Alicja Wolny

METODY PROGNOZOWANIA WARTOŚCI WYPŁACANYCH ODSZKODOWAŃ W ZAKŁADACH UBEZPIECZEŃ

Wstęp

W procesie zarządzania zakładem ubezpieczeniowym niezwykle istotnym zagadnieniem jest zarządzanie ryzykiem aktuarialnym, a więc np. ryzykiem kalkulacji składki czy ryzykiem tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych. Skuteczność zarządzania tego typu rodzajami ryzyka ma duży wpływ na kondycję finansową zakładu. Opracowanie podejmuje tematykę związaną z prognozowaniem wartości szkód, które jest przeprowadzane na podstawie szeregu czasowego zapisanego w formie trójkąta szkód, z wykorzystaniem analizy rozwoju szkodowości w kolejnych okresach opóźnień. Ustalenie przyszłej wartości wypłacanych odszkodowań ma istotne znaczenie dla gospodarki finansowej zakładu ubezpieczeń, gdyż pozwala na szacowanie poziomu rezerwy szkodowej. W opracowaniu zostaną przedstawione modele służące do szacowania tych wielkości, a także przykład numeryczny oparty na umownych danych zawartych w trójkącie szkód.

1. Metody szacowania wartości wypłacanych odszkodowań z wykorzystaniem trójkąta szkód

Oszacowanie wartości wypłacanych odszkodowań dla przyjętego przedziału czasu jest przeprowadzane na podstawie danych zapisanych w postaci macierzy zwanej trójkątem szkód [por. 22]. Elementami trójkąta są wartości wypłaconych odszkodowań dla szkód, które już zaszły. Trójkąt ten jest swoistym zapisem szeregu czasowego, w którym występują dwa okresy czasowe: okres zajścia szkody (lub zgłoszenia szkody ubezpieczycielowi) oraz okres opóźnienia wypłaty odszkodowania. Trójkąt ten może być budowany na podstawie danych okresowych występujących w ujęciu rocznym, kwartalnym lub miesięcznym, zależnie od częstości kalkulacji rezerwy szkodowej. Biorąc pod uwagę polskie ustawodawstwo, rezerwa szkodowa jest liczona co miesiąc [10, s. 71]. Pozwala to na pełną kontrolę procesu wypłat odszkodowań.

Dla każdego trójkąta szkód wyróżniamy następujące wielkości: i – okres wystąpienia szkody zwany dalej okresem wypadkowym, $i = 0,\dots,n-1$, j – opóźnienie w wypłacie odszkodowania, $j = 0,\dots,n-1$, $n-1$ – okres bieżący, $S_{i,j}$ – wartość odszkodowań dla szkód, które zaszły w okresie i, wypłaconych z opóźnieniem j. W opracowaniu rozważamy trójkąt szkód w postaci nieskumulowanej ($[S_{i,j}]_{n \times n}$), w którym wyróżniona jest szczególna linia zwana przekątną, definiowana jako zbiór elementów $\{S_{0,n-1},\dots,S_{n-1,0}\}$.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że elementy skumulowanego trójkąta szkód $S_{i,j}$, $i,j = 0,\dots,n-1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa. Dane zawarte w konkretnym trójkącie szkód są traktowane jako realizacje tych zmiennych, czyli stanowią próbę statystyczną. Analogiczne założenie przyjmujemy dla nieskumulowanego trójkąta szkód. Podejście do elementów trójkąta szkód jak do zmiennych losowych pozwala na estymację ich wartości oczekiwanych oraz odpowiednich błędów szacunków.

