Jerzy Mika

O PROCEDURACH ELEMENTARNYCH W METODZIE UOGÓLNIONYCH MACIERZY ODWROTNYCH WYZNACZANIA ROZWIĄZAŃ UOGÓLNIONYCH ZADAŃ OPTYMALIZACJI LINIOWEJ

Wprowadzenie

W niniejszym opracowaniu przedstawiono elementy aktualnych idei w teorii rozwiązań uogólnionych liniowych zadań optymalizacyjnych w kontekście ich potencjalnego wykorzystywania do wspomagania procesów decyzyjnych i dalszego rozwoju idei teoretycznych w zakresie przedmiotowym.

Zasadnicze rozważania poprzedzono przedstawieniem genezy problemu i zwięzłą charakterystyką zagadnień decyzyjnych w naukach ekonomicznych, zwłaszcza w zarządzaniu. Główne idee dotyczące natury zjawiska sprzeczności w optymalizacji, pojęcia uogólnionych rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych zadań programowania matematycznego i praktycznego wykorzystywania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadań optymalizacyjnych rozpatrywanych typów, zwłaszcza związane z wykorzystywaniem do tego celu uogólnionych macierzy odwrotnych, nawiązują do wcześniejszych publikacji autora, a przede wszystkim prac [6; 7; 8].

1. Zadania optymalizacyjne

Opracowanie teorii i metod numerycznych rozwiązywania modeli optymalizacyjnych, będących wielowymiarowymi zadaniami ekstremalnymi z ograniczeniami, jest domeną programowania matematycznego. Podstawowym pojęciem programowania matematycznego jest zadanie programowania matematycznego, określane jako problem wyznaczania ekstremów pewnej funkcji $f(X)$ rzeczywistej lub wektorowej n zmiennych rzeczywistych na n-wymiarowym podzbiorze $\boldsymbol{D}$ przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$. Wektor $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$ nazywamy wektorem zmiennych decyzyjnych, a jego składowe x_j (dla j = 1,2, ...,n) – zmiennymi decyzyjnymi.

Optymalizowaną funkcję *f(X)* nazywamy funkcją celu lub funkcją kryterium, a zbiór $D \subset R^n$ zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Nie tracąc pełnej ogólności rozważań, można przyjąć, że w programowaniu matematycznym pojęcie ekstremum oznacza minimum albo maksimum funkcji oraz skupić uwagę na zagadnieniu minimalizacji funkcji kryterium na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych (por. np. [1]).

Ogólną postać zadania programowania matematycznego można zatem zapisać w następującej postaci:

$$min\left\{ f(X);\ X \in D \subseteq R^n \right\}$$

a jego optymalne rozwiązanie w postaci:

$$X^* = arg\ min\left\{ f(X);\ X \in D \subseteq R^n \right\}$$

W teorii programowania matematycznego (por. np. [10]) zadania programowania matematycznego dzieli się, co charakterystyczne, według różnego rodzaju nierozłącznych i wzajemnie przenikających się klasyfikacji.

Dalsze rozważania w niniejszym opracowaniu będą dotyczyć ograniczonej klasy zadań programowania matematycznego, a mianowicie zadań programowania liniowego w tzw. postaci kanonicznej:

$$min\left\{ CX;\ AX = b,\ X \geq \Theta \right\}$$

gdzie:

A, b, C – macierze o wymiarach dowolnych, lecz wynikających z kontekstu.

Optymalnym rozwiązaniem rozpatrywanego zadania jest wektor:

$$X^* = \arg\ min\left\{ CX;\ AX = b,\ X \geq \Theta \right\}$$

a zbiorem wszystkich rozwiązań optymalnych jest zbiór:

$$\{X^*\} = Arg\ min\left\{ CX;\ AX = b,\ X \geq \Theta \right\}$$

przy czym, ze względu na równoważność wszystkich postaci zadań programowania liniowego, można bez straty ogólności, w głównym nurcie rozważań, ograniczyć się dalej do wyłącznego rozpatrywania wybranej postaci zadań programowania liniowego. Podstawowe rezultaty rozważań zostaną przeniesione również na pokrewną klasę tzw. zadań programowania liniowego w postaci kanonicznej:

$$min\left\{ CX;\ AX \leq b,\ X \geq \Theta \right\}$$

gdzie:

A, b, C – macierze o wymiarach dowolnych, lecz wynikających z kontekstu.

