Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 235 · 2015

Daniel Kubek

Politechnika Krakowska
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Zarządzania w Budownictwie i Transporcie
Zakład Transportu
dkubek@pk.edu.pl

CHARAKTERYSTYKA OPTYMALIZACJI ODPORNEJ PROBLEMU NAJKRÓTSZEJ ŚCIEŻKI W OBSZARACH ZURBANIZOWANYCH

Streszczenie: Niniejszy artykuł przedstawia problematykę wyznaczania ścieżek dla pojazdów poruszających się w sieci drogowej miasta. Ścieżki te zostały wyznaczone w oparciu o optymalizację odporną, która uwzględnia możliwość wystąpienia wahań od wartości oczekiwanej czasów przejazdu na odcinkach sieci drogowej. Poruszone zagadnienie popularnie znane jest jako problem najkrótszej ścieżki z niepewnymi czasami przejazdów (*robust shortest path problem*). Odporny model matematyczny problemu najkrótszej ścieżki został rozwiązany za pomocą metody, która zamienia oryginalny problem na deterministyczny odpowiednik programowania liniowego. Odpowiednik ten jest uzyskiwany przez przyjęcie założenia, że zmienna decyzyjna jest funkcją afiniczną, która zależy od realizacji niepewności danych. Niepewność jest zdefiniowana na podstawie odchylenia standardowego czasu przejazdu na poszczególnym odcinku. Parametry te są wykorzystane do opisu rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, zgodnie z którymi wartość niepewności danych będzie realizowana. Zalety stosowania optymalizacji odpornej oraz charakterystyka problemu zostały zaprezentowane na rzeczywistej sieci drogowej miasta Krakowa.

Słowa kluczowe: problem najkrótszej ścieżki, optymalizacja odporna, elastyczne okna czasowe.

Wprowadzenie

Dynamika zmienności czasów przejazdów w sieci transportowej miasta jest wysoka. Godziny szczytu, lokalizacja danego odcinka drogi, warunki pogodowe, zdarzenia losowe oraz incydenty drogowe powodują, że estymacja czasów przejazdów na danych odcinkach może być odmienna od rzeczywistej wartości. Brak uwzględnienia tych czynników w procesie decyzyjnym przy wyznaczaniu tras przejazdu pojazdów może powodować ponoszenie większych kosztów transportowych. Wzrost ten może być spowodowany brakiem przyjęcia założenia, że dane o ruchu drogowym, którymi dysponuje się, mogą być obarczone pewnym stopniem nieokreśloności lub niepewności. Przyjęcie deterministycznych, z góry znanych wartości czasów przejazdów do wyznaczenia trasy dla pojazdu może być kosztowne nie tylko dla firmy wykonującej usługi transportowe w danym mieście, ale również może być kosztowne dla całego systemu transportowego miasta. Chodzi tu przede wszystkim o koszty zewnętrzne transportu, tj. emisja spalin, emitowany hałas, zwiększona zajętość dróg, czy też kwestie wizerunkowe danego miasta.

Niniejszy artykuł przedstawia problematykę wyznaczania ścieżek dla pojazdów poruszających się w sieci drogowej miasta. Ścieżki te zostały wyznaczone na podstawie optymizacji odpornej, która uwzględnia możliwość wystąpienia wahań od wartości oczekiwanej czasów przejazdu na odcinkach sieci drogowej. Poruszone zagadnienie popularnie znane jest jako problem najkrótszej ścieżki z niepewnymi czasami przejazdów (*robust shortest path problem*). Odporny model matematyczny problemu najkrótszej ścieżki został rozwiązany za pomocą metody, która zamienia oryginalny problem na szereg deterministycznych odpowiedników. Są one uzyskiwane przez przyjęcie założenia, że zmienna decyzyjna jest funkcją afiniczną, która zależy od realizacji niepewności danych. Niepewność jest zdefiniowana na podstawie odchylenia standardowego oraz wariancji zmienności czasu przejazdu na poszczególnym odcinku. Parametry te są wykorzystane do opisu rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, zgodnie z którymi wartość niepewności danych będzie realizowana. Zalety stosowania optymalizacji odpornej oraz charakterystyka problemu zostały zaprezentowane na rzeczywistej sieci drogowej miasta Krakowa.