W literaturze przedmiotu często spotyka się założenie, iż niezależne zmienne $S_{i,j}$ reprezentujące okresowe wartości wypłaconych odszkodowań mają rozkład logarytmiczno-normalny [11; 25; 21]. W takim przypadku zastosowanie znajduje następujący model [5, s. 5-6], również oparty na analizie szkodowości:

$$S_{i,j} = C_i P_j \tag{1}$$

gdzie P_j oznacza wartość wypłaconych odszkodowań z opóźnieniem j wyrażoną w procentach, $j = 0,\dots,n-1$. Zatem w modelu występuje $2n$ nieznanych parametrów, C_i, $i = 0,\dots,n-1$ oraz P_j, $j = 0,\dots,n-1$. W celu oszacowania parametrów modelu przekształcamy równanie (1), logarytmując je obustronnie:

$$\ln S_{i,j} = \ln C_i + \ln P_j$$

W dalszych rozważaniach przyjmijmy oznaczenia: $\ln S_{i,j} = s_{i,j}$, $\ln C_i = c_i$, $\ln P_j = p_j$, gdzie zmienna $s_{i,j}$ ma rozkład normalny. Po wprowadzeniu składnika losowego $\xi_{i,j}$ powyższa zależność przyjmuje postać liniowego modelu ekonometrycznego [8, s. 283]:

$$s_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i + \sum_{j=n}^{2n-1} p_j X_j + \xi_{i,j} \tag{2}$$

gdzie $\xi_{i,j}$ jest składnikiem losowym. Zmienne objaśniające X_i występujące w powyższym modelu są zmiennymi zero-jedynkowymi, które definiuje się w zależności od numeru indeksu:

- $X_i = 1$ dla wszystkich obserwacji w okresie wypadkowym i,
- $X_i = 0$ dla wszystkich obserwacji w okresie wypadkowym różnym od okresu i, gdzie $i = 0,...,n-1$,
- $X_j = 1$ dla wszystkich obserwacji w okresie opóźnienia j,
- $X_j = 0$ dla wszystkich obserwacji w okresie opóźnienia j, gdzie $j = n,...,2n-1$.

W estymacji tak skonstruowanego modelu zastosowanie znajduje KMNK. Aby oszacować parametry tego modelu, należy w pierwszej kolejności skonstruować macierz obserwacji $\mathbf{X}$. Macierz ta składa się jedynie z zer oraz jedynek. Jedynki odpowiadają obserwacjom dla okresów wypadkowych oraz opóźnień spełniających warunek $j \le n-i-1$. W macierzy występuje liczba kolumn odpowiadająca liczbie parametrów w modelu, a zatem w naszym przypadku jest to $2n$. Natomiast liczba wierszy macierzy jest równa liczbie wszystkich możliwych par (i,j), dla których $j \le n-i-1$. W dalszych rozważaniach będą stosowane wektory składające się z odpowiednich wierszy macierzy $\mathbf{X}$. Przez $\mathbf{X}_{i.j}$ będziemy oznaczać ten wektor, któremu odpowiada para (i,j). Zapisujemy zatem zależność (2) w następującej postaci:

$$s_{i,j} = \mathbf{X}_{i.j} \cdot \mathbf{cp} + \xi$$

gdzie **cp** jest wektorem w postaci:

$$\mathrm{cp} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ p_n \\ \vdots \\ p_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Stosując wzór na wektor ocen parametrów strukturalnych w KMNK, otrzymujemy oszacowania parametrów c_i oraz p_j, które wyrażają się wzorami [25, s. 404]:

$$\hat{c}_i = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T s_{i,j}$$

$$\hat{p}_j = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T s_{i,j}, \quad i,j = 0,\dots,n-1$$

Macierz wariancji i kowariancji jest natomiast dana wzorem:

$$\mathbf{D}^2(\mathbf{c}\hat{\mathbf{p}}) = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$$

gdzie nieobciążonym estymatorem wariancji składnika losowego $\boldsymbol{\sigma}^2$ jest wariancja resztowa. Korzystając z macierzy wariancji i kowariancji, obliczamy średni błąd szacunku dla parametrów modelu:

$$\sqrt{D^2(\hat{c}_i)} \text{ oraz } \sqrt{D^2(\hat{p}_j)}, \ i,j = 0,\dots,n-1$$

1.1. Prognozowanie wypłacanej wartości odszkodowań

W niniejszym podrozdziale przejdziemy do predykcji wartości rezerwy szkodowej na podstawie modelu uzyskanego w analizie szkodowości. W modelu prognozujemy okresowe wypłaty odszkodowań dla wszystkich okresów i,j, spełniających warunek $j > n-i-1$.