Optymalnym rozwiązaniem rozpatrywanego zadania jest wektor:

$$X^* = arg\ min\{\ CX\ ;\ AX \le b,\ X \ge \Theta\ \}$$

a zbiorem wszystkich rozwiązań optymalnych jest zbiór:

$$\{X^*\} = Arg\ min\{\ CX\ ;\ AX \le b,\ X \ge \Theta\ \}$$

2. Zagadnienie sprzeczności w procedurach optymalizacji liniowej

Konkretne zastosowania badań operacyjnych w praktyce zarządzania i sterowania procesami gospodarczymi lub technologicznymi ukazuje powszechność występowania zjawiska sprzeczności w różnych fazach wykorzystywania modeli optymalizacyjnych badań operacyjnych. Naturalność występowania zjawiska sprzeczności w tego rodzaju procesach sygnalizuje już klasyczna zasada racjonalnego działania. Z formalnego punktu widzenia sprzeczność modeli optymalizacyjnych wykorzystywanych w zastosowaniach badań operacyjnych jest jedynie prostym przeciwieństwem zjawiska zgodności i oznacza, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych i rozwiązań optymalnych rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego jest pusty i w rezultacie proces rozwiązywania problemu jest zakończony. Tego rodzaju podejście jest charakterystyczne dla ściśle matematycznego obszaru teorii programowania matematycznego. Odmienne podejście jest natomiast uprawnione z praktycznego punktu widzenia, a więc gdy następuje koncentracja na problemie wykorzystania zadania optymalizacyjnego i jego rozwiązań do realnego wspomagania konkretnych procesów podejmowania optymalnych decyzji. W związku z powyższym powstaje problem opracowania konkretnych i efektywnych, lecz nieklasycznych metod postępowania w przypadkach występowania zjawiska sprzeczności w zastosowaniach metod optymalizacyjnych, a także adaptacji uzyskiwanych rezultatów tych metod do procesów wspomagania podejmowania optymalnych decyzji. Przede wszystkim warto zauważyć, że obiektywna możliwość występowania sprzecznych modeli optymalizacyjnych w procesach wspomagania podejmowania optymalnych decyzji wymaga sprecyzowania różnych możliwych do zastosowania strategii postępowania w takich przypadkach. W związku z tym przyjmujemy, że wobec fenomenu sprzeczności w zastosowaniach metod optymalizacyjnych do wyboru będą następujące trzy możliwości postępowania:

- rezygnacja w procesie podejmowania decyzji z odpowiedniego zadania optymalizacyjnego w przypadku, gdy okazało się ono sprzeczne,
- korekcja sprzecznego zadania optymalizacyjnego wykorzystywanego do celu wspomagania procesu decyzyjnego,

– określenie akceptowalnego pojęcia uogólnionych rozwiązań sprzecznego zadania optymalizacyjnego oraz metody ich wyznaczania i wykorzystania w procesach decyzyjnych.

Strategia rezygnacji jest podejściem skrajne pasywnym i praktycznie cofającym procedurę aplikacji metod optymalizacyjnych w procesach decyzyjnych do punktu wyjścia, czyli ponownego zrewidowania wstępnych etapów metodologii badań operacyjnych.

Przez pojęcie korekcji sprzecznych zadań optymalizacyjnych rozumie się odpowiednią ich modyfikację, w wyniku której modele skorygowane (czyli powstałe w wyniku korekcji) będą w określonym sensie bliskie wyjściowym modelom i jednocześnie niesprzeczne. Podstawowym zagadnieniem jest tutaj przyjęcie właściwego sposobu korekcji parametrów zadań sprzecznych. Istotny jest też problem znacznego ryzyka związanego z dużą wrażliwością klasycznych numerycznych metod obliczeniowych optymalizacji na małe zmiany parametrów modeli optymalizacyjnych.

Koncepcja rozwiązań uogólnionych w zastosowaniach sprzecznych modeli optymalizacyjnych we wspomaganiu procesów decyzyjnych wymaga natomiast na wstępie właściwego sformułowania pojęcia uogólnionych rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych wykorzystywanych zadań programowania matematycznego oraz w konsekwencji opracowania efektywnych metod ich wyznaczania i przyjmowania w charakterze rozwiązań suboptymalnych wyjściowych modeli sprzecznych. Pojęcie rozwiązań uogólnionych powinno być przy tym definiowane tak, aby zbiory dopuszczalnych i optymalnych rozwiązań uogólnionych dla zgodnych zadań optymalizacyjnych były tożsame ze zbiorami rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych tych zadań w klasycznym sensie.

