



**Piotr Namieciński**

Uniwersytet Łódzki  
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny  
Katedra Badań Operacyjnych  
piotr.namiecinski@uni.lodz.pl

## **ANALIZA SYMULACYJNA STABILNOŚCI RANKINGÓW OTRZYMANYCH METODĄ PROMETHEE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI Z WYKORZYSTANIEM R**

**Streszczenie:** Preferencje decydenta określone są w metodzie PROMETHEE za pomocą wag. Dokładne określenie ich wartości nastręcza jednak znacznych trudności, przez co wprowadzany jest czynnik niepewności względem ostatecznych rankingów. W artykule tym badany jest wpływ losowych zaburzeń wag kryteriów na stabilność rankingów w zależności od struktury wyjściowej macierzy ocen porównywanych obiektów. W tym celu przeprowadzone zostały trzy eksperymenty symulacyjne przy użyciu specjalnie przygotowanego pakietu R. Wyniki badań wykazały, że im silniej skorelowane są ze sobą kryteria ocen, tym ostateczne rankingi są mniej wrażliwe na wahania wartości wag. Dodatkowo wykazano brak statystycznych zależności pomiędzy doбором obiektów a stabilnością rankingów metody PROMETHEE.

**Słowa kluczowe:** PROMETHEE, niepewność, symulacja, R.

### **Wprowadzenie**

Kwestia niepewności wartości parametrów zadania wielokryterialnego jest obecnie tematem bardzo często poruszonym w literaturze naukowej. W przypadku PROMETHEE problem ten może dotyczyć bądź wartości atrybutów opisujących porównywane obiekty, bądź jednego z dwóch elementów opisujących preferencje decydenta: odpowiedniego kryterium uogólnionego albo wartości wag. Badania opisywane w tym artykule skupiają się na analizie wpływu losowych zaburzeń wartości wag kryteriów na ostateczny ranking metody PROMETHEE. W przeciwieństwie jednak do analizy wrażliwości, gdzie badane

są dopuszczalne przedziały zmian tych wag dla konkretnego przypadku danych, tu analizowane są korelacje pomiędzy stabilnością uzyskiwanych wyników a pozostałymi elementami modelu, jak struktura danych czy wybrane funkcje preferencji. W tym celu zostały przeprowadzone trzy eksperymenty symulacyjne pozwalające sprawdzić, jak zmieniała się stabilność rankingu PROMETHEE dla ośmiu różnych poziomów siły zaburzeń w zależności od struktury macierzy atrybutów obiektów oraz wybranych kryteriów uogólnionych. W celu przeprowadzenia obliczeń przygotowano pakiet funkcji w programie R<sup>1</sup>.

Artykuł został podzielony na trzy części. W pierwszej zaprezentowany został problem niepewności w zagadnieniach wielokryterialnych i proponowane w literaturze fachowej rozwiązania tego problemu. W drugiej przedstawiono zastosowaną metodologię badania wraz z jego podstawowymi założeniami i procedurami obliczeniowymi. W ostatniej części zaprezentowane zostały wyniki trzech eksperymentów symulacyjnych.

## 1. Niepewność w zagadnieniach wielokryterialnych

Problem podejmowania decyzji wielokryterialnych w warunkach niepewności badany jest już od wielu lat, nadal nie została jednak wypracowana powszechnie akceptowalna metoda radzenia sobie z tym problemem. Za Durbachem i Stewartem [2012] można wymienić pięć dominujących w literaturze tematu podejść:

- 1) Bazujące na funkcjach prawdopodobieństwa, gdzie można wyszczególnić dalsze cztery alternatywne rozwiązania wykorzystujące:
  - wielokryterialną funkcję oczekiwanej użyteczności,
  - relacje dominacji stochastycznej,
  - metody symulacyjne,
  - teorię funkcji przekonania (*belief function*).
- 2) Oparte na teorii perspektywy.
- 3) Oparte na bezpośrednich miarach ryzyka jako dodatkowych kryteriach.
- 4) Oparte na liczbach rozmytych.
- 5) Podejście scenariuszowe.

Jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest fakt, że w przypadku zagadnień wielokryterialnych źródła niepewności mogą być dwojakiego rodzaju. Po pierwsze, może ona wynikać z samej natury modelowanego problemu, kiedy wartości poszczególnych atrybutów porównywanych alternatyw są zmiennymi

---

<sup>1</sup> Środowisko R możliwe jest do pobrania bezpłatnie z strony projektu: <http://www.R-project.org/>.

losowymi. Po drugie, niepewność procesu decyzyjnego może być uwarunkowana trudnościami w odwzorowaniu preferencji decydenta. W obu przypadkach możliwe jest zastosowanie metody PROMETHEE, pod warunkiem wprowadzenia odpowiednich modyfikacji. Poniżej przedstawionych zostało kilka prac, które w różny sposób rozwiązywały oba problemy.

Dla przypadku pierwszego najprostszym rozwiązaniem jest zastąpienie nieznanymi wartościami atrybutów ich wartościami oczekiwanymi. Przykładem takiego podejścia jest praca [Cavalcante i Almeida, 2007], gdzie atrybuty są wynikiem modelu stochastycznego, bezawaryjnego czasu pracy maszyn, a więc wartością oczekiwaną pewnej zmiennej losowej. Podejście takie ma jednak wiele wad, nie oddaje bowiem dobrze wpływu ryzyka na relacji przewyższania pomiędzy poszczególnymi obiektami, a tym samym preferencji decydenta. Jeżeli możliwe jest określenie dystrybuanty rozkładu atrybutów, znacznie lepszą metodą jest zastosowanie dominacji stochastycznych. Sposób włączenia relacji dominacji stochastycznej do analizy PROMETHEE zaproponowali Nowak [2005] oraz Górecka [2009]. Kolejną możliwością jest podejście symulacyjne, jakie można znaleźć np. w pracy [Hyde i in., 2003].

Niepewność związana z wagami dla kryteriów stanowi znacznie większy problem. Podstawowym założeniem metody PROMETHEE jest to, że decydent jest w stanie dokładnie i jednoznacznie określić swoje preferencje względem kryteriów za pomocą odpowiednich wag. Brans [1996] zauważa jednak, że decydent wykazuje znaczącą niechęć do ustalania jednej ich wartości. Znacznie łatwiej wyznaczyć mu przedział, w jakim mogą się wagi zmieniać. Takie podejście wymaga przeprowadzenia dodatkowej analizy wrażliwości. W tym celu rozwinięta została metoda GAIA, do wizualnego wsparcia decydenta przy podejmowaniu wyboru, oraz PROMETHEE VI, pozwalająca przeanalizować relacje pomiędzy kryteriami i obiektami oraz zakwalifikować dany problem decyzyjny jako „łatwy” lub „trudny” [Brans i Mareschal, 2005]. Innym sposobem radzenia sobie z tą kwestią jest zastosowanie liczb rozmytych do określenia wag albo zastosowanie symulacji stochastycznej. Sytuacja znacznie bardziej się komplikuje, jeżeli w badanym problemie występuje grupa decydentów, a nie pojedyncza osoba. Ciekawym rozwiązaniem tego problemu jest metoda wielokryterialnej stochastycznej analizy dopuszczalności (*stochastic multiobjective acceptability analysis*, SMAA) zaproponowana w [Lahdelma i in., 1998]. Metoda ta z pomocą programowania liniowego pozwala stworzyć „mapę” wag zapewniających zwycięstwo w rankingu poszczególnym obiektom. Połączenie tej techniki z metodą PROMETHEE można znaleźć w [Corrente i in., 2014].

## 2. Metodologia

Algorytm metody PROMETHEE, opracowany przez Bransa na początku lat 80. XX w. został bardzo dobrze opisany w wielu publikacjach zagranicznych, jak i polskojęzycznych, np. [Brans i Mareschal, 2005; Górecka, 2005; Trzaskalik (red.), 2014]. W zależności od autora, proces obliczeniowy jest rozbity na różną liczbę etapów, niektóre są czasem łączone, czasem wskazuje się je jako oddzielne etapy. W pracy tej wykorzystany został algorytm opisany w [Miszczyńska, 2002, s. 280-284], gdzie procedura jest rozbita na możliwie proste funkcje, dzięki czemu najłatwiej było ją zaimplementować.