1. Charakterystyka ruchu miejskiego

Funkcjonowanie współczesnych miast jest nierozerwalnie związane z funkcjonowaniem transportu. Dynamiczny rozwój miast powoduje równie dynamiczny i niekontrolowany rozwój transportu. Ten z kolei generuje wiele problemów dla mieszkańców, np. zatłoczenie, zanieczyszczenie powietrza czy hałas. Jednym z najważniejszych problemów miejskich jest wzmożony ruch, który przy planowaniu dystrybucji wymusza uwzględnienie wydłużonych czasów dostaw. Godziny szczytu, lokalizacja danego odcinka drogi, warunki pogodowe, zdarzenia losowe oraz incydenty drogowe powodują, że estymacja czasów przejazdów na danych odcinkach może być odmienna od rzeczywistej wartości. Brak uwzględnienia tych czynników w procesie decyzyjnym przy wyznaczaniu tras przejazdu pojazdów może powodować ponoszenie większych kosztów transportowych. Wzrost ten może być spowodowany brakiem przyjęcia założenia, że dane o ruchu drogowym, którymi się dysponuje, mogą być obarczone pewnym stopniem nieokreśloności lub niepewności. Przyjęcie deterministycznych, z góry znanych wartości czasów przejazdów do wyznaczenia trasy dla pojazdu może być kosztowne nie tylko dla firmy wykonującej usługi transportowe w danym mieście, ale również dla całego systemu transportowego miasta. Chodzi tu przede wszystkim o koszty zewnętrzne transportu, tj. emisja spalin, emitowany hałas, zwiększona zajętość dróg, czy też kwestie wizerunkowe danego miasta. Jak pokazano w pracy [Adamski i Kubek, 2014], nawet niewielkie zmiany w czasach przejazdu mogą powodować zmianę aktualnego optymalnego rozwiązania.

2. Problem najkrótszej ścieżki

Zagadnienie najkrótszej ścieżki w sieci jest bardzo popularnym problemem z dziedziny badań operacyjnych, którego celem jest wyznaczenie optymalnej trasy w sieci. Dotychczas większość prac naukowych o tematyce SPP zakłada, że:

- koszty są stałe (modele deterministyczne) [Kara ̦san, Pinar i Yaman, 2001],
- koszty są zmienne w czasie (modele dynamiczne) [Dellaert, Woensel i Kok, 2013],
- koszty są przyjmowane z pewnym prawdopodobieństwem (modele stochastyczne) [Cheng, 2013].

Ostatnie podejście zakłada, że koszty mogą być określone z pewną dozą niepewności. Ta z kolei jest określona przez prawdopodobieństwo wystąpienia wartości kosztu, np. czasu podróży na danym odcinku drogi. Modele stochastyczne przyjmują, że niepewność (tu prawdopodobieństwo wystąpienia kosztu) występuje zgodnie z przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa, który z góry jest znany. Ostatni warunek jest założeniem nie do końca poprawnym, ponieważ nie ma całkowitej pewności, że przyjęty rozkład prawdopodobieństwa kosztów odpowiada dokładnie rzeczywistym zmianom na odcinkach sieci drogowej.

Z tą niedogodnością radzi sobie czwarte podejście do problemów – optymalizacja odporna (*robust optimization*). Zakłada ona, że niektóre dane modelu mogą się zmieniać, jednak zmiany te nie są opisane przez konkretny rozkład prawdopodobieństwa, tylko przez rodzinę rozkładów. Dodatkową przewagą tego podejścia w stosunku do podejścia stochastycznego jest mniejsze zapotrzebowanie na moce obliczeniowe komputera [Bertsimas, 2003]. Ostatnie lata wskazują, że podejście to jest coraz częściej stosowane w wielu problemach optymalizacyjnych [Gabrela, Murata i Thiele, 2014].

Zaprezentowany poniżej model najkrótszej ścieżki z elastycznymi oknami czasowymi może z powodzeniem być zaimplementowany w problematyce wyznaczania tras pojazdom (*vehicle routing problem*, VRP), gdzie głównym założeniem jest istnienie pełnej siatki połączeń pomiędzy punktami w sieci drogowej. W rzeczywistości nie każdy punkt jest połączony z pozostałymi, wobec czego problem ten możliwy jest do rozwiązania przez stworzenie sieci z wirtualnymi odpornymi połączeniami, które zostałyby wyznaczone na podstawie zaproponowanego poniżej podejścia. Dzięki temu można uzyskać pełną macierz kosztów pomiędzy obsługiwanymi klientami oraz odporne ścieżki, na bazie których możliwe jest wykonanie optymalizacji sekwencji odwiedzania. W konsekwencji doprowadzi to do uzyskania problemu odpornego VRP.