Przedmiotem rozważań w kolejnej części niniejszego opracowania będzie konkretyzacja idei koncepcji rozwiązań uogólnionych dla wybranej klasy zadań programowania liniowego.

3. Metoda uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej

Idea metody uogólnionych macierzy odwrotnych w programowaniu liniowym polega na (por. np. [7]) wykorzystaniu w procesie poszukiwania optymalnych uogólnionych rozwiązań zadań programowania liniowego odpowiedniego typu, specjalnych dwuparametrycznych wektorów w następującej postaci:

$$X(z,U) = A^{+}b + \frac{M^{T}}{\|M\|^{2}}(z - CA^{+}b) + (E - A^{+}A)(E - \frac{M^{T}M}{\|M\|^{2}})U$$

gdzie, dla szczególnego przypadku zadania programowania liniowego w postaci kanonicznej:

$$M = C(E - A^{+}A)$$

A, b, C – parametry rozpatrywanego zadania programowania liniowego,

$z \in R$, $U \in R^{n}$ – liczba i wektor, będące parametrami wektora w postaci $X(z, U)$.

Koncentrując uwagę na zagadnieniu poszukiwania optymalnych realizacji zadań optymalizacyjnych na potrzeby wspomagania procesów podejmowania optymalnych decyzji, w szczególności w ekonomii i zarządzaniu, sensowne i merytorycznie uzasadnione jest ograniczenie rozważań do sytuacji, gdy zbiory rozwiązań lub rozwiązań uogólnionych rozpatrywanych zadań optymalizacyjnych będą niepuste i ograniczone. Inne przypadki mają bowiem wyłącznie teoretyczne znaczenie i wskazują, że model optymalizacyjny nieadekwatnie odzwierciedla rozpatrywany proces decyzyjny.

Konieczny do odnotowania z teoretycznego punktu widzenia, lecz praktycznie bezużyteczny, jest też przypadek, gdy M = 0. Wtedy wartość funkcji kryterium w każdym punkcie zbioru uogólnionych rozwiązań dopuszczalnych jest taka sama i wynosi $CA^{+}b$, a więc proces optymalizacji nie ma sensu i w konsekwencji przypadek ten może być, bez szkody dla ogólności rozważań, wyłączony z głównego nurtu rozważań jako nieistotny przypadek szczególny.

Uwzględniając powyższe uwagi, można sformułować następujące twierdzenie (jego szczegółowy dowód zawiera np. praca [8]) o optymalnych rozwiązaniach uogólnionych zadania programowania liniowego w rozpatrywanej postaci.

Twierdzenie

Jeżeli zbiór dopuszczalnych rozwiązań uogólnionych zadania programowania liniowego w postaci kanonicznej $min\{\, CX;\ AX \leq b,\ X \geq \Theta \,\}$ jest niepusty i ograniczony, to następujący wektor:

$$X(z^{*},U^{*}) = A^{+}b + \frac{M^{T}}{\|M\|^{2}}(z^{*} - CA^{+}b) + (E - A^{+}A)(E - \frac{M^{T}M}{\|M\|^{2}})U^{*}$$

gdzie:

$$M = C(E - A^{+}A)$$

$$z^* = \{z \in R;\ \bigvee_{U \in R^n} X(z,U) =$$

$$= A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2}(z - CA^+ b) + (E - A^+ A)(E - \frac{M^T M}{\|M\|^2})U \geq \Theta\}$$

U^* – dowolny wektor z R^n, dla którego realizuje się minimum określone po wyższym wzorem,

będzie optymalnym rozwiązaniem uogólnionym rozpatrywanego zadania programowania liniowego, a liczba z^* – optymalną wartością funkcji kryterium tego zadania.

Jeżeli natomiast zachodzi warunek:

$$\neg[\ \bigvee_{\tilde{z} \in R}\ \bigvee_{U \in R^n} \tilde{X}(z,U) \geq \Theta\ ]$$

to rozpatrywane zadanie optymalizacji liniowej ma tylko trywialne, zerowe rozwiązanie optymalne Θ.

Podstawową wersję algorytmu metody uogólnionych macierzy odwrotnych, dostosowaną do wyznaczania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadań programowania liniowego w postaci kanonicznej, można obecnie przedstawić za pomocą następującej procedury czteroetapowej.

