Henryk Zawadzki

# O WIELOMIANACH LOSOWYCH I WEWNĘTRZNEJ STOPIE ZWROTU INWESTYCJI

## Wstęp

Wewnętrzna stopa zwrotu inwestycji (*Internal Rate of Return – IRR*) oraz jej modyfikacje (*MIRR, ERR*) są wykorzystywane w finansowych (dynamicznych) metodach oceny projektów inwestycyjnych [12].

Wyznaczanie *IRR* sprowadza się do rozwiązania ze względu na $r$ równania:

$$NPV(r) = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = 0 \tag{1}$$

lub równoważnego mu równania algebraicznego stopnia $n$, otrzymanego z (1) przez pomnożenie stronami przez $(1 + r)^n$, czyli równania:

$$W_n(r) = CF_0(1 + r)^n + CF_1(1 + r)^{n-1} + \ldots + CF_{n-1}(1 + r) + CF_n = 0 \tag{2}$$

W powyższych równaniach $CF_t$ ($t = 0, 1, 2, \ldots, n$) oznaczają przepływy pieniężne w momencie $t$, a $n$ jest zakładanym okresem eksploatacji inwestycji (czasem życia ekonomicznego projektu). W szczególności $CF_0$ jest kosztem poniesionym na początku inwestycji. Zgodnie z konwencją przyjętą w finansach, przychody mają znak dodatni, a wydatki znak ujemny.

W przypadku gdy strumień przepływów pieniężnych jest deterministyczny, dokładne lub przybliżone wartości wszystkich $n$ pierwiastków równania (2) (zarówno rzeczywistych, jak i zespolonych) można wyznaczyć np. za pomocą programów komputerowych zwanych systemami algebry komputerowej (*Computer Algebra Systems*), m.in. takich jak: *Derive*, *Maple*, *Mathcad*, *Matlab* czy *Mathematica* [17].

Innym, bardziej złożonym problemem jest obliczanie *IRR*, gdy przepływy pieniężne $CF_t$ nie są deterministyczne, lecz są zmiennymi losowymi, zależnymi lub niezależnymi. Wielomian $W_n$ jest wtedy losowym wielomianem algebraicznym, a równanie (2) – losowym równaniem algebraicznym. W przypadku tym zarówno liczba pierwiastków rzeczywistych tego równania, jak i same pierwiastki są zmiennymi losowymi o rozkładach prawdopodobieństwa zależnych od rozkładów $CF_t$.

W opracowaniu przedstawimy niektóre fakty dotyczące algebraicznych wielomianów losowych oraz podamy prosty przykład wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa wewnętrznej stopy zwrotu w przypadku, gdy przepływy pieniężne są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym.

## 1. O wielomianach losowych

Wielomiany losowe, a w szczególności algebraiczne wielomiany losowe od dawna są obiektem badań matematyków[1]. Jednym z pierwszych problemów, którym się zajmowano, był problem wyznaczania wartości oczekiwanej $E_n$ liczby rzeczywistych pierwiastków losowego równania algebraicznego n-tego stopnia. W latach 30., 40. i 50. XX w. Bloch i Pólya [2], Littlewood i Offord [13], Kac [14] oraz Erdös i Turan [7] badali asymptotyczne własności $E_n$, gdy współczynniki tych wielomianów są niezależnymi, rzeczywistymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie (m.in.: dwupunktowym, jednostajnym i normalnym o wartości oczekiwanej równej zero). Kac [14] otrzymał wzór na $E_n$ w przypadku, gdy współczynniki wielomianu są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Wzór ten, znany jako „wzór Kaca", ma postać:

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\,dt \qquad (3)$$

Kac dowiódł również, że dla $n \to \infty$:

$$E_n \sim (2/\pi)\ln n \qquad (4)$$

Dowód wzoru (3) oraz mocniejszą wersję wzoru (4) można również znaleźć w pracy [6].

Wyniki otrzymane przez wymienionych wyżej autorów zostały uogólnione na przypadek, gdy współczynniki wielomianów są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie należącym do obszaru przyciągania rozkładu normalnego i rozkładu α-stabilnego [10; 15] oraz na przypadek, gdy współczynniki te są zmiennymi losowymi o wartościach zespolonych [11; 16]. W [16] uogólniono m.in. podany wyżej wzór Kaca i podano formułę na wartość oczekiwaną