2.1. Model deterministyczny

Model matematyczny problemu najkrótszej ścieżki z elastycznymi oknami czasowymi (*shortest path problem with soft time windows*, SPPSTW) można przedstawić następująco (stworzono na podstawie modelu zaprezentowanego w pracy [Desaulniers i Villeneuve, 2000]). Dany jest skierowany graf $G = (\boldsymbol{V},\mathbf{A})$, gdzie $\boldsymbol{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$ oznacza zbiór punktów grafu, $\mathbf{A} = \{(i, j): i \wedge j \in \boldsymbol{V}, i \neq j\}$ oznacza zbiór skierowanych łuków (połączeń pomiędzy i-tym a j-tym punktem). Każdy łuk (i, j) ze zbioru **A** charakteryzuje się kosztem przejazdu **T**, który w dalszej części artykułu oznacza czas przejazdu pomiędzy poszczególnymi punktami grafu oraz kosztami operacyjnymi **C**, które są związane z poruszaniem się pojazdu w sieci drogowej. W grafie istnieją dwa punkty $\{org, des\} \in \boldsymbol{V}$, oznaczające odpowiednio początek ścieżki oraz koniec ścieżki, które charakteryzują się stałymi oknami czasowym: $TW_i = [e_i, l_i]\ \forall(i) \in \{org, des\}$. Okna te oznaczają, kiedy realizacja ścieżki powinna się rozpocząć oraz kiedy powinna się skończyć. Możliwe jest niespełnienie warunku trafienia w okno czasowe, w takich wypadkach będzie naliczana umowna kara. Problem sprowadza się do znalezienia optymalnego połączenia pomiędzy dwoma punktami sieci $\{org, des\} \in \boldsymbol{V}$, z uwzględnieniem okna czasowego początku i końca realizacji trasy. W problemie występują trzy zmienne:

$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall(i, j) \in \mathbf{A}$ – oznacza, czy łuk (i, j) znajduje się w ścieżce,

$y_{1,2} \in \Re^+$ – oznacza odpowiednio czas odjazdu z punktu startu/czas przyjazdu do punktu celu,

$w_{1,2,3,4} \in \Re^+$ – oznacza dewiacje od stałego okna czasowego; w_1 to czas oczekiwania, w_4 to czas opóźnienia, a w_2 oraz w_3 są dodatkowymi zmiennymi, które zapewniają poprawność modelu, gdy pojazd przyjedzie do punktu celu o czasie zawierającym się w zakresie stałego okna czasowego. Konstrukcja ta jest zapożyczona z metodyki programowania celowego w optymalizacji wielokryterialnej [Calvete i in., 2007]. Elastyczność okien została wprowadzona do modelu ze względu na fakt późniejszego występowania wahań w czasach przejazdów, jak również dlatego, że założenie to jest bliższe rzeczywistości.

Deterministyczny model matematyczny SPPSTW można przedstawić następująco:

$$(DET)\min \left[Q \cdot \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} C_{ij} \cdot x_{ij} + (1-Q) \cdot \left(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_4 \right) \right] \tag{1}$$

$$\sum_{j = \in V} x_{ij} - \sum_{j \in V} x_{ji} = \begin{cases} 1 & dla \quad i = org \\ -1 & dla \quad i = des \\ 0 & w.p.p \end{cases} \tag{2}$$

$$y_1 + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} T_{ij} \cdot x_{ij} = y_2, \quad \forall (i,j) \in A \tag{3}$$

$$e_{org} \le y_1 \le l_{org} \tag{4}$$

$$\begin{cases} y_2 + w_1 - w_2 = a_{des} \\ y_2 + w_3 - w_4 = b_{des} \end{cases} \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}^n, \quad \forall (i,j) \in A, \; y_{1,2} \in \Re^+, \; w_{1,2,3,4} \in \Re^+ \tag{6}$$