Etap 1

Dla wyjściowych parametrów A, b, C rozpatrywanego zadania programowania liniowego $\min\{\ CX;\ AX = b,\ X \geq \Theta\ \}$, wyznaczyć uogólnioną macierz odwrotną A^+ oraz wektor:

$$M = C(E - A^+ A)$$

Etap 2

Skonstruować dwuparametryczny wektor w postaci:

$$X(z,U) = A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2}(z - CA^+ b) + (E - A^+ A)(E - \frac{M^T M}{\|M\|^2})U$$

dla dowolnego wektora $U \in R^n$.

Etap 3

Wyznaczyć liczbę $z^* \in R$ i odpowiadający jej wektor takie, aby liczba z^* spełniała warunek optymalności z powyższego twierdzenia dla wektora $U = U^*$.

Etap 4

Dla liczby $z^* \in R$ i wektora $U^* \in R^n$, wyznaczonych w etapie 3, skonstruować wektor:

$$X(z^*, U^*) = A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2}(z^* - CA^+ b) + (E - A^+ A)(E - \frac{M^T M}{\|M\|^2})U^*$$

który, zgodnie z tezą cytowanego wyżej twierdzenia o optymalnych rozwiązaniach uogólnionych zadania programowania liniowego, jest poszukiwanym uogólnionym rozwiązaniem optymalnym rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego.

Charakterystyczną cechą zaproponowanej procedury metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej jest to, że czynności składające się na realizację etapu pierwszego i trzeciego rekomendowanego postępowania, poza wyznaczaniem uogólnionej macierzy odwrotnej A^+, są standardowymi działaniami z zakresu klasycznego rachunku macierzowego, przy czym proces wyznaczania uogólnionych macierzy odwrotnych można również dodatkowo sprowadzić do ciągu standardowych operacji rachunku macierzowego. Tak więc zasadniczym problemem pozostaje realizacja drugiego etapu. W tym zakresie można polecać różne efektywne sposoby postępowania. W szczególności efektywny jest wariant realizacji drugiego etapu procedury rozpatrywanej metody, nazywany podstawowym wariantem metody uogólnionych macierzy odwrotnych w programowaniu liniowym, zaproponowany w pracy [8].

4. Alternatywne procedury elementarne metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej

Praktyczne stosowanie sformułowanej wyżej metody wyznaczania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadań optymalizacji rozpatrywanego typu może wiązać się z istotnymi utrudnieniami o charakterze numerycznym w związku z koniecznością wyznaczania odpowiednich uogólnionych macierzy już na wstępie procedur obliczeniowych. Wprawdzie dla każdej macierzy A istnieje uogólniona macierz odwrotna A^+ i jest ponadto jedyna, lecz proces jej wyznaczania jest w ogólnym przypadku procedurą, co prawda efektywną, lecz nieelementarną i mogącą być wyjątkowo złożoną numerycznie. W związku z tym na szczególną uwagę zasługuje to, że istnieje szeroka klasa zadań optymalizacji liniowej, dla której wyznaczanie odpowiednich uogólnionych macierzy odwrotnych w proponowanych procedurach metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej można sprowadzić do ciągu procedur w pełni elementarnych, niewymagających stosowania specjalnych i skomplikowanych metod numerycznych.

Najbardziej istotną klasę zadań optymalizacji liniowej tego typu stanowią zadania optymalizacji liniowej w postaci standardowej:

$$min\{\, CX;\ AX \le b,\ X \ge \Theta \,\}$$

Teoria optymalizacji liniowej dowodzi, że zadania tego typu mogą być łatwo przekształcone w rozpatrywany wcześniej typ zadań optymalizacji w postaci kanonicznej:

$$min\{\, \overline{C}\overline{X};\ \overline{A}\overline{X} = b,\ \overline{X} \ge \Theta \,\}$$

gdzie parametrami będą następujące wektory blokowe:

$$\overline{A} = [E,\ A]$$

$$\overline{C} = [\Theta, C]$$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} X_s \\ X \end{bmatrix}$$

gdzie:

X_s – wektor kolumnowy, którego składowymi jest m swobodnych zmiennych bilansujących,

E – odpowiednia macierz jednostkowa.