W pierwszym etapie prognozujemy logarytmiczne wartości okresowych wypłat odszkodowań $s_{i,j}$ dla okresów i,j, spełniających warunek $j > n-i-1$. W tym celu konstruujemy macierz $\mathbf{X}^*$ dla okresów $j > n-i-1$, podobnie jak w przypadku macierzy $\mathbf{X}$ [23, s. 140]. Następnie, stosując zasadę predykcji nieobciążonej, przeprowadzamy prognozowanie na podstawie równości:

$$\hat{s}_{i,j} = \mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j}} \cdot \mathbf{c}\hat{\mathbf{p}}$$

Błąd średni tej predykcji wyraża się wzorem:

$$B^s_{i,j} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j}})^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j}}}$$

gdzie nieobciążonym estymatorem wariancji składnika losowego $\boldsymbol{\sigma}^2$ jest wariancja resztowa.

Na podstawie predykcji $s_{i,j}$ prognozujemy wartości okresowych wypłat odszkodowań $S_{i,j}$. Wykorzystujemy to, iż zmienne te mają rozkład logarytmiczno-normalny o parametrach [9, s. 60]:

- wartość oczekiwana $E(S_{i,j}) = \exp(s_{i,j} + 0{,}5B^{s}_{i,j})$,
- wariancja $D^2(S_{i,j}) = \exp[2s_{i,j} + (B^{s}_{i,j})^2] \cdot [\exp(B^{s}_{i,j})^2 - 1]$.

Stawiamy zatem prognozę na poziomie wartości oczekiwanej i otrzymujemy postać predykcji:

$$\hat{S}_{i,j} = \exp(\hat{s}_{i,j} + \hat{B}^{s}_{i,j})$$

Jednakże powyższy estymator jest estymatorem obciążonym. Aby zlikwidować obciążenie, wprowadzamy funkcję $g_m(x)$ daną wzorem [6]:

$$g_m(x) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{m^z (m+2z)x^z}{\prod_{l=0}^{z} (m+2l) z!}$$

gdzie m jest liczbą stopni swobody rozkładu wariancji składnika losowego σ^2. Funkcja ta koryguje obciążenie estymatora danego ogólnym wzorem [4, s. 198--211]:

$$\hat{e} = s_{i,j} + d\sigma^2 \tag{3}$$

gdzie d jest dowolną stałą, następująco:

$$\hat{e} = \exp(\hat{s}_{i,j}) g_m[(a - 0{,}5(\mathbf{X}^{*}_{\mathbf{i,j}})^{\mathrm{T}} (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^{*}_{\mathbf{i,j}})\hat{\sigma}^2]$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy w dalszych rozważaniach oznaczenie $x^{*}_{i,j} = (\mathbf{X}^{*}_{\mathbf{i,j}})^{\mathrm{T}} (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^{*}_{\mathbf{i,j}}$. Skorygowana predykcja okresowych wypłat odszkodowań ma wtedy postać:

$$\hat{S}_{ij} = \exp(\hat{s}_{i,j}) g_m[0{,}5(1 - x^{*}_{i,j})\hat{\sigma}^2]$$

Średni błąd tej predykcji można przedstawić następująco:

$$D^2(S_{i,j} - \hat{S}_{i,j}) = D^2(S_{i,j}) + D^2(\hat{S}_{i,j})$$

co wynika z niezależności zmiennych $S_{i,j}$ oraz $\hat{S}_{i,j}$ [25, s. 408]. Widzimy zatem, iż do szacowania tego błędu niezbędne jest oszacowanie zmiennych $D^2(\hat{S}_{i,j})$ oraz $D^2(S_{i,j})$. W pierwszym przypadku stosujemy estymator nieobciążony dany wzorem:

$$\hat{D}^2(\hat{S}_{i,j}) = \exp(2\hat{s}_{i,j}) \{ g_m[0{,}5(1 - x^{*}_{i,j})\hat{\sigma}^2]^2 - g_m[(1 - 2x^{*}_{i,j})\hat{\sigma}^2] \}$$