Funkcja kryterialna (1) składa się z dwóch członów: pierwszy odpowiada za minimalizację kosztów operacyjnych pojazdu, drugi za minimalizację czasu oczekiwania w_1 na rozpoczęcie się okna czasowego w punkcie celu lub czasu opóźnienia w_4, które może wystąpić po przyjeździe pojazdu do celu. Zmienna parametr Q oznacza wagę ważności kryterium minimalizacji kosztów nad kryterium minimalizacji odchylenia od stałego okna czasowego. Wagi α i β są karami za wystąpienie oczekiwania/spóźnienia. Przy niskiej akceptacji opóźnień β powinno być znacznie większe od α. Ograniczenie (2) zapewnia poprawność przepływu w sieci drogowej. Warunek (3) określa czas przyjazdu do punktu celu, a ograniczenie (4) zapewnia, że czas rozpoczęcia realizacji ścieżki zawiera się w oknie czasowym startu. Ograniczenie (5) pozwala na wystąpienie czasu oczekiwania lub opóźnienia w punkcie celu. Ostatni warunek definiuje naturę zmiennych.

2.2. Model odporny

Przedstawiony deterministyczny model DET problemu można przeformułować na problem optymalizacji odpornej poprzez założenie, że czas przejazdu na poszczególnych odcinkach sieci przyjmuje wartości z zakresu $\mathbf{T} = \{T_{ij} \in [T_{ij}^{med}, T_{ij}^{med} + T_{ij}^{dev}], \forall (i, j) \in \mathbf{A}\}$, gdzie T_{ij}^{med} oznacza oczekiwany czas przejazdu, a T_{ij}^{dev} oznacza możliwą dewiację czasu od wartości oczekiwanej czasu przejazdu. Przedział zmienności czasu przejazdu można również zapisać jako zbiór: $\mathbf{T}^z = T(z) = \{T_{ij} \in :[T_{ij}^{med}, T_{ij}^{med} + z_{ij} \cdot T_{ij}^{dev}], z_{ij} \in [0, 1] \wedge \Sigma_{ij} z_{ij} \leq \Gamma, \forall (i, j) \in \mathbf{A}\}$. Zbiór ten jest zbiorem niepewności czasu przejazdu każdego odcinka sieci, a stopień niepewności jest kontrolowany przez parametr Γ. Oznacza on stopień konserwatyzmu rozwiązania, czyli w jakim stopniu uzyskane rozwiązanie będzie odporne na występujące odchyłki od wartości oczekiwanej. Jeśli przez J oznaczymy ilość elementów macierzy kosztów (liczba odcinków w sieci), to parametr Γ będzie przyjmował wartości z zakresu $[0, |J|]$. Dla $\Gamma = 0$ model sprowadzi się do deterministycznej wersji, jeśli z kolei $\Gamma = |J|$, model doprowadzi do modelu Soystera, czyli do wyboru scenariusza najlepszego z najgorszych [Soyster, 1973]. Dodatkowa zmienna z_{ij} oznacza zmienną nieokreśloną, która przyjmuje wartości z zakresu [0, 1] [Bertsimas, 2004]. Dodatkowa zmienna z jest macierzą losowych współczynników nieokreśloności czasu przejazdu zdefiniowanych w przestrzeni (Ω, F, P), dla których nie zakłada się znajomości rozkładu prawdopodobieństwa P. Rozkład ten jest opisany przez rodzinę rozkładów F. Zakłada się również, że część zmiennych decyzyjnych jest funkcją afiniczną nieokreślonych współczynników z_{ij}.

Wobec takich założeń problem (DET) można zamienić na problem odporny SPPSTW (*robust shortest path problem with soft time windows*, RSPPSTW), którego zapis matematyczny przedstawia się następująco:

$$(ROB)\min \left[Q \cdot \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} C_{ij} \cdot x_{ij} + (1-Q) \cdot \left(\alpha \cdot w_1(T^z) + \beta \cdot w_4(T^z) \right) \right] \tag{7}$$

$$\sum_{j=\in V} x_{ij} - \sum_{j\in V} x_{ji} = \begin{cases} 1 & dla \quad i = org \\ -1 & dla \quad i = des \\ 0 & w.p.p \end{cases} \tag{8}$$

$$y_1(T^z) + \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} T^z \cdot x_{ij} = y_2(T^z), \quad \forall (i,j) \in A \tag{9}$$

$$e_{org} \le y_1(T^z) \le l_{org} \tag{10}$$

$$\begin{cases} y_2(T^z) + w_1(T^z) - w_2(T^z) = a_{des} \\ y_2(T^z) + w_3(T^z) - w_4(T^z) = b_{des} \end{cases} \tag{11}$$