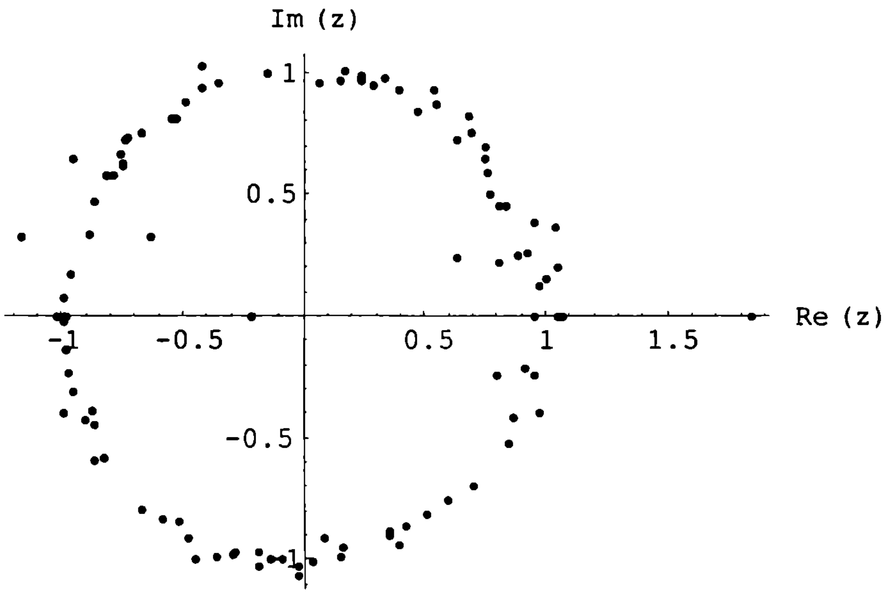
[1] Wielomiany losowe pojawiły się w latach 60. XIX w. pracach J.J. Sylvestra (zob. [4]).

E[ $\nu_n(\Omega)$] liczby pierwiastków (rzeczywistych lub zespolonych) losowego wielomianu algebraicznego $n$-tego stopnia znajdujących się w borelowskim podzbiorze $\Omega$ płaszczyzny zespolonej. Warto podkreślić, że chociaż współczynniki wielomianów są zmiennymi losowymi, pierwiastki wielomianów wysokich stopni nie są rozmieszczone na płaszczyźnie zespolonej w sposób bezładny, lecz koncentrują się w pierścieniu wokół okręgu jednostkowego $|z| = 1$ (rys. 1). Szerokość tego pierścienia zmierza do zera, gdy $n \to \infty$. Ponadto, przy $n \to \infty$ argumenty pierwiastków wielomianów mają rozkład jednostajny, w tym sensie, że z prawdopodobieństwem równym jeden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\theta,\varphi)}{n} = \frac{\varphi-\theta}{2\pi}$$

gdzie $\nu_n(\theta, \varphi)$ oznacza liczbę tych pierwiastków wielomianu stopnia $n$, które spełniają warunek $\theta \leq \arg z \leq \varphi$, gdzie $0 \leq \theta < \varphi \leq 2\pi$. Pierwiastki rzeczywiste skupiają się natomiast w pobliżu liczb $\pm 1$.

Odrębnym problemem jest wyznaczanie rozkładu prawdopodobieństwa pierwiastków losowych wielomianów algebraicznych. Prac na ten temat jest niewiele. Do najwcześniejszych należy [9], w której wyznaczono warunkowe gęstości rozkładów prawdopodobieństwa pierwiastków losowego równania kwadratowego, w którym parametry są ciągłymi losowymi (zależnymi lub niezależnymi). W [3], korzystając ze wzorów Viete'a, wyprowadzono wzór na gęstość zmiennej losowej $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ($z_i$ oznaczają pierwiastki wielomianu) przy założeniu, że części rzeczywiste i zespolone współczynników $a_k$ ($k = 0, \ldots, n$) wielomianu są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \sigma_k)$.




Rys. 1. Rozmieszczenie pierwiastków losowego wielomianu stopnia $n = 100$ z niezależnymi współczynnikami o standardowym rozkładzie normalnym

Innym teoretycznym zagadnieniom związanym z wielomianami losowymi (nie tylko algebraicznymi) są poświęcone m.in. monografie [1] i [8].

## 2. Wewnętrzna stopa zwrotu w przypadku losowych przepływów pieniężnych

Rozważmy projekt, w którym nakłady inwestycyjne są deterministyczne i równe $CF_0 = -1$, natomiast przewidywane wpływy (przychody netto) $CF_1$ i $CF_2$ w kolejnych dwóch latach są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym. Niech $CF_1$ ma rozkład jednostajny w przedziale [0.8, 1.2], a $CF_2$ – rozkład jednostajny w przedziale [0.5, 1.5]. *IRR* jest (dodatnim) rozwiązaniem losowego równania kwadratowego:

$$r^2 + (2 - a)r + (1 - a - b) = 0$$

w którym dla uproszczenia zapisu przyjęto oznaczenia $CF_1 = a$ oraz $CF_2 = b$. Gdy wyróżnik tego równania będzie dodatni, czyli gdy zajdzie zdarzenie losowe

$$\Delta = a^2 + 4b > 0$$

równanie to będzie miało dwa pierwiastki rzeczywiste:

$$r_1 = \frac{a - 2 - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\ ,\quad r_2 = \frac{a - 2 + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Łatwo sprawdzić, że dla niezależnych zmiennych losowych $a$ i $b$ o podanych wyżej rozkładach:

$$P\{\frac{66}{25} \le a^2 + 4b \le \frac{186}{25}\} = 1, \qquad P\{r_1 < 0\} = 1$$