Natomiast do oszacowania drugiej zmiennej stosujemy wzór na wariancję rozkładu logarytmiczno-normalnego skorygowany funkcją g_m [25, s. 408]:

$$\hat{D}^2(S_{i,j}) = \exp(2\hat{s}_{i,j}) \{ g_m[2(1 - x^{*}_{i,j})\hat{\sigma}^2]^2 - g_m[(1 - 2x^{*}_{i,j})\hat{\sigma}^2] \}$$

2. Przykład numeryczny

W poniższym przykładzie przedstawimy praktyczne zastosowanie metod prognozowania całkowitej wartości wypłacanych odszkodowań do kalkulacji przedziału zmienności rezerwy szkodowej. Obliczeń niezbędnych do estymacji odpowiednich parametrów dokonamy opierając się na danych zawartych w wygenerowanym losowo trójkącie szkód:

Tabela 1

Wygenerowany losowo trójkąt szkód

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1 592	3 848	5 790	6 906	7 321	7 465	7 507	7 519	7 522
1	2 664	4 191	5 741	6 423	6 642	6 699	6 710	6 716	
2	1 212	3 551	5 214	6 294	6 715	6 891	6 942		
3	3 833	5 834	7 952	8 521	8 783	8 941			
4	1 687	4 190	5 560	6 419	6 755				
5	1 086	4 228	5 535	6 370					
6	2 631	4 959	6 491						
7	1 655	10 046							
8	8 246								

Proces prognozowania wartości rezerwy szkodowej rozpoczynamy od oszacowania parametrów c_i, $i = 0,\dots,7$, oraz P_j, $j = 0,\dots,7$, występujących w zakładanym modelu. W tym celu wykorzystujemy logarytmiczną postać modelu (2). Widzimy, że niezbędne jest przeprowadzenie logarytmowania elementów trójkąta szkód, aby uzyskać obserwacje $s_{i,j}$.

Tabela 2

Trójkąt szkód z wartościami logarytmicznymi

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	7,373	7,721	7,571	7,017	6,029	4,966	3,750	2,454	1,118
1	7,887	7,331	7,346	6,525	5,385	4,054	2,410	1,726	
2	7,100	7,757	7,417	6,985	6,041	5,171	3,937		
3	8,252	7,601	7,659	6,343	5,568	5,065			
4	7,431	7,825	7,223	6,755	5,820				
5	6,990	8,053	7,175	6,728					
6	7,875	7,753	7,334						
7	7,411	9,035							
8	9,017								

Na podstawie powyższych danych przeprowadzamy estymację parametrów c_i oraz p_j za pomocą KMNK. Często stosowaną praktyką jest pomijanie parametru p_0, co daje pewność, iż macierz **X** jest macierzą nieosobliwą, dlatego też w dalszych obliczeniach parametr ten nie występuje [25, s. 399]. Obliczamy również średnie błędy szacunku uzyskanych wartości estymatorów: $\sqrt{D^2(c_i)}$, $\sqrt{D^2(p_j)}$. Jednak na wstępie niezbędna jest konstrukcja macierzy **X** oraz wektora **cp**.

Tabela 3

Szacunki parametrów modelu

	Oszacowanie	Średni błąd szacunku
c0	7,63	0,20
c1	7,11	0,20
c2	7,62	0,20
c3	7,55	0,21
c4	7,44	0,22
c5	7,35	0,23
c6	7,56	0,25
c7	8,05	0,29
c8	9,02	0,39
p1	0,34	0,20
p2	-0,08	0,21
p3	-0,73	0,22
p4	-1,70	0,23
p5	-2,66	0,25
p6	-4,09	0,28
p7	-5,28	0,33
p8	-6,51	0,44

Otrzymane wyniki pokazują, iż średnie błędy szacunku dla większości powyższych parametrów zawierają się w przedziale od 0,2 do 0,29. Wyjątkiem są parametry c_8, p_7 oraz p_8, dla których błędy są wyższe. Jest to efektem małej liczby obserwacji dla okresów opóźnień 7 oraz 8.

Dodatkowo szacujemy wariancję składnika losowego przez obliczenie wariancji resztowej, która kształtuje się na poziomie $\hat{\sigma}^2 = 0{,}1529$.

