Katarzyna Zeug

REKONSTRUKCJA PRZESTRZENI STANÓW – ROZKŁAD WARTOŚCI OSOBLIWYCH

Wstęp

Jednym z narzędzi matematycznych potrzebnych do opisu szeregów czasowych jest metoda rekonstrukcji. Umożliwia ona rekonstrukcję przestrzeni stanów wielowymiarowych systemów dynamicznych na podstawie jednowymiarowego szeregu obserwacji. Otrzymana w ten sposób przestrzeń będzie w pewnym sensie równoważna z „oryginalną" przestrzenią.

Pod koniec XX w. pojawiły się prace, w których przedstawiono następujące metody rekonstrukcji:

- metodę pochodnych (N.H. Packard),
- metodę opóźnień (F. Takens),
- metodę rozkładu wartości osobliwych (Broomhead i King).

Celem opracowania jest przedstawienie jednej z metod rekonstrukcji przestrzeni stanów – rozkładu wartości osobliwych, i wykorzystanie jej w badaniach ekonomicznych szeregów czasowych.

Dane wykorzystane w opracowaniu pochodzą z GPW w Warszawie z okresu ostatnich pięciu lat. Obliczenia przeprowadzono za pomocą programów Statistica oraz pakietu Microsoft Excel.

1. Rozkład wartości osobliwych

Metodę rozkładu wartości osobliwych zaproponowali w 1986 r. Broomhead i King. Opiera się ona częściowo na metodzie opóźnień, która została przedstawiona w 1980 r. przez Takensa i uogólniona w 1991 r. przez Sauera.

Stosując metodę opóźnień, można skonstruować zbiór d zmiennych za pomocą jednowymiarowego szeregu czasowego $\mathbf{x} = (x(t), x(t-1), x(t-2), \ldots, x(1))$. Zmienne te otrzymuje się przesuwając „oryginalny" szereg czasowy o stałe opóźnienie $\tau = d\tau_s$; τ_s jest czasem próby, w wyniku czego rekonstrukcja przestrzeni stanów wygląda następująco:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{d}}(\mathbf{t})=(x(t),x(t-\tau),x(t-2\tau),\ldots,x(t-(d-1)\tau))$$
$$\mathbf{x}^{\mathbf{d}}(\mathbf{t}-\mathbf{1})=(x(t-1),x(t-1-\tau),x(t-1-2\tau),\ldots,x(t-1-(d-1)\tau))$$
....
$$\mathbf{x}^{\mathbf{d}}(i)=(x(i),x(i-\tau),x(i-2\tau),\ldots,x(i-(d-1)\tau))$$
....
$$\mathbf{x}^{\mathbf{d}}((\mathbf{d}-\mathbf{1})\tau+\mathbf{1})=(x((d-1)\tau+1),x((d-1)\tau+1-\tau),x((d-1)\tau+1-2\tau),\ldots,x(1)) \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}(i)$, ($i=(d-1)\tau+1,\ldots,t$) są elementami d wymiarowej zrekonstruowanej przestrzeni stanów.

Takens udowodnił, że dla $d \geq 2m+1$, gdzie m jest wymiarem atraktora, a d jest wymiarem zanurzenia, przestrzeń stanów rozpięta przez zbiór d zmiennych będzie topologicznie równoważna z „oryginalną" przestrzenią.

Stosując metodę rozkładu wartości osobliwych, tworzymy macierz trajektorii X, która zawiera wyżej wymienione wektory $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}(i)$ będące elementami d wymiarowej zrekonstruowanej przestrzeni stanów:

$$X=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}(x^d(1))^T\\(x^d(2))^T\\ \vdots \\(x^d(N))^T\end{bmatrix} \tag{2}$$

gdzie $N=t-(d-1)$. Macierze X i X^T odzwierciedlają kolejno przestrzeń R^d i R^N, gdzie przestrzeń R^d jest przestrzenią wszystkich d-elementowych wektorów, a R^N definiujemy w podobny sposób.