### 2.1. Wykorzystanie R w obliczeniach do metody PROMETHEE

Do przeprowadzenia wszystkich potrzebnych obliczeń metody PROMETHEE II w R przygotowano łącznie 12 funkcji. Podstawowa funkcja *promethee* wywoływana jest przez użytkownika i zarządza całym procesem obliczeniowym. Pierwszy krok polega na porównaniu parami wszystkich obiektów względem wszystkich  $k$  kryteriów ( $m_i^k$  – ocena  $i$ -tego obiektu względem  $k$ -tego kryterium) i wyliczeniu wartości  $r_{ij}^k$  zgodnie ze wzorem (1)<sup>2</sup>:

$$r_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } m_i^k - m_j^k < 0 \\ m_i^k - m_j^k & \text{gdy } m_i^k - m_j^k \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Następnie, w zależności od wybranego uogólnionego kryterium, wyliczane są indywidualne indeksy preferencji  $H_{ij}^k$ . Listę uogólnionych kryteriów i sposób ich obliczenia przedstawia tabela 1.

W dalszej kolejności wyliczane są wielokryterialne indeksy preferencji  $\pi_{ij}$  zgodnie ze wzorem (2).

$$\pi_{ij} = \frac{\sum_k w_k H_{ij}^k}{\sum_k w_k}. \quad (2)$$

<sup>2</sup> W [Miszczyńska, 2002]  $r_{ij}^k$  nazywany jest funkcją preferencji. W pracy tej przyjęto nazewnictwo jak w [Górecka, 2014], dlatego jako funkcję preferencji rozumie się ogólną postać funkcji wyliczającą wartość indywidualnego indeksu preferencji dla poszczególnych kryteriów uogólnionych.

**Tabela 1.** Typy uogólnionych kryteriów i odpowiadające im funkcje preferencji

Nazwa kryterium	Funkcji preferencji	Parametry
Typ I: Kryterium zwykłe	$H_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } r_{ij}^k = 0 \\ 1 & \text{gdy } r_{ij}^k > 0 \end{cases}$	brak
Typ II: Quasi-kryterium	$H_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } r_{ij}^k \leq q_k \\ 1 & \text{gdy } r_{ij}^k > q_k \end{cases}$	$q_k$
Typ III: Kryterium z liniową preferencją	$H_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } r_{ij}^k \leq 0 \\ r_{ij}^k/p & \text{gdy } 0 < r_{ij}^k \leq p_k \\ 1 & \text{gdy } r_{ij}^k > p_k \end{cases}$	$p_k$
Typ IV: Kryterium poziomów	$H_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } r_{ij}^k \leq q_k \\ 1/2 & \text{gdy } q_k < r_{ij}^k \leq p_k \\ 1 & \text{gdy } r_{ij}^k > p_k \end{cases}$	$q_k, p_k$
Typ V: Pseudokryterium (liniowe z obszarem obojętności)	$H_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } r_{ij}^k \leq q_k \\ \frac{(r_{ij}^k - q_k)}{(p_k - q_k)} & \text{gdy } q_k < r_{ij}^k \leq p_k \\ 1 & \text{gdy } r_{ij}^k > p_k \end{cases}$	$q_k, p_k$
Typ VI: Kryterium gaussowskie	$H_{ij}^k = 1 - \exp\left(-\frac{(r_{ij}^k)^2}{2s^2}\right)$	$s_k$

Źródło: Na podstawie [Miszczyńska, 2002; Trzaskalik (red.), 2014].

Ostatnim krokiem jest wyliczenie przepływów dominacji: dodatnich (wyjścia)  $\varphi_i^+$ , ujemnych (wejścia)  $\varphi_i^-$  i netto  $\varphi_i$ , odpowiednio zgodnie z wzorami (3), (4) i (5). Ostateczny ranking uzyskuje się przez uszeregowanie malejąco obiektów ze względu na wartość przepływów dominacji netto.

$$\varphi_i^+ = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \pi_{ij}, \tag{3}$$

$$\varphi_i^- = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \pi_{ji}, \tag{4}$$

$$\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-. \tag{5}$$

Lista koniecznych atrybutów, które musi podać użytkownik do funkcji *promethee* to: macierz danych X zawierająca wartości kryteriów dla poszczególnych obiektów, wagi i rodzaje przyjętych kryteriów uogólnionych. Dzięki zastosowaniu wzoru (2) do wyliczenia wielokryterialnego indeksu preferencji użytkownik może podać dowolne dodatnie liczby rzeczywiste jako wagi, gdyż algorytm i tak dokona ich normalizacji.