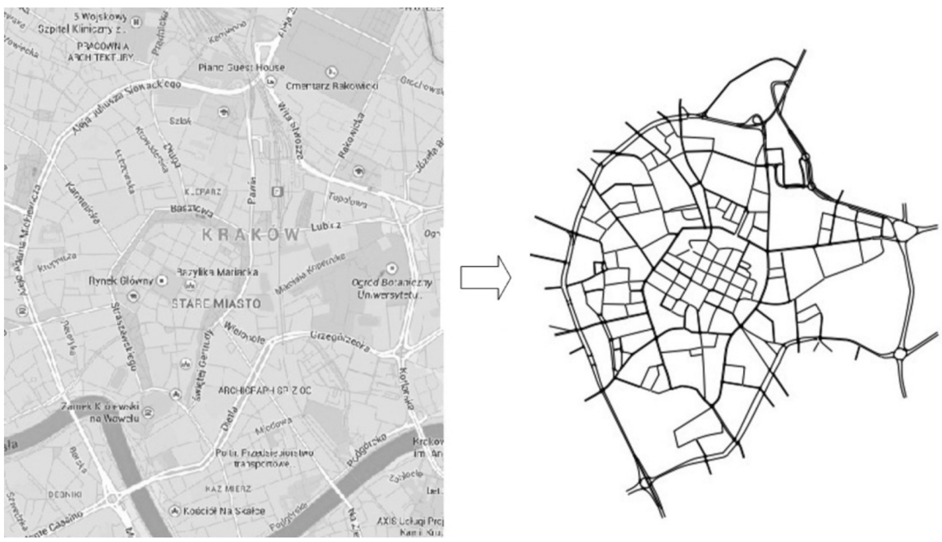
$$\begin{gathered} x_{ij} \in \{0,1\}^n, \quad \forall (i,j) \in A, \; y_{1,2}(T^z) \in \Re^+ \times \Re^n, \\ w_{1,2,3,4}(T^z) \in \Re^+ \times \Re^n \; z_{ij} \in [0,1] \quad \forall (i,j) \in A \end{gathered} \tag{12}$$

Przedstawiony powyżej model (ROB) zakłada, że niepewne dane $\mathbf{T}^z$ są zależne afinicznie w dopuszczalnej przestrzeniu niepewności. Takie sformułowanie problemu zamienia również zmienne zależne od niepewności danych na zmienne typu „poczekaj i zobacz" [Ben-Tal i in., 2004]. Zmienne $\boldsymbol{y}(\mathbf{T}^z)$ oraz $\boldsymbol{w}(\mathbf{T}^z)$ mogą dostosowywać swoje wartości do zrealizowanych wartości współczynników nieokreśloności z_{ij}. Zmienna x_{ij} jest zmienną typu „tu i teraz", czyli na jej wartości nie wpływają elementy niepewne modelu. Dzięki zastosowaniu liniowych współczynników nieokreśloności oraz wprowadzeniu zmiennych decyzyjnych liniowo zależnych (*linear decision rules*) model (ROB) jest rozwiązywalny i można uzyskać rozwiązanie co najmniej dopuszczalne. Szczegóły metody oraz dowody równoważności obu prezentacji problemu zostały zaprezentowane w pracach [Ben-Tal i in., 2004] oraz [Goh i Sim, 2010].

3. Charakterystyka optymalizacji odpornej problemu najkrótszej ścieżki

Przedstawiony model RSPPSTW został zaimplementowany do wyznaczenia optymalnej trasy w rzeczywistej sieci drogowej miasta Krakowa z uwzględnieniem rzeczywistych natężeń ruchu na tej sieci. Charakterystykę zmienności czasów przejazdów uzyskano przy użyciu symulatora ruchu Aimsun 8.03. Oprogramowanie to umożliwia wykonanie m.in. mikrosymulacji ruchu drogowego. Rys. 1 przedstawia analizowaną sieć oraz jej model w programie Aimsun.

Dane o natężeniach ruchu na wlotach do analizowanej sieci zostały wprowadzone na podstawie pomiaru ruchu wykonywanego w 2012 r. przez Zarząd Infrastruktury Komunalnej i Transportu w Krakowie. Pomiar wykorzystany w analizie został wykonany w porannym szczycie komunikacyjnym w dzień powszedni. Dzięki badaniom ruchu oraz funkcjonalności symulatora możliwe jest uzyskanie charakterystyki zmienności czasu przejazdu na poszczególnych odcinkach dla danej sieci. Wyniki otrzymane z symulatora ukazują, że w sieci występują odcinki, gdzie zróżnicowanie czasu przejazdu jest nieduże, ale występują również takie, gdzie zmienność czasu przejazdu jest duża. Świadczą o tym wysoka wariancja oraz odchylenie standardowe czasu przejazdu. Dla tych odcinków niepewność w modelu będzie większa – wartość możliwej dewiacji T_{ij}^{dev} będzie większa.