1.1. Wymiar zrekonstruowanej przestrzeni stanów

Nasze rozważania rozpoczną się od wyznaczenia wymiaru przestrzeni d. Aby to wykonać, musimy najpierw znać liczbę wektorów liniowo niezależnych, które są liniowymi kombinacjami $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}(i)$. Załóżmy, że zbiór $\{s_i \in R^N\}$ jest zbiorem wektorów niezależnych w R^d. Załóżmy również, że wektory te są ortonormalne. Zatem są one częścią bazy ortonormalnej $\{c_i; i=1,\ldots,d\}$ przestrzeni R^d. Stąd otrzymujemy następującą równość:

$$s_i^T X = \sigma_i c_i^T \tag{3}$$

gdzie $\{\sigma_i\}$ jest zbiorem stałych rzeczywistych. Z ortonormalności $\{c_i\}$ wynika następujący warunek:

$$s_i^T X X^T s_j = \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} \tag{4}$$

gdzie:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Ponieważ macierz $\Lambda = XX^T$ jest symetryczna, więc jej wektory własne tworzą bazę ortonormalną przestrzeni R^N. Zatem równanie (4) można przedstawić w postaci:

$$\Lambda s_i = \sigma_i^2 s_i \tag{5}$$

gdzie $\{\sigma_i^2\}$ jest zbiorem wartości własnych. Należy zwrócić uwagę, że forma XX^T jest zdefiniowana nieujemnie, oraz można przyjąć (bez utraty ogólności), że stałe rzeczywiste $\{\sigma_i\}$ są także nieujemne.

Za pomocą równania (2) możemy przedstawić macierz Λ jako tablicę iloczynów skalarnych wszystkich par punktów przestrzeni R^d:

$$\Lambda = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 & \cdots & x_1^T x_N \\ x_2^T x_1 & x_2^T x_2 & \cdots & x_2^T x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \tag{6}$$

Macierz Λ będziemy nazywać macierzą struktury (*structure matrix*).

Przekształcając równanie (3), otrzymujemy następującą równość:

$$Xc_i = \sigma_i s_i \tag{7}$$

gdzie $\sigma_i \neq 0$. Mnożąc obustronnie równość (7) przez X^T, otrzymujemy:

$$X^T X c_i = \sigma_i X^T s_i$$

Następnie korzystając z równania (3), dostajemy:

$$\Omega c_i = \sigma_i^2 c_i \tag{8}$$

gdzie $\Omega = X^T X$ jest symetryczną macierzą $n \times n$, którą można zapisać w postaci:

$$\Omega = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i x_i^T \tag{9}$$

Macierz Ω będziemy nazywali macierzą kowariancji (*covariance matrix*).

Można zauważyć, że niezerowe własności własne macierzy struktury są równe niezerowym wartościom własnym macierzy kowariancji. Zatem rząd macierzy Λ jest równy rzędowi macierzy Ω:

$$r(\Lambda) = r(\Omega) = d' \leq d \tag{10}$$

Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że przestrzeń R^N można rozłożyć na podprzestrzeń o wymiarze d' i jej ortogonalne dopełnienie. Zatem niech d'-wymiarowa podprzestrzeń będzie rozpięta przez zbiór $\{s_i;\, i = 1,\ldots,d'\}$, a jej dopełnienie przez zbiór $\{s_i;\, i = d'+1,\ldots,N\}$.

Można założyć, że d' jest wymiarem przestrzeni zanurzenia. Zauważmy jednak, że macierz X zawiera elementy, które są wyznaczone doświadczalnie, a więc występuje w nich składnik losowy. Zatem informacja na temat wyboru wymiaru zanurzenia nie jest w pełni precyzyjna. W następnej części opracowania podjęto próbę podzielenia macierzy trajektorii na część deterministyczną i stochastyczną.

1.2. Filtracja

Rozważmy macierz ortogonalną C, której kolumny są wektorami $\{c_i\}$, tj. $C = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$, i macierz diagonalną $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$, gdzie $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_d \geq 0$. Podstawiając powyższe macierze do równania (8), otrzymujemy:

$$\Omega C = C\Sigma^2 \tag{11}$$

Korzystając z definicji macierzy Ω, otrzymujemy rozwiniętą postać równania (11):

$$(XC)^T (XC) = \Sigma^2 \tag{12}$$

Zatem możemy przedstawić macierz trajektorii X w postaci rozkładu wartości osobliwych:

$$X = S\Sigma C^T \tag{13}$$

gdzie $S \in R^{N \times d}$ jest macierzą zbudowaną z wektorów własnych macierzy Λ (w której d' ma niezerowe własności własne); elementy macierzy C i S będziemy nazywać wektorami osobliwymi (*singular vectors*), a elementy macierzy diagonalnej Σ (łącznymi) wartościami osobliwymi (*associated singular values*).