Wartości parametrów  $p, q, s$  mogą być podane w dowolnej formie, jako liczby rzeczywiste bądź procent rozstępu wartości atrybutów dla danego kryterium. Jeżeli nie są podane, przyjmują wartości domyślne ( $q = 10\%$  rozstępu,  $p = 90\%$

rozstępu,  $s = SD$ , gdzie  $SD$  to odchylenie standardowe wartości atrybutów dla danego kryterium).

## 2.2. Założenia względem preferencji decydenta

Celem prezentowanego tu badania jest identyfikacja czynników wpływających na stabilność rankingu obiektów uzyskanego za pomocą metody PROMETHEE II. W tym celu autor przyjął, że decydent posiada jednoznacznie określone preferencje opisane za pomocą stałego zestawu wag dla wszystkich kryteriów, ale pod wpływem różnych czynników zewnętrznych w momencie analizy wagi te są zniekształcone zgodnie z równaniem:

$$w_i^* = w_i + \varepsilon_i, \quad (6)$$

gdzie:

$w_i^*$  – waga  $i$ -tego kryterium odzwierciedlająca preferencje decydenta w momencie badania,

$w_i$  – waga bazowa; waga  $i$ -tego kryterium odzwierciedlająca rzeczywiste, niezależne od czynników zewnętrznych preferencje decydenta,

$\varepsilon_i$  – składnik losowy zakłóceń oceny preferencji decydenta wynikających z czynników zewnętrznych o rozkładzie:  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i)$ .

Taki model kształtowania się preferencji uwzględnia wpływ nastroju decydenta, zewnętrznych warunków i innych czynników oddziałujących w momencie dokonywania analizy. Przykładem takich zmian może być stosunek konsumentów do picia zimnych napojów. Niezależnie od tego, czy dana osoba przepada za nimi czy nie, w ciepłe dni znacznie chętniej będzie po nie sięgać, niż w dni chłodne. W tym przypadku indywidualne preferencje względem picia zimnych napojów reprezentują wagi bazowe  $w_i$ , zaś składnik losowy  $\varepsilon_i$  – wpływ temperatury i zachowania osób towarzyszących.

## 2.3. Symulacja

Poszczególne eksperymenty symulacyjne polegały na wykonaniu porównania rankingu uzyskanego za pomocą metody PROMETHEE II dla niezakłóconych wag bazowych  $w$ , z rankingiem uzyskanym dla wag zakłóconych  $w^*$ . W każdym eksperymencie wykonywanych było 250 obliczeń dla 250 zestawów losowo zakłóconych wag, gdzie zakłócenia pochodziły z rozkładu  $\varepsilon \sim N(0; 0,25)$ . Następnie zwiększano wartość odchylenia standardowego dla zakłócenia  $\varepsilon_i$  o  $\Delta\sigma = 0,25$

i powtarzano obliczenia rankingów metody PROMETHEE dla kolejnych 250 nowych zestawów zaburzonych wag. Procedurę tę powtarzano aż do wartości odchylenia standardowego zakłócenia  $\varepsilon_i$  równego:  $\sigma = 2$ .

Wpływ zaburzenia wag na stabilność rankingów mierzona była za pomocą dwóch wskaźników:

- *ratio* – stosunku liczby iteracji, w których ranking nie uległ zmianie, do liczby wszystkich wykonanych iteracji dla ustalonych parametrów,
- *rho* – średniego współczynnika korelacji rang Spearmana pomiędzy rankingiem dla wag bazowych i rankingiem dla wag zakłóconych.