Łatwo ponadto zauważyć, że dla tego typu przekształconych zadań optymalizacji liniowej, w procedurach metody wyznaczania uogólnionych rozwiązań optymalnych zachodzi konieczność wyznaczania uogólnionych macierzy odwrotnych w szczególnej postaci $\overline{A} = [E,\ A]$. Okazuje się też, że w procedurach numerycznych wyznaczania wymaganej uogólnionej macierzy odwrotnej będzie można wykorzystać tezę następującego twierdzenia o wyznaczaniu macierzy odwrotnej do macierzy blokowej (por. np. [2]).

Twierdzenie

Uogólnioną macierzą odwrotną do macierzy blokowej w postaci:

$$A_1 = [A_2, \quad A_3]$$

jest następująco określona macierz blokowa:

$$A_1^+ = \begin{bmatrix} A_2^+ - A_2^+ A_3 W \\ W \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$W = V^+ - (E - V^+V)LA_3^T (A_2^+)^T A_2^+ (E - A_3 V^+)$$

$$V = (E - A_2 A_2^+) A_3$$

$$L = \{E + [A_2^+ A_3 (E - V^+V]^T [A_2^+ A_3 (E - V^+V]\}^{-1}$$

Za pomocą elementarnych przekształceń macierzowych można pokazać, że prawdziwe jest też następujące twierdzenie będące szczególnym przypadkiem powyższego ogólnego twierdzenia o wyznaczaniu uogólnionych macierzy odwrotnych dla macierzy blokowych.

Twierdzenie

Uogólnioną macierzą odwrotną do macierzy blokowej w szczególnej postaci:

$$\overline{A} = [E, \quad A]$$

jest następująco określona macierz blokowa:

$$P = \overline{A}^+ = [E, \quad A]^+ = \begin{bmatrix} E - A(E + A^T A)^{-1} A^T \\ (E + A^T A)^{-1} A^T \end{bmatrix}$$

W związku z powyższym można sformułować następującą zmodyfikowaną wersję ogólnego twierdzenia o wyznaczaniu uogólnionych rozwiązań optymalnych zadania optymalizacji liniowej w postaci kanonicznej, równoważnego rozpatrywanemu obecnie zadaniu optymalizacji liniowej w postaci standardowej.

Twierdzenie

Jeżeli zbiór dopuszczalnych rozwiązań uogólnionych zadania programowania liniowego w postaci kanonicznej $\min\left\{ \overline{C}\overline{X};\ \overline{A}\overline{X}=b,\ \overline{X}\geq\Theta \right\}$ jest niepusty i ograniczony, to następujący wektor:

$$\hat{X}_0\left(\hat{z}_o^*,U_o^*\right)=\begin{bmatrix}\hat{X}_s\left(\hat{z}_o^*,U_o^*\right)\\ \hat{X}\left(\hat{z}_o^*,U_o^*\right)\end{bmatrix}=Pb+\frac{N^T}{\|N\|^2}(\hat{z}_o^*-\overline{C}Pb)+(E-P\overline{A})(E-\frac{N^TN}{\|N\|^2})U_o^*$$

gdzie:

$$P=\begin{bmatrix}E-A(E+A^TA)^{-1}A^T\\ (E+A^TA)^{-1}A^T\end{bmatrix}$$

$$N=\overline{C}(E-P\overline{A})$$

$$\hat{z}_o^*=\{\hat{z}\in R;\ \bigvee_{U\in R^n}\ \hat{X}(\hat{z},U)=$$

$$=Pb+\frac{N^T}{\|N\|^2}(\hat{z}-\overline{C}Pb)+(E-P\overline{A})(E-\frac{N^TN}{\|N\|^2})U\geq\Theta\}$$

U_0^* – dowolny wektor z R^n, dla którego realizuje się minimum określone powyższym wzorem,

jest optymalnym rozwiązaniem uogólnionym rozpatrywanego zadania programowania liniowego, a liczba $\hat{z}_o^*$ jest optymalną wartością funkcji kryterium tego zadania.

Jeżeli natomiast zachodzi warunek:

$$\neg[\ \bigvee_{\hat{z}\in R}\ \bigvee_{U\in R^n}\ \hat{X}(\hat{z},U)\geq\Theta\ ]$$

to rozpatrywane zadanie optymalizacji liniowej ma tylko trywialne, zerowe rozwiązanie optymalne Θ.

