wiadomo, że stan kapitału K po roku przy tak prowadzonych operacjach wynosiłby $K \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$. Na rys. 4 krzywa D, Q ma równanie:

$$K = (1 + \alpha)^{\frac{t}{dt}} \tag{9}$$

Efektywna stopa procentowa γ jest równa $\gamma = (1 + \alpha)^{\frac{1}{dt}} - 1$, co geometrycznie oznacza długość odcinka prostej pionowej o równaniu $t = 1$, zawartego między przecięciem tej prostej z prostą poziomą $K = 1$ oraz punktem R. Różnica między stopą efektywną i nominalną daje długość odcinka M, R. W przykładzie liczbowym efektywna stopa procentowa wynosi 0,2682[20]. Różnica między efektywną i nominalną stopą zwrotu wynosi 0,0282[21].

Wielkość $\varepsilon = \gamma + 1$, czyli $\varepsilon = (1 + \alpha)^{\frac{1}{dt}}$, jest spodziewaną[22] przyszłą wartością jednej jednostki pieniężnej po roku, gdy za każdym razem inwestujemy całość kapitału, czyli wyjściowy kapitał wraz z zyskiem. Na rys. 4 wielkość ε wyraża odległość punktu R od osi odciętych. W tej sytuacji po czasie t wartość wyjściowego kapitału K_0 szacuje się ze wzoru:

$$K = K_0 \cdot \varepsilon^t, \text{ czyli } K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{dK}{K_0}\right)^{\frac{t}{dt}} \tag{10}$$

Wstawiając we wzorach (4) K_0 w miejsce K, możemy wzór (10) zapisać w następującej formie:

[20] W praktyce odczytujemy tę wielkość jako 26,82%.
[21] W odczycie procentowym 2,82%.
[22] W rozumowaniu pomijamy kwestie związane z ryzykiem przedsięwzięcia.

$$K = K_0 \cdot (qK)^{\frac{t}{dt}} \tag{11}$$

W przyjętych oznaczeniach przyszła wartość jednej jednostki pieniężnej przy oprocentowaniu złożonym ε jest równa:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{dK}{K_0}\right)^{\frac{1}{dt}} \quad \text{czyli} \quad \varepsilon = (qK)^{\frac{1}{dt}} \tag{12}$$

Podobnie wielkość $\delta = \beta + 1$, mierzona odległością punktu M od osi odciętych, jest spodziewaną przyszłą wartością jednostki pieniężnej po roku, w sytuacji gdy za każdym razem inwestujemy nie całość posiadanego aktualnie kapitału, lecz sam wyjściowy kapitał. W tej sytuacji po czasie t wartość wyjściowego kapitału K_0 szacuje się ze wzoru:

$$K = K_0 \cdot \delta \cdot t \tag{13}$$

czyli:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{dt} \cdot \frac{dK}{K_0}\right) . t \tag{14}$$

Wzór (10) daje funkcję wykładniczą, natomiast wzór (13) daje linię prostą. Funkcję wykładniczą (10) otrzymaliśmy przez zastosowanie procentu składanego, natomiast funkcję liniową (13) na podstawie zastosowania oprocentowania prostego. Uzasadniona jest zatem konwencja nazywania oprocentowania składanego oprocentowaniem wykładniczym, a oprocentowania prostego oprocentowaniem liniowym[23].

W punkcie 2 wykazaliśmy, że wielkości krańcowe występujące w naukach ekonomicznych można przedstawić nie tylko jako liczby, lecz również jako obiekty geometryczne lub algebraiczne, a mianowicie jako proste, względnie jako wzory wyrażające te proste. Podobnie jest ze stopami procentowymi. Stopy w oprocentowaniu prostym[24] mogą być uważane za linie proste dane wzorami: (7), (8), (13) lub (14), przy czym wzory (7) i (8) wyrażają ruch jednej

[23] Kwestia ustalenia terminologii jest ważna. W gremium przedstawicieli ekonomistów i matematyków zajmujących się metodami ilościowymi w naukach ekonomicznych powstała dyskusja. Ekonomista gorąco protestował przeciwko używaniu przez matematyka terminów: „oprocentowanie wykładnicze" i „oprocentowanie liniowe". Gdyby terminy: „oprocentowanie wykładnicze" i „oprocentowanie liniowe" byłyby używane w działalności praktycznej, mogłyby być one niezrozumiałe ze względu na brak tradycji ich używania. W momencie jednak, gdy prowadzi się rozważania na terenie ekonomii jako dyscypliny naukowej, używanie terminów „oprocentowanie wykładnicze" i „oprocentowanie liniowe" w miejsce terminów „oprocentowanie złożone" i „oprocentowanie proste" jest uzasadnione.

[24] Inaczej liniowym.

jednostki pieniężnej w czasie, a wzory (13) i (14) wyrażają ruch wyjściowego kapitału w czasie, przy zastosowaniu takiego właśnie oprocentowania. Stopy w oprocentowaniu złożonym można utożsamiać z funkcjami wykładniczymi danymi wzorami: (9), (10) i (11). Wzór (9) daje ruch jednej jednostki pieniężnej w czasie i jest homomorfizmem wykładniczym, wzory (10) i (11) wyrażają ruch wyjściowego kapitału w czasie, przy zastosowaniu oprocentowania złożonego[25].