## 2.4. Macierze danych

W celu uniknięcia wpływu szczególnej struktury macierzy danych  $X$  na stabilność rankingów przygotowano 100 losowo wygenerowanych macierzy o wymiarach 5 obiektów na 6 kryteriów. Dla pierwszych 50 macierzy wartości atrybutów zostały wygenerowane z rozkładu normalnego  $N(20; 8)$ . Dla drugiej połowy macierzy, w celu większego zróżnicowania danych, macierze generowane były także z rozkładu normalnego, ale ze zmiennymi parametrami, zgodnie ze wzorem (7).

$$x_{ij} \sim N(m_{ij}, s_{ij}) \quad (7)$$

$$M = \begin{bmatrix} 30 & 25 & 20 & 16 & 21 & 26 \\ 29 & 24 & 19 & 17 & 22 & 27 \\ 28 & 23 & 18 & 18 & 23 & 28 \\ 27 & 22 & 17 & 19 & 24 & 29 \\ 26 & 21 & 16 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Elementy  $m_{ij}$  i  $s_{ij}$  to elementy macierzy  $M$  i  $S$  (8), przedstawiają odpowiednio wartości oczekiwane i odchylenia standardowe rozkładów, z których generowane były odpowiednie elementy macierzy danych  $X$ . Dzięki takiemu ułożeniu parametrów pierwsze dwa obiekty przeciętnie dominowały względem pierwszych kryteriów, zaś dwa ostatnie dominowały względem ostatnich kryteriów.

W celu uchwycenia wpływu struktury macierzy danych na stabilność metody PROMETHEE każda ze 100 wygenerowanych macierzy danych  $X_j$  scharakteryzowana została 13 wielkościami: minimalny, maksymalny i średni współczynnik korelacji pomiędzy obiektami ( $\min\_r_{ob}$ ,  $\max\_r_{ob}$ ,  $sr\_r_{ob}$ ), minimalny, maksymalny i średni współczynnik korelacji pomiędzy kryteriami ( $\min\_r_{kr}$ ,  $\max\_r_{kr}$ ,  $cor^3$ ),

<sup>3</sup> Inny, prostszy zapis oznaczenia dla średniego współczynnika korelacji pomiędzy kryteriami został zastosowany w celu zachowania przejrzystości zapisów w dalszej części artykułu. W przeciwieństwie do pozostałych wskaźników,  $cor$  okazał się istotny dla stabilności rankingów metody PROMETHEE II.

minimalna, maksymalna i średnia odległość euklidesowa pomiędzy obiektami ( $\min_{d_{ob}}$ ,  $\max_{d_{ob}}$ ,  $sr_{d_{ob}}$ ) oraz minimalna, maksymalna i średnia odległość euklidesowa pomiędzy kryteriami ( $\min_{d_{kr}}$ ,  $\max_{d_{kr}}$ ,  $sr_{d_{kr}}$ ). Dodatkowo, jako trzynasty wskaźnik, w nawiązaniu do modułu GAIA [Brans i Mareschal, 2005] sprawdzone zostało, czy i jaki wpływ na stabilność rankingów ma udział dwóch pierwszych głównych składowych macierzy  $X_j$ . W tym celu dla odpowiednich macierzy korelacji  $\Sigma_j$  obliczone zostały wszystkie jej wartości własne i udział procentowy dwóch największych z nich w sumie wszystkich wartości własnych dla tej macierzy korelacji ( $\% PCA_j$ ).

### 3. Wyniki

#### 3.1. Eksperyment 1

Pierwsze badanie polegało na sprawdzeniu, które z wybranych parametrów macierzy atrybutów mają wpływ na stabilność rankingów metody PROMETHEE II. W tym celu dla 100 wygenerowanych macierzy przeprowadzono symulację stabilności rankingów zgodnie z wyżej omówioną procedurą. Dla poszczególnych kryteriów przyjęto kolejne funkcje preferencji w kolejności od I do VI. Jako wagi bazowe przyjęto kolejne liczby całkowite od 1 do 6. Oznaczało to, że kryterium posiadające zwykłą funkcję preferencji miało najniższą wagę, zaś gaussowskie najwyższą wagę. Następnie sprawdzono, czy stabilność uzyskanych wyników jest zależna od któregoś z wymienionych 13 wskaźników struktury macierzy atrybutów. Zbadano to, mierząc wartość współczynnika korelacji Pearsona pomiędzy każdym z 13 wskaźników struktury macierzy atrybutów a oboma omówionymi w części 3.2 parametrami stabilności: *ratio* i *rho*. Wyniki tego eksperymentu dla wybranych wartości odchylenia standardowego zaburzenia wag przedstawia tabela 2.