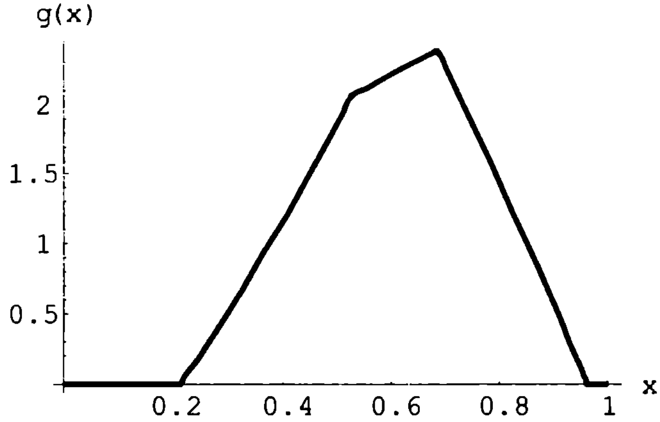
oraz:

$$P\{\frac{1}{10}(-6 + \sqrt{66}) \le r_2 \le \frac{1}{10}(-4 + \sqrt{186})\} = 1$$

Wzory na dystrybuantę i gęstość zmiennych losowych $r_1$ i $r_2$ wyprowadzono elementarnymi metodami w [18]. W szczególności funkcja gęstości g zmiennej losowej $r_2 = IRR$ wyraża się wzorem:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < \frac{1}{10}(-6 + \sqrt{66}) \\ \dfrac{300x^4 + 880x^3 + 804x^2 + 168x - 81}{80(x+1)^2} & \text{dla} \quad \frac{1}{10}(-6 + \sqrt{66}) \le x < \frac{1}{10}(-4 + \sqrt{86}) \\ 2x + 1 & \text{dla} \quad \frac{1}{10}(-4 + \sqrt{86}) \le x < \frac{1}{10}(-6 + \sqrt{166}) \\ -\dfrac{3(100x^4 + 240x^3 + 68x^2 - 184x - 187)}{80(x+1)^2} & \text{dla} \quad \frac{1}{10}(-6 + \sqrt{166}) \le x < \frac{1}{10}(-4 + \sqrt{186}) \\ 0 & \text{dla} \quad x \ge \frac{1}{10}(-4 + \sqrt{186}). \end{cases}$$

Wykres funkcji gęstości pokazano na rys. 2.




Rys. 2. Wykres funkcji gęstości zmiennej losowej *IRR*

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej *IRR* wynoszą odpowiednio[2]:

$$E(IRR) \approx 0.6115329595426245218 8$$

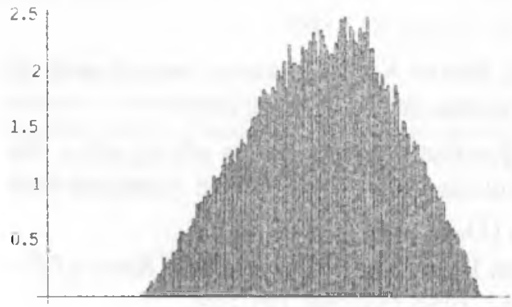
oraz:

$$D^2(IRR) \approx 0.0242006986170314587 74$$

Dla porównania, za pomocą programu „Mathematica" obliczono wspomniane wyżej parametry zmiennej losowej *IRR*, symulując m = 50 000 przepływów $CF_1$ i $CF_2$ o podanych wyżej rozkładach prawdopodobieństwa. Wartość oczekiwana i wariancja obliczone na podstawie otrzymanej próby były równe $E(IRR) \approx 0.611245$ i $D^2(IRR) \approx 0.0241686$.

Na rys. 3 pokazano otrzymany w wyniku przeprowadzonej symulacji histogram (por. rys. 2).

[2] Za pomocą programu „Mathematica" można obliczyć dokładne wartości E(*IRR*) oraz $D^2$(*IRR*). Są one jednak bezużyteczne, gdyż są liczbami niewymiernymi o bardzo skomplikowanej i mało czytelnej postaci.