Rozważmy teraz jedną z metod filtracji. Polega ona na rozdzieleniu przestrzeni zanurzonej na podprzestrzeń deterministyczną i podprzestrzeń stochastyczną.

Niech $p^{(i)}$ będą macierzami w postaci $p_{jk}^{(i)} = \delta_{ij}\delta_{jk}$. Wtedy macierze P i Q, gdzie:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} p^{(i)} \tag{14}$$

$$P = \sum_{i=n+1}^{d'} p^{(i)} \tag{15}$$

spełniają warunek:

$$P + Q = I_d$$

gdzie $I_d \in R^{d \times d}$ jest macierzą jednostkową. Zatem równanie (13) można zapisać:

$$X = \overline{X} + \Delta X \tag{16}$$

gdzie:

$$\overline{X} = S P \Sigma C^T \tag{17}$$

jest częścią deterministyczną macierzy trajektorii X, a:

$$\Delta X = S Q \Sigma C^T \tag{18}$$

jest częścią stochastyczną. Powyższy podział macierzy X pozwala na odrzucenie danych, w których występuje szum. Zatem właściwych informacji na temat badanego szeregu dostarcza nam macierz $\overline{X}$, którą możemy zapisać w postaci:

$$\overline{X} = \sum_{i=n+1}^{d'} (Xc_i)c_i^T \tag{19}$$

1.3. Wybór czasu opóźnienia

Wyznaczenie czasu opóźnień $\tau = d\tau_s$ jest bardzo istotne w rekonstrukcji przestrzeni stanów. Dlatego też wiele pozycji w literaturze jest poświęconych metodom jego wyboru [1; 8].

Zanim wyznaczymy czas opóźnienia, rozważmy najpierw wybór czasu próby τ_s. Zauważmy, że dla ustalonego τ zwiększanie wartości d przy jednoczesnym zmniejszaniu czasu próby τ_s generuje dodatkowe wektory osobliwe i odpowiadające im wartości osobliwe. Coraz to większe zmniejszanie czasu próby prowadzi do zwiększenia liczby wektorów i wartości osobliwych w części stochastycznej macierzy trajektorii. W takiej sytuacji mówimy, że widmo osobliwe $\{\sigma_i^2\}$ jest zbieżne. Zatem czas próby należy wybrać w taki sposób, aby zapewnić zbieżność $\{\sigma_i^2\}$.

Rozważmy teraz wybór czasu opóźnień. Sytuacja, w której zwiększamy $\tau \to \infty$, prowadzi do analizy widmowej Fouriera. Zatem czas opóźnień jest ograniczony przez τ^*:

$$\tau \leq \tau^*$$

gdzie $\tau^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$ i ω^* jest częstotliwością graniczną. Ponadto:

$$\tau \geq (2m+1)\tau_s$$

Ponieważ m jest nieznane, możemy przyjąć:

$$\tau = \tau^*$$

Tak wyznaczony czas opóźnień spełnia warunki twierdzenia Takensa [11].

2. Rozkład wartości osobliwych – obliczenia numeryczne

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły – za pomocą metody rozkładu wartości osobliwych – na zrekonstruowanie przestrzeni stanów. Wykorzystano w tym celu szeregi finansowe utworzone z cen pięciu spółek notowanych na GPW w Warszawie w ostatnich pięciu latach: ING Bank Śląski, Kable, Swarzędz, Vistula, Krosno. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programów Statistica oraz pakietu Microsoft Excel.

Tabela 1

Zestawienie wartości wymiaru zanurzenia i czasu opóźnień szeregów czasowych utworzonych z notowań wybranych spółek

Spółka	Czas opóźnień τ	Wymiar zanurzenia d
ING Bank Śląski	11	6
Kable	14	9
Swarzędz	17	8
Vistula	12	8
Krosno	19	6

Podstawiając otrzymane wyniki do formuły (1), otrzymujemy rekonstrukcje przestrzeni stanów wybranych szeregów czasowych:

– ING Bank Śląski

$$x^6(1255) = (x(1255), x(1244), x(1233), x(1222), x(1211), x(1200))$$
$$x^6(1254) = (x(1254), x(1243), x(1232), x(1221), x(1210), x(1199))$$
$$x^6(1253) = (x(1253), x(1242), x(1231), x(1220), x(1209), x(1198))$$