Rys. 1. Analizowany obszar centrum Krakowa oraz jego model symulacyjny w Aimsun

Źródło: Na podstawie Google Maps oraz Kubek [2014].

3.1. Wyniki symulacji

Model wyznaczania odpornych tras został zaimplementowany w środowisku optymalizacyjnym CPLEX 12.5, gdzie uzyskane rozwiązanie zostało wyznaczone metodą optymalizacji dokładnej (algorytm Branch and Bound). Zaprezentowana sieć drogowa została zdefiniowana jako graf skierowany składający się 250 punktów oraz 551 łuków skierowanych. Niepewność czasów przejazdów została zdefiniowana jako różnica pomiędzy maksymalną wartością czasu przejazdu a jego wartością oczekiwaną. Duża różnica tych wartości oznacza, że dany odcinek drogi charakteryzuje się wysoką zmiennością czasu podróży.

Analizę wykonano dla dwóch losowo wybranych punktów, którym przypisano losowe okna czasowe z maksymalną długością przedziału 1,5 godziny. W celu pokazania zalet stosowania modelu (ROB) okna czasowe startu i celu mają część wspólną, tzn. możliwe jest wyznaczenie takiej trasy w modelu (DET), że nie wystąpią opóźnienia oraz wcześniejszy przyjazd pojazdu. Sytuacja ta jest dość często spotykana w rzeczywistej obsłudze transportowej danego obszaru, gdzie na wyznaczonym terenie znajduje się zbiór klientów o podobnym oknie czasowym obsługi. Parametr ważności kryterium przyjęto jako $Q = 0.5$, a wagi w kryterium opóźnień równe $\alpha,\beta = 1$. W celach porównawczych obliczono ścieżkę na podstawie modelu (DET) oraz modelu (ROB) z poziomem konserwatyzmu $\Gamma = 5$.

Rys. 2 przedstawia uzyskane rozwiązania. Jak można zauważyć, nawet przy niskim poziomie konserwatyzmu rozwiązanie jest inne niż w przypadku wyznaczonego deterministycznie. Jednakże sama zmiana trasy nie świadczy jeszcze o wyższości metody odpornej nad klasycznymi metodami.

Rys. 2. Najkrótsza ścieżka na podstawie modelu deterministycznego (DET) – linia ciągła oraz wersji odpornej (ROB) – linia przerywana

W związku z tym, że ruch drogowy to proces dynamiczny, którego główną cechą jest niemożliwość dokładnego przewidzenia jego parametrów, tj. czasu przejazdu, w dalszej analizie sprawdzono otrzymane rozwiązanie metodą Monte Carlo. Dla 1000 losowo wybranych wartości zmiennej z_{ij} z zakresu [0, 1] sprawdzono, jaki byłby koszt ścieżki oraz wartość opóźnienia dla rozwiązania deterministycznego oraz odpornego. Wyniki przedstawia tabela 1, w której zestawiono 3 przypadki: „losowy", „wartość oczekiwana" oraz „najgorszy". Dla przypadku „losowy" wskazano wartości średnie dla 1000 wyników z analizy Monte Carlo. Przypadek „wartość oczekiwana" to sytuacja, gdy w rzeczywistości nie wystąpiła realizacja niepewności, czyli nie wystąpiła dewiacja w czasach przejazdu. Ostatni przypadek to sytuacja, gdy w sieci drogowej wystąpiły maksymalne wahania od wartości oczekiwanej.