Opierając się na wynikach otrzymanych wartości estymatorów $\hat{c}_i$ oraz $\hat{p}_j$, przechodzimy do prognozowania logarytmicznych wartości okresowych wypłat odszkodowań $s_{i,j}$. W tym celu niezbędne jest skonstruowanie macierzy $\mathbf{X}^*$. Uzyskane poziomy prognoz oraz średnie błędy prognoz przedstawiamy w tab. 4.

Tabela 4

Wyniki procesu prognozowania logarytmicznych wartości okresowych wypłat odszkodowań

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	7,373	7,721	7,571	7,017	6,029	4,966	3,750	2,454	1,118	
1	7,887	7,331	7,346	6,525	5,385	4,054	2,410	1,726	0,594	$\hat{s}_{i,j}$
									0,437	$\hat{B}^s_{i,j}$
2	7,100	7,757	7,417	6,985	6,041	5,171	3,937	2,336	1,103	$\hat{s}_{i,j}$
								0,3306	0,4420	$\hat{B}^s_{i,j}$
3	8,252	7,601	7,659	6,343	5,568	5,065	3,466	2,272	1,038	$\hat{s}_{i,j}$
							0,2915	0.3378	0.4474	$\hat{B}^s_{i,j}$
4	7,431	7,825	7,223	6,755	5,820	4,782	3,358	2,164	0,930	$\hat{s}_{i,j}$
						0,2766	0.3023	0,3471	0,4545	$\hat{B}^s_{i,j}$
5	6,990	8,053	7,175	6,728	5,652	4,690	3,266	2,072	0,839	$\hat{s}_{i,j}$
					0.2766	0.2927	0,3171	0.3601	0.4645	$\hat{B}^s_{i,j}$
6	7,875	7,753	7,334	6,838	5,864	4,902	3,478	2,284	1,051	$\hat{s}_{i,j}$
				0,2915	0,3023	0,3171	0.3397	0.3802	0,4802	$\hat{B}^s_{i,j}$
7	7,411	9,035	7,971	7,322	6,347	5,385	3,962	2,767	1,534	$\hat{s}_{i,j}$
			0,3306	0.3378	0.3471	0,3601	0,3802	0,4168	0.5096	$\hat{B}^s_{i,j}$
8	9,017	9,364	8,943	8,294	7,319	6,357	4,934	3,739	2,506	$\hat{s}_{i,j}$
		0,4373	0,4420	0,4474	0,4545	0,4645	0.4802	0.5096	0,5880	$\hat{B}^s_{i,j}$

Na podstawie wartości predykcji $\hat{s}_{i,j}$ prognozujemy wartości okresowych wypłat odszkodowań $S_{i,j}$ oraz szacujemy ich średnie błędy prognozy. Stosujemy nieobciążone estymatory w postaci:

- $\hat{S}_{ij} = \exp(\hat{s}_{i,j}) g_m [0,5(1 - x^*_{i,j})\hat{\sigma}^2]$,
- $\hat{D}^2(\hat{S}_{i,j}) = \exp(2\hat{s}_{i,j}) \{ g_m [0,5(1 - x^*_{i,j})\hat{\sigma}^2]^2 - g_m [(1 - 2x^*_{i,j})\hat{\sigma}^2] \}$.

W powyższych estymatorach wykorzystujemy funkcję g_m, gdzie m jest liczbą stopni swobody, która koryguje obciążenie. W naszym przykładzie $m = 28$, gdyż liczba parametrów w modelu wynosi 17, natomiast obserwacji 45. Aby wyznaczyć odpowiednie argumenty dla funkcji g_{28}, potrzebne jest obliczenie macierzy x^* zdefiniowanej jako $x^* = \mathbf{X}_*(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_*^T$, a następnie kalkulacja wartości funkcji g_{28} dla par (i, j), gdzie $i, j = 1,...,8$.

Po przeprowadzeniu wszystkich powyższych obliczeń otrzymujemy następujące prognozy okresowych wartości wypłat odszkodowań, które prezentujemy w tab. 5.