....

$$x^6(56) = (x(56), x(45), x(34), x(23), x(12), x(1))$$

– Kable

$$x^9(1259) = (x(1259), x(1245), x(1231), \ldots, x(1147))$$
$$x^9(1258) = (x(1258), x(1244), x(1230), \ldots, x(1146))$$
$$x^9(1257) = (x(1257), x(1243), x(1229), \ldots, x(1145))$$

....

$$x^9(113) = (x(113), x(99), x(85), \ldots, x(1))$$

– Swarzędz

$$x^8(1257) = (x(1257), x(1240), x(1223), \ldots, x(1138))$$
$$x^8(1256) = (x(1256), x(1239), x(1222), \ldots, x(1137))$$
$$x^8(1255) = (x(1255), x(1238), x(1221), \ldots, x(1136))$$

....

$$x^8(120) = (x(120), x(103), x(86), \ldots, x(1))$$

- Vistula

$$x^8(1256) = (x(1256), x(1244), x(1232), ..., x(1172))$$
$$x^8(1255) = (x(1255), x(1243), x(1231), ..., x(1171))$$
$$x^8(1254) = (x(1254), x(1242), x(1230), ..., x(1170))$$

....

$$x^8(85) = (x(85), x(73), x(61), ..., x(1))$$

- Krosno

$$x^6(1257) = (x(1257), x(1238), x(1219), ..., x(1162))$$
$$x^6(1256) = (x(1256), x(1237), x(1218), ..., x(1161))$$
$$x^6(1255) = (x(1255), x(1236), x(1217), ..., x(1160))$$

....

$$x^6(96) = (x(96), x(77), x(58), ..., x(1))$$

Zakończenie

Zastosowanie nieco mniej znanych narzędzi matematycznych, takich jak rekonstrukcja przestrzeni stanów, do opisu ekonomicznych szeregów czasowych stanowi uzupełnienie dotychczasowych metod. Z pewnością dalsze badania pokażą, na ile zaprezentowane metody okażą się przydatne w prognozowaniu szeregów czasowych lub też określeniu, czy badany szereg ma charakter chaotyczny czy stochastyczny.

Literatura

1. Abarbanel H.D.: *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1996.
2. Broomhead D.S., King G.P.: *Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data*. „Physica D" 1986, 20.
3. Farmer J.D., Sidorovich J.J.: *Exploating Chaos to Predict the Future and Reduce Noise*. In: *Evolution, Learning and Cognition*. Ed. Y.C. Lee. World Scientific, Singapore 1988.
4. Fraser A.M., Swinney H.L.: *Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information*. „Physical Review A" 1986, Vol. 33, No 2.

5. Grassberger P., Procaccia I.: *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*. „Physica D" 1983.
6. Guillaume D.M.: *A Low-Dimensional Fractal Atrractor in the Foreign--Exchange Markets?* „Chaos & Nonlinear Dynamics in the Financial Markets" 1995.
7. Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.: *Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction*. „Physical Review A" 1992, Vol. 45, No 6.
8. Kim H.S., Eykholt R., Salas J.D.: *Nonlinear Dynamics, Delay Time, and Embedding Windows*. „Physica D" 1999, 127.
9. Liebert W., Schuster H.G.: *Proper Choice of the Time Delay for the Analysis of Chaotic Time Series*. „Phys. Rev. Lett. A" 1989, 142.
10. Sprott J.C.: *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford 2003.
11. Takens F.: *Detectingstrange Attractors in Turbulence*. In: *Lecture Notes in Mathematics*. Eds. D.A. Rand, L.S. Young. Springer-Verlag, Berlin 1981.
12. Talaga L., Zieliński Z.: *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*. PWN, Warszawa 1986.
13. Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996.

RECONSTRUCTION OF THE STATE SPACE FROM A SINGLE ECONOMICS' TIME SERIES

Summary

In this paper we used the time delay method – Takens (1981) – for the reconstruction of the state space from a single time series. In order to compute the delay time τ we used the C-C method and then we used the false neighbours' method for compute the embedding dimension d. Our data set is composed of daily foregin – exchange returns obtained from WGPW for USD, GBP and JPY.