Z powyższych rozważań dotyczących procesów wyznaczania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadań optymalizacji liniowej rozpatrywanych typów oraz z elementarnej klasycznej teorii optymalizacji liniowej wynika, że jeżeli następujący wektor blokowy:

$$\hat{X}_0\left(\hat{z}_o^*, U_o^*\right) = \begin{bmatrix} \hat{X}_s\left(\hat{z}_o^*, U_o^*\right) \\ \hat{X}\left(\hat{z}_o^*, U_o^*\right) \end{bmatrix}$$

jest optymalnym rozwiązaniem uogólnionym zadania optymalizacji liniowej $min\left\{\ \overline{C}\overline{X};\ \overline{A}\overline{X}=b,\ \overline{X}\geq\Theta\ \right\}$ w postaci kanonicznej, to następująca jego składowa:

$$\hat{X}\left(\hat{z}_o^*, U_o^*\right)$$

jest optymalnym rozwiązaniem uogólnionym równoważnego zadania optymalizacji liniowej $min\left\{\ CX;\ AX\leq b\ \ X\geq\Theta\ \right\}$ w postaci standardowej.

W rozpatrywanym kontekście rozważań szczegółowych, dotyczących wyznaczania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadań optymalizacji liniowej z procedurami elementarnego wyznaczania odpowiednich uogólnionych macierzy odwrotnych, warto dodatkowo zauważyć, że macierz współczynników przy zmiennych decyzyjnych zadania optymalizacyjnego $min\left\{\ \overline{C}\overline{X};\ \overline{A}\overline{X}=b,\ \overline{X}\geq\Theta\ \right\}$ jest macierzą rzędu pełnego oraz:

$$rz\overline{A} = rz[E, A] = m$$

Wobec tego, na podstawie elementarnych faktów z zakresu ogólnej teorii uogólnionych macierzy odwrotnych, wnioskujemy, że uogólnioną macierzą odwrotną dla macierzy blokowej szczególnego typu $\overline{A} = [E, A]$ jest:

$$\overline{A}^+ = \overline{A}^T(\overline{A}\cdot\overline{A}^T)^{-1}$$

Jeżeli dodatkowo zauważyć i uwzględnić w rozważaniach, że:

$$rz(E + A^T A) = n$$

oraz:

$$rz(\overline{A}\cdot\overline{A}^T) = rz\left([E, A]\cdot[E, A]^T\right) = m$$

to można wysunąć wniosek, że wyznaczenie uogólnionej macierzy odwrotnej dla macierzy blokowej $\overline{A} = [E, A]$ według następującej formuły:

$$P=\overline{A}^{+}=[E,\quad A]^{+}=\begin{cases}\begin{bmatrix}E-A(E+A^{T}A)^{-1}A^{T}\\ (E+A^{T}A)^{-1}A^{T}\end{bmatrix}, gdy: n<m\\ \\ \overline{A}^{T}(\overline{A}\cdot\overline{A}^{T})^{-1}\qquad, gdy:\ n>m\end{cases}$$

jest procedurą najbardziej efektywną numerycznie, jeżeli jako kryterium efektywności przyjąć minimalizację stopnia macierzy odwracanej w procesie elementarnego wyznaczania uogólnionej macierzy odwrotnej odpowiedniego typu.

W odniesieniu do rozpatrywanego problemu nieelementarnego wyznaczania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadania optymalizacji liniowej w postaci standardowej $min\{\ CX\ ;\ AX\le b\ ,\ X\ge\Theta\ \}$, można obecnie zaproponować następującą sześcioetapową procedurę efektywnego rozwiązywania problemu tego typu.

Etap 1

Dla wyjściowego zadania optymalizacji liniowej w następującej postaci standardowej:

$$min\{\ CX\ ;\ AX\le b,\ X\ge\Theta\ \}$$

skonstruować następujące równoważne zadanie optymalizacji liniowej w postaci kanonicznej:

$$min\{\ \overline{C}\overline{X};\ \overline{A}\overline{X}=b,\ \overline{X}\ge\Theta\ \}$$

Etap 2

Dla wyznaczonych parametrów $\overline{A}$ i $\overline{C}$ równoważnego zadania optymalizacji liniowej $min\{\ CX\ ;\ AX=b,\ X\ge\Theta\ \}$, wyznaczyć uogólnioną macierz odwrotną $P=\overline{A}^{+}$ oraz wektor:

$$N=\overline{C}(E-P\overline{A})$$

Etap 3

Skonstruować dwuparametryczny wektor w postaci:

$$\hat{X}(\hat{z},U)=Pb+\frac{N^{T}}{\|N\|^{2}}(\hat{z}-\overline{C}Pb)+(E-P\overline{A})(E-\frac{N^{T}N}{\|N\|^{2}})U$$

dla dowolnego wektora $U\in R^{n+m}$.