5. Porównywanie stóp zwrotu w oprocentowaniu prostym i wykładniczym

Wyjaśnimy na przykładzie korzyść z takiego ujęcia stóp procentowych. Na rys. 4 i 5[26] przedstawiono wykresy obu stóp: liniowej i wykładniczej. Linia prosta D,Q,M jest stopą zwrotu rozpatrywanego przedsięwzięcia w oprocentowaniu prostym, natomiast krzywa wykładnicza D,Q,R jest stopą zwrotu tego samego przedsięwzięcia w oprocentowaniu złożonym. Punktami S_i oraz L_i, gdzie $i = 1,2,3$, oznaczono możliwe przedsięwzięcia w stosunku do przedsięwzięcia reprezentowanego przez punkt Q. Każde z możliwych przedsięwzięć ma być realizowane w różnych przedziałach czasowych. Wykreślenie krzywej wykładniczej D,Q,R wskaże, które z przedsięwzięć mają wyższą, a które niższą efektywną stopę wzrostu od przedsięwzięcia reprezentowanego przez punkt Q. W przykładzie przedsięwzięcia mające wyższą efektywną stopę wzrostu to przedsięwzięcia reprezentowane przez punkty S_1, S_2 i S_3, gdyż punkty te leżą ponad krzywą wykładniczą D,Q,R. Przedsięwzięcia reprezentowane przez punkty L_1, L_2 i L_3 mają niższą efektywną stopę wzrostu, gdyż punkty te leżą pod krzywą wykładniczą D,Q,R.

Jeśli dane przedsięwzięcie przewyższa przedsięwzięcie alternatywne pod względem efektywnej stopy zwrotu, to nie musi go przewyższać pod względem nominalnej stopy zwrotu i odwrotnie. Na rys. 4 i 5 stopę nominalną wyższą od stopy nominalnej przedsięwzięcia reprezentowanego przez punkt Q mają przedsięwzięcia reprezentowane przez punkty S_1, S_2 i L_2, natomiast niższą te, które są reprezentowane przez punkty S_3, L_1 i L_3.

[25] Widać zatem, że używanie w naukach ekonomicznych terminu „oprocentowanie wykładnicze" jako synonimu terminu „oprocentowanie złożone" jest w pełni uzasadnione.

[26] Rysunek 5 jest powiększeniem rys. 4 w pasie od prostej pionowej o równaniu $t = 0$ do prostej pionowej o równaniu $t = dt$.

6. Stopy wzrostu w ujęciu lokalnym

Załóżmy teraz, że mamy dany wykres funkcji:

$$K = K(t) \tag{15}$$

reprezentującej zależność wysokości kapitału w czasie. Wybierzmy punkt (t_0, K_0) leżący na wykresie funkcji (15). Przechodząc we wzorze (12) do granicy $dt \to 0$, otrzymamy podstawę funkcji wykładniczej stycznej do funkcji (15) w punkcie (t_0, K_0). Styczną tę, zgodnie z punktami (i), (ii), (iii) rozumowania Samuelsona, można uważać za lokalną stopę zwrotu kapitału lub w zależności od rozpatrywanej treści ekonomicznej – za lokalne tempo wzrostu. Tempo to można utożsamiać z wykładniczą funkcją styczną lub z jej parametrami: podstawą lub logarytmem tej podstawy. W literaturze ekonomicznej ta ostatnia wielkość jest nazywana pochodną logarytmiczną.

Literatura

1. Begg D., Dornbusch R., Fischer S.: *Ekonomia. Mikroekonomia.* Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2000.
2. Cartan H.: *Calcul Differentiel Formes Differentieles.* Herman, Paris 1967.
3. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.: *Feynmana wykłady z fizyki.* PWN, Warszawa 1974.
4. Fichtenholz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy.* PWN, Warszawa 1966.
5. Forlicz S., Jasiński M.: *Mikroekonomia.* Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 2000.
6. Janaszak T.: *Pochodna wykładnicza w matematyce finansowej.* Ekonometria 5. AE, Wrocław 2000, s. 35-50.
7. Janaszak T.: *Topologie lejków.* Dydaktyka Matematyki 1. AE, Wrocław 2000a, s. 23-38.
8. Janaszak T.: *Uwagi o funkcjach stycznych.* Ekonomia Matematyczna 5. AE, Wrocław 2001, s. 121-132.
9. Janaszak T.: *Równoległy rachunek różniczkowy w badaniach ekonomicznych.* AE, Wrocław 2003, s. 215.

10. Janaszak T.: *Quotus i różniczka.* Zeszyty Naukowe AE, nr 36, Katowice 2005.
11. Janaszak T.: *O zasadzie wiązek stycznych.* „Przegląd Statystyczny" 2005, t. 52, zesz. 2, s. 23-39.
12. Janaszak T.: *Pochodna wykładnicza jako efektywna stopa procentowa.* „Przegląd Statystyczny" 2005, t. 52, zesz. 4, s. 41-59.
13. Jaśkiewicz G.: *Metoda odwzorowań liniowych w analizie układów nieliniowych.* Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1965.
14. Klimczak B.: *Mikroekonomia.* AE, Wrocław 1998.
15. Kuratowski K.: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej.* PWN, Warszawa 1975.
16. Samuelson P., Nordhaus W.: *Ekonomia.* PWN, Warszawa 1999.
17. Smoluk A.: *O definicji pochodnej.* AE, Wrocław 1992, s. 19-23.
18. Smoluk A.: *Algebra $o(f)$, czyli jeszcze o lejkach.* Dydaktyka Matematyki 1. AE, Wrocław 2000, s. 15-21.

LINEAR AND EXPONENTIAL FUNCTIONS AS THE ECONOMICS MEASURE

Summary

In this article two situations of dependence between the variables are considered. If in the set of independent variables and the set of dependent variables the additive growth is the point of interest then the right instrument of the local measure of growth is a classical linear calculus. If in the set of independent variables the additive growth and in the set of dependent variables the relative growth are the points of interest then the right instrument of the local measure of growth is a parallel calculus. This calculus has been constructed by the exponential function.