Tabela 1. Porównanie wyników optymalizacji dla modeli DET i ROB

	Rozwiązanie (DET)		Rozwiązanie (ROB)	
Przypadek	Długość ścieżki [sek.]	Opóźnienie [sek.]	Długość ścieżki [sek.]	Opóźnienie [sek.]
Losowy	409,95	373,48	409,95	0,00
Wartość oczekiwana	333,48	0,00	333,79	0,00
Najgorszy	489,91	763,89	378,73	0,00

Jak można zauważyć, rozwiązanie deterministyczne jest korzystne tylko w przypadku sytuacji idealnej – gdy rzeczywista realizacja czasów podróży w sieci drogowej będzie w całości taka sama, jak założono to przy planowaniu ścieżki. Jednak gdy w sieci drogowej wystąpi niewielka dewiacja od założonych wartości danych, to rozwiązanie klasyczne może przynieść straty dla firmy transportowej, jak również dla całego systemu transportowego miasta. Świadczą o tym występujące opóźnienia dla ścieżki wyznaczonej metodą deterministyczną oraz wydłużony czas realizacji ścieżki przez pojazd.

Podsumowanie

Przedstawione podejście pokazuje zalety stosowania optymalizacji odpornej, dzięki której możliwe jest bardziej dokładne opisanie rzeczywistego obiektu, jakim jest zmienny i niepewny ruch miejski. Dalsze prace nad tą tematyką będą prowadzone w kierunku uwzględnienia dynamizmu zmiany czasu przejazdu w czasie, jak również propozycji integracji odpornych problemów najkrótszej ścieżki z problematyką wyznaczania tras w celu stworzenia modeli odpornych VRP. Innym właściwym kierunkiem rozwoju tej problematyki jest zbadanie, w jaki sposób należy definiować zbiór niepewności, aby uwzględnić niepewność wystąpienia incydentu drogowego na danym odcinku.

Literatura

Adamski A., Kubek D. (2014), *HITS: Advanced City Logistics Systems* [w:] T. Marek (red.), „Human Factors of a Global Society: A System of Systems Perspective", CRC Press.

Ben-Tal A., Goryashko A., Guslitzer E., Nemirovski A. (2004), *Adjustable robust solutions of uncertain linear programs*, „Mathematical Programming", Vol. 99.

Bertsimas D., Sim M., (2003), *Robust discrete optimization and network flows*, „Mathematical Programming", Vol. 98.

Bertsimas D., Sim M. (2004), *Price of Robustness*. „Operations Research", Vol. 52, Iss. 1.

Calvete H.I., Galé C., Oliveros M.J., Sánchez-Valverde B. (2007), *A goal programming approach to vehicle routing problems with soft time windows*, „European Journal of Operational Research", Vol. 177, Iss. 3.

Cheng J., (2013), *Distributionally robust stochastic shortest path problem*, „Electronic Notes in Discrete Mathematics", Vol. 41.

Dellaert N., Woensel T., Kok T. (2013), *Dynamic shortest path problems: Hybrid routing policies considering network disruptions*, „Computers & Operations Research", Vol. 40, Iss. 12.

Desaulniers G., Villeneuve D. (2000), *The Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Waiting Costs*, „Transportation Science", Vol. 34, Iss. 3.

Gabrela V., Murata C., Thiele A. (2014), *Recent advances in robust optimization: An overview*, „European Journal of Operational Research", Vol. 235, Iss. 3.

Goh J., Sim M. (2010), *Distributionally Robust Optimization and its Tractable Approximations*, „Operations Research", Vol. 58.

Kara¸san O.E., Pinar M.Ç., Yaman H. (2001), *The robust shortest path problem with interval data*. *Technical report*, Bilkent University.

Kubek, D. (2014), *Integration of robust shortest path with pickup and delivery vehicle routing problem*, ICTTE: International conference on traffic and transport engineering, November 27-28, 2014 Belgrade, Serbia.

Soyster A. (1973), *Convex programming with set-inclusive constraints and application to inexact linear programming*, „Operation Research", Vol. 21.

ANALYSIS OF ROBUST OPTIMIZATION
FOR SHORTEST PATH PROBLEM IN URBAN AREAS

Summary: The paper addresses the shortest path problem for vehicles traversing the road network of the city. The paths have been determinate based on the robust optimization theory, which take into account the data uncertainty. The problem is known as robust shortest path problem. Formulation of robust mathematical model is solved by transforming the robust model into a deterministic counterpart. Deterministic counterpart is obtained by assumption that variables are affinely dependent on primitives uncertainty. Uncertainty set is defined as affine function of standard deviation of sections travel time. These parameters are used to describe a family of probability distributions under which the value of the uncertainty of the data will be implemented. The advantages, analysis and the characteristics of robust approach are presented on a real example – the road network of Cracow.

Keywords: shortest path problem, robust optimization, soft time windows.