Etap 4

Wyznaczyć liczbę $\hat{z}_o^* \in R$ i odpowiadający jej wektor takie, aby liczba ta spełniała warunek optymalności z powyższego twierdzenia dla wektora $U = U_o^*$.

Etap 5

Dla liczby $\hat{z}_o^* \in R$ i wektora $U_o^* \in R^n$, wyznaczonych w etapie 4, skonstruować wektor:

$$\hat{X}_0(\hat{z}_o^*, U_o^*) = \begin{bmatrix} \hat{X}_s(\hat{z}_o^*, U_o^*) \\ \hat{X}(\hat{z}_o^*, U_o^*) \end{bmatrix} = Pb + \frac{N^T}{\|N\|^2}(\hat{z}_o^* - \overline{C}Pb) + (E - P\overline{A})(E - \frac{N^T N}{\|N\|^2})U_o^*$$

który, zgodnie z tezą cytowanego wyżej twierdzenia o optymalnych rozwiązaniach uogólnionych zadania programowania liniowego, jest poszukiwanym uogólnionym rozwiązaniem optymalnym rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego.

Etap 6

Uwzględniając przyjęty w rozważaniach rozkład wektora będącego optymalnym rozwiązaniem uogólnionym równoważnego zadania optymalizacji liniowej w postaci kanonicznej na następujące bloki:

$$\hat{X}_0(\hat{z}_o^*, U_o^*) = \begin{bmatrix} \hat{X}_s(\hat{z}_o^*, U_o^*) \\ \hat{X}(\hat{z}_o^*, U_o^*) \end{bmatrix}$$

stwierdzamy, że optymalnym rozwiązaniem uogólnionym równoważnego zadania optymalizacji liniowej $min\{\ CX\ ;\ AX \le b,\ X \ge \Theta\ \}$ jest jego druga składowa, a mianowicie wektor w postaci:

$$\hat{X}(\hat{z}_o^*, U_o^*)$$

Cechą charakterystyczną powyższej procedury metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej jest to, że czynności składające się na realizację etapu drugiego zalecanego postępowania, w tym wyznaczanie uogólnionej macierzy odwrotnej $\overline{A}^+$, są standardowymi działaniami z zakresu klasycznego rachunku macierzowego, a więc procesy te można sprowadzić do ciągu standardowych operacji rachunku macierzowego. W związku z tym zasadniczym problemem pozostaje realizacja drugiego etapu. W tym zakresie można również polecić zaproponowany wcześniej tzw. podstawowy wariant metody uogólnionych macierzy odwrotnych w programowaniu. Jest przy tym charakterystyczne, że można dodatkowo dokonać wyboru procedury najbardziej efektywnej numerycznie, jeżeli za kryterium efektywności przyjąć minimalizację stopnia macierzy odwracanej w procesie elementarnego wyznaczania uogólnionej macierzy odwrotnej odpowiedniego typu.