Tabela 5

Prognozy okresowych wartości wypłat odszkodowań

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1 592	2 256	1 942	1 116	415	143	43	12	3	
1	2 664	1 527	1 551	682	218	58	11	6	1,81	$\hat{S}_{i,j}$
									0,55	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
2	1 212	2 339	1 664	1 080	420	176	51	10,35	3,01	$\hat{S}_{i,j}$
								5,45	1,87	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
3	3 833	2 000	2 119	569	262	158	32	9,70	2,83	$\hat{S}_{i,j}$
							20,38	4,93	0,81	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
4	1 687	2 503	1 370	859	337	120	29	8,71	2,54	$\hat{S}_{i,j}$
						81,83	17,35	4,23	0,69	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
5	1 086	3 142	1 306	835	286	109	26	7,94	2,31	$\hat{S}_{i,j}$
					195	68,88	14,73	3,62	0,59	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
6	2 631	2 328	1 532	936	353	135	32	9,81	2,86	$\hat{S}_{i,j}$
				594	213	75,60	16,33	4,06	0,65	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
7	1 655	8 391	2 888	1 514	571	218	53	15,92	4,64	$\hat{S}_{i,j}$
			1 524	769	277	99,60	21,73	5,44	0,79	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$

cd. tabeli 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
8	8 246	11 661	7 653	4 000	1 509	577	139	42,11	12,28	$\hat{S}_{i,j}$
		3 541	2 259	1 142	412	147,00	31,47	7,19	1,45	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$

Znając prognozy okresowych wartości wypłaconych odszkodowań, przeprowadzamy predykcję poziomu łącznej rezerwy szkodowej, stosując wzór $\hat{R} = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\hat{S}_{i,j}$. Prognozowana wartość tej rezerwy wynosi $\hat{R} = 32\,989{,}21$.

W ostatnim kroku obliczamy średni błąd predykcji, który wynosi $\hat{B}' =$ $= 11\,698{,}21$, oraz przedział zmienności PZ. W tym celu obliczamy wartości dla a i b, które wynoszą $a = 1{,}46$ oraz $b = 0{,}61$. Uzyskany przedział zmienności, na poziomie ufności 90%, ma postać:

$$PZ = [20\,014{,}1\ ;\ 48\,301{,}85]$$

Widzimy, iż w przypadku tej metody uzyskaliśmy znacznie wyższy średni błąd predykcji wartości rezerwy niż dla metody opartej na czynniku rozwoju szkody.

Stosowanie modelu (1) do predykcji poziomu rezerwy szkodowej jest zadaniem pracochłonnym ze względu na skomplikowaną obliczeniową postać argumentów funkcji g_m. W praktyce problem ten można rozwiązać dwojako:

1) zaakceptować obciążenie estymatorów $\hat{S}_{i,j}$ oraz $\hat{D}^2(\hat{S}_{i,j})$ i pominąć funkcję g_m,
2) zaimplementować proces obliczania wartości funkcji g_m komputerowo.

W pierwszym przypadku prognozujemy wartości okresowych wypłat odszkodowań oraz szacujemy średnie błędy szacunku tych prognoz, korzystając bezpośrednio z definicji parametrów rozkładu logarytmiczno-normalnego:

$$E(S_{i,j}) = \exp(s_{i,j} + 0{,}5B_{i,j}^{s})$$

oraz

$$D^2(S_{i,j}) = \exp[2s_{i,j} + (B_{i,j}^{s})^2]\cdot[\exp(B_{i,j}^{s})^2 - 1]$$

W naszym przykładzie zastosowanie tych wzorów daje prognozę rezerwy $\hat{R}$ na poziomie 36 003,31.