Rys. 3. Histogram dla *IRR* otrzymany w wyniku symulacji przepływów $CF_1$ i $CF_2$ o rozkładach jednostajnych odpowiednio w przedziałach [0.8, 1.2] i [0.5, 1.5]

## Uwagi końcowe

Gdy przepływy pieniężne $CF_i$ (i = 1, ..., $n$) są ciągłymi zmiennymi losowymi o nieidentycznych rozkładach, wyprowadzenie metodami analitycznymi wzorów na gęstość *IRR* dla $n \geq 3$ jest zadaniem bardzo złożonym. Nawet w szczególnym przypadku, gdy mamy gwarancję, że równanie (1) ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni (tj. istnieje jedna wewnętrzna stopa zwrotu)[3], otrzymanie wspomnianych wzorów wymagałoby obliczania całek n-krotnych. Rozsądną alternatywą wydają się zatem metody symulacyjne, za pomocą których można wyznaczyć nie tylko parametry zmiennej losowej *IRR*, ale również jej histogram. Na jego podstawie można następnie próbować estymować funkcję gęstości, stosując jedną z metod opisanych np. w [5].

## Literatura

1. Bharucha-Reid A.T., Sambantham M.: *Random Polynomials*. Academic Press. Orlando, FL 1986.
2. Bloch A., Pólya G.: *On the Roots of Certain Algebraic Equations*. „Proc. London Mat. Soc." 1932, 33, pp. 102-114.
3. Bogomolny E., Bohigas O., Leboeuf P.: *Quantum Chaotic Dynamics and Random Polynomials*. „Journal of Statistical Physics" 1996, 85, pp. 639-679.

[3] Jest tak np. wtedy, gdy $n$ jest nieparzyste i w ciągu ($CF_i$) występuje tylko jedna zmiana znaku.

4. Dembo A., Poonen B., Shao Q., Zeitouni O.: *Random Polynomials Having Few or No Real Zeros.* „Journal of the American Mathematical Society" 2002, No 4, Vol. 15, pp. 857-892.
5. Domański Cz., Pruska K.: *Nieklasyczne metody statystyczne.* Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2000.
6. Edelman A., Kostlan E.: *How Many Zeros of a Random Polynomial Are Real?* „Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society" 1995, Vol. 32, (1), pp. 1-37.
7. Erdös P., Turan P.: *On the Distributions of Roots of Polynomials.* „Annals of Mathematics" 1950, (51), pp. 105-119.
8. Farahmand B.: *Topics in Random Polynomials.* Pitman Research Notes in Mathematics. Series 393. Addison Wesley Longman Ltd., Harlow 1998.
9. Hamblen J.W.: *Distribution of Roots of Quadratic Equations with Random Coefficients.* „Annals of Mathematical Statistics" 1956, (27), pp. 1136--1143.
10. Ibragimov I.A., Maslova N.B.: *The Mean Number of Real Zeros of Random Polynomials I. Coefficients with Zero Mean.* „Theor. Probability Appl." 1971, 16, pp. 228-248.
11. Ibragimov I.A., Zeitouni O.: *On Roots of Random Polynomials.* „Trans. of the American Mathematical Society" 1997, 349, pp. 2427-2441.
12. Jajuga K.: *Zarządzanie kapitałem.* AE, Wrocław 1993.
13. Littlewood J.E., Offord A.C.: *On the Number of Real Roots of a Random Algebraic Equation I.* „Journal of the London Math. Soc." 1938, 13, pp. 288-295.
14. Kac M.: *On the Average Number of Real Roots of a Random Algebraic Equation.* „Bulletin of the American Mathematical Society" 1943, (49), pp. 314-320.
15. Maslova N.B.: *On the Distribution of the Real Roots of a Random Algebraic Equation.* „Teoria Veroyatn. i Primenenia" 1974, 19, s. 488-500.
16. Shepp L.A., Vanderbei R.J.: *The Complex Zeros of Random Polynomials.* „Trans. of the American Mathematical Society" 1995, 347, pp. 4365-4384.
17. Zawadzki H.: *„Mathematica" w matematyce finansowej. Obliczanie wewnętrznej stopy zwrotu inwestycji.* Zeszyty Naukowe AE, nr 31, Katowice 2004, s. 121-133.
18. Zawadzki H.: *Matematyczne aspekty obliczania wewnętrznej stopy zwrotu.* Zeszyty Naukowe US, nr 389 (Finanse – Rynki finansowe – Ubezpieczenia. nr 2), Szczecin 2004, s. 257-266.

## ON RANDOM POLYNOMIALS AND INTERNAL RATE OF RETURN

### Summary

In this paper the author presents some basic facts about random algebraic polynomials and formulates the problem of calculation of probability distribution of Internal Rate of Return when cash flows are random variables. Considerations are illustrated with an example in which the distribution of IRR is calculated both theoretically and by simulation for the independent and uniformly distributed cash flows.