Podsumowanie

Podstawową cechą przedstawionej koncepcji rozwiązań uogólnionych i metody uogólnionych macierzy odwrotnych wyznaczania uogólnionych rozwiązań optymalnych zadań programowania liniowego jest ich uniwersalność w tym sensie, że poza mniej istotnymi przypadkami szczególnymi (zwłaszcza z punktu widzenia potencjalnych zastosowań praktycznych), są one efektywne dla zadań optymalizacji liniowej rozpatrywanych typów. Niemałe znaczenie ma również fakt, że zastosowanie proponowanej idei wyznaczania optymalnych rozwiązań uogólnionych zadań programowania liniowego do rozwiązywania zgodnych zadań optymalizacji liniowej rozpatrywanych typów zawsze skutkuje otrzymywaniem podobnych wyników do tych, które uzyskano by, gdyby zastosowano klasyczne koncepcje i metody obliczeniowe programowania liniowego. Wobec tego zaproponowana koncepcja rozwiązań uogólnionych może być wykorzystywana w zastosowaniach metod optymalizacji liniowej do wspomagania procesów podejmowania optymalnych decyzji niezależnie od tego, czy wykorzystywane w tych procesach decyzyjnych zadania programowania liniowego są zgodne czy też sprzeczne. Na etapie rozwiązywania odpowiedniego zadania programowania liniowego (w procesie wspomagania realnych problemów decyzyjnych) przy zastosowaniu proponowanej w niniejszym opracowaniu koncepcji rozwiązań uogólnionych, dopiero po wyznaczeniu optymalnych rozwiązań uogólnionych wystarczy sprawdzić i stwierdzić, czy osiągnięty rezultat jest rozwiązaniem w sensie klasycznej teorii programowania matematycznego, czy też rozwiązaniem uogólnionym w rozpatrywanym sensie. Ponadto można zauważyć, że wykorzystanie modeli liniowych może nie wystarczać w niektórych procesach wspomagania podejmowania optymalnych decyzji ekonomicznych, zarządczych lub technicznych. Nieliniowość modeli optymalizacyjnych jest na ogół wynikiem tzw. efektu dużej skali lub nieaddytywności w optymalizowanych procesach. W przypadkach gdy wykorzystywane w procesach wspomagania podejmowania optymalnych decyzji nieliniowe modele programowania matematycznego poddają się procesowi linearyzacji, czyli mogą być przekształcone w równoważne zadania lub ciągi zadań programowania liniowego, nic nie stoi na przeszkodzie, aby określać dla nich pojęcia rozwiązań uogólnionych, które następnie będą mogły być wyznaczane odpowiednio dostosowanym wariantem metody uogólnionych macierzy odwrotnych. W szczególności przedstawione wyżej rozważania można uogólniać na zadania programowania matematycznego z liniowym układem warunków ograniczających w postaci kanonicznej, formułowane następująco:

$$min\{\ f(X);\ AX=b,\ X\geq\Theta\ \}$$

Istotnym z teoretycznego i praktycznego punktu widzenia rodzajem tego typu zadań optymalizacji nieliniowej są tzw. zadania programowania wypukłego z liniowym układem warunków ograniczających. Przyjmuje się w tym wypadku dodatkowe założenia wypukłości i różniczkowalności funkcji kryterium w sformułowaniu powyższego zadania optymalizacji nieliniowej.

Literatura

1. Gass S.I.: *Programowanie liniowe.* PWN, Warszawa 1980.
2. Mika J.: *O pewnej wersji metody macierzy pseudoodwrotnych w programowaniu liniowym.* „Przegląd Statystyczny" 1982, nr 1.
3. Mika J.: *Ob odnom metodie wyczislenia obobszczennych reszeni zadacz liniejnogo programirowania i jego primienieniach w planirowani Kurzfassungen der Beitrage.* Halle-Wittenberg, Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie VII, 1982.
4. Mika J.: *On Determining Optimal Generalized Solution of Different Types of Linear and Nonlinear Programming Problems by Means of Pseudoinverse Matrix Method.* Kurzfassungen der Beitrage, Magdeburg, Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie VIII, 1985.
5. Mika J.: *O wynikach eksperymentów obliczeniowych z zastosowaniem algorytmu metody macierzy pseudoodwrotnych w programowaniu liniowym.* Zeszyty Naukowe AE, nr 413, Wrocław 1989.
6. Mika J.: *Uogólnione rozwiązania i korekcje sprzecznych modeli optymalizacyjnych we wspomaganiu procesów podejmowania decyzji ekonomicznych.* AE, Katowice 1990.
7. Mika J.: *Optymalne uogólnione rozwiązania zadań programowania matematycznego z liniowym układem warunków ograniczających w procesach wspomagania podejmowania decyzji.* Prace Naukowe Politechniki Śląskiej w Gliwicach, Organizacja i Zarządzanie, z. 2, Gliwice 2000.
8. Mika J.: *Rozwiązania uogólnione w procesach decyzyjnych.* AE, Katowice 2004.

9. Nykowski I.: *Programowanie liniowe.* PWE, Warszawa 1980.
10. Radzikowski W.: *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem.* Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń 1997.

ON ELEMENTARY PROCEDURES IN THE METHOD OF GENERALIZED INVERSE MATRICES OF FINDING GENERALIZED SOLUTIONS OF THE LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS

Summary

In the following article the elements of current ideas in the theory of the generalized solutions of linear optimization problems in the context of their potential use to support the decision processes and of the further development of the theoretical ideas in the objective range have been discussed. The special attention has been paid to the elementary procedures which can be practical in the examined range.