Podsumowanie

W obecnych warunkach wzmożonej rywalizacji zakłady ubezpieczeń są zmuszone do zwiększania efektywności zarządzania finansami firmy. Istotnym elementem zarządzania jest trafne ustalanie poziomu rezerwy szkodowej, a przez to trafne prognozowanie wartości wypłacanych odszkodowań. Dlatego też wydaje się uzasadnione, aby zakłady stosowały szczegółową analizę statystyczną danych dotyczących wypłacanych odszkodowań i przeprowadzały predykcję umożliwiającą kalkulację błędów prognoz oraz przedziałów ufności. Jednak jest do możliwe jedynie w przypadku posiadania danych zapisanych w formie trójkąta szkód. Większość polskich zakładów rozpoczęła w ostatnim czasie budowę trójkątów szkód, jednak często niemożliwe jest odtworzenie danych historycznych ze względu na brak zintegrowanego systemu informatycznego pozwalającego chociażby na powiązanie konkretnej polisy z wypłaconym następnie odszkodowaniem w przypadku wystąpienia szkody. Stąd możliwość pracy jedynie na danych zagregowanych.

Literatura

1. Ashish S., Muni S.: *Regression Analysis*. Springer-Verlag, New York 1997.
2. Bradu D., Mundlak Y.: *Estimation in Lognormal Linear Models*. JASA 1970, Vol. 6.
3. *Biuletyn Państwowego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń za rok 1999*. Biuro Nadzoru i Statystyki, Warszawa 2000.
4. Bradu D., Mundlak Y.: *Estimation in Lognormal Linear Models*. JASA 1970, Vol. 6.
5. *Claims Reserving Manual. Vol. II*. The Institute of Actuaries, London 1989.
6. Finney D.J.: *On the Distribution of a Variate whode Logharitm is Normally Distributed*. JRSS 1941, Suppl. 7. 1941.
7. Gawlas C., Mikulski R.: *Ustawa o działalności ubezpieczeniowej – Komentarz*. Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2001.
8. Goldberger A.S.: *Teoria ekonometrii*. PWE, Warszawa 1975.
9. Green W.H.: *Econometric Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York 1993.
10. Jończyk B., Ogrodnik H.: *Finanse zakładów ubezpieczeń*. Wyższa Szkoła Bankowości i Finansów, Katowice 1999.
11. Kelly M.V.: *Practical Loss Reserving Method with Stochastic Development Factor*. CAS Discussion Paper Program, 1992.

12. Mack T.: *Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain--Ladder Reserve Estimate.* „Astin Bulletin" 1993, Vol. 29, No 2.
13. Mack T.: *Measuring the Variability of Chain-Ladder Reserve Estimates.* Casualty Actuarial Society Forum, Spring 1994.
14. Mack T.: *Which Stochastic Model is Underlying the Chain-Ladder Method?* CAS Forum, 1995.
15. Mack T.: *The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor.* „Astin Bulletin" 1999, Vol. 29, No 2.
16. Mack T.: *Credible Claims Reserve: The Benktander Method.* „Astin Bulletin" 2000, Vol. 30, No 2.
17. Murphy D.M.: *Unbiasedloss Development Factors.* PCAS LXXXI, 1994.
18. Pawłowski Z.: *Prognozy ekonometryczne.* PWN, Warszawa 1973.
19. Pawłowski Z.: *Statystyka matematyczna.* PWE, Warszawa 1981.
20. Pawłowski Z.: *Elementy ekonometrii.* PWN, Warszawa 1981.
21. Pentikainen T., Rantala J.: *Simulation Procedure for Comparing Different Claims Reserving Methods.* „ASTIN Bulletin International Actuarial Association" Brussels, Belgium 1995.
22. Straub E.: *Non-Life Insurance Mathematics.* Springer-Verlag, New York 1988.
23. Theil H.: *Zasady ekonometrii.* PWN, Warszawa 1979.
24. Venter G.G.: *Testing the Assumptions of Age-to-Age Factors.* CAS Reserving Call Papers, Vol. 1, Fall 1998.
25. Verrall R.J.: *Statistical Methods for the Chain-Ladder Technique.* Casualty Actuarial Society Forum, Spring 1994.

FORECASTING FUTURE LIABILITIES METHODS IN AN INSURANCE COMPANY

Summary

In a paper the method of forecasting future liabilites in insurance company is presented. The method is based on historical data which is taken from a loss triangel. In the first part of this paper the formal model is presented: the estimation and the standard error. After that the numerical example is showed including all the calculations step by step. The by shorts remarks appear at the end of this paper.