Ze wszystkich 13 parametrów struktury macierzy atrybutów jedynie średni współczynnik korelacji pomiędzy kryteriami *cor* miał umiarkowany wpływ na stabilność wyników (odpowiednie współczynniki korelacji pomiędzy wskaźnikami dla  $\sigma = 2$  wynosiły:  $r_{ratio, cor} = 0,654$  i  $r_{rho, cor} = 0,637$ ).



**Tabela 2.** Współczynniki korelacji pomiędzy parametrami wynikowymi uzyskanymi dla eksperymentu 1 a charakterystykami macierzy danych

Parametry wynikowe symulacji			<i>rho</i>			<i>ratio</i>			
siła zakłócenia wag $\sigma$			0,25	1	2	0,25	1	2	
% PCA			-0,005	-0,050	-0,043	0,021	0,106	0,193	
charakterystyki macierzy danych	współczynnik korelacji	dla kryteriów	min	0,155	<b>0,266*</b>	<b>0,333*</b>	0,141	<b>0,284*</b>	<b>0,335*</b>
			max	0,181	<b>0,274*</b>	<b>0,352*</b>	0,168	<b>0,278*</b>	<b>0,336*</b>
			średnia	<b>0,292*</b>	<b>0,485*</b>	<b>0,637*</b>	<b>0,266*</b>	<b>0,564*</b>	<b>0,654*</b>
		dla obiektów	min	<b>0,200*</b>	0,152	0,133	0,184	0,139	0,123
			max	0,124	0,069	0,068	0,103	0,115	0,088
			średnia	0,077	0,076	0,107	0,070	0,090	0,106
	odległości euklidesowe	pomiędzy kryteriami	min	-0,024	0,018	0,009	0,006	0,013	-0,055
			max	0,194	0,172	0,194	0,169	0,136	0,166
			średnia	-0,037	0,037	0,035	-0,033	-0,018	-0,084
		pomiędzy obiektami	min	-0,129	-0,137	-0,160	-0,113	<b>-0,214*</b>	<b>-0,290*</b>
			max	0,002	-0,002	0,015	-0,016	-0,023	0,020
			średnia	-0,094	-0,100	-0,146	-0,084	-0,168	<b>-0,209*</b>

\* – współczynniki korelacji istotne statystycznie różniące się od zera dla poziomu istotności  $\alpha \leq 5\%$

### 3.2. Eksperyment 2

Eksperyment 2 miał na celu sprawdzenie, czy przyjęty wcześniej układ wag i uogólnionych kryteriów mógł znacząco wpłynąć na uzyskane wyniki. W tym celu powtórzono całą procedurę, z tą różnicą, że odwrócono wartości wag bazowych dla poszczególnych kryteriów. Oznaczało to, że zwykłe kryterium uogólnione z wagą 6 było teraz najistotniejsze dla rankingów, zaś gaussowskie kryterium uogólnione z wagą 1 było najmniej istotne. Stabilność uzyskanych rankingów w eksperymencie 2 przedstawia tabela 3.

**Tabela 3.** Współczynniki korelacji pomiędzy parametrami wynikowymi uzyskanymi dla eksperymentu 2 a charakterystykami macierzy danych

Parametr			<i>rho</i>			<i>ratio</i>			
siła zakłócenia wag $\sigma$			0,25	1	2	0,25	1	2	
% PCA			-0,124	-0,124	-0,105	-0,113	-0,113	-0,001	
Charakterystyki macierzy danych	współczynnik korelacji	dla kryteriów	min	0,194	<b>0,238*</b>	<b>0,293*</b>	<b>0,213*</b>	<b>0,254*</b>	<b>0,3228</b>
			max	0,083	0,181	<b>0,291*</b>	0,075	0,138	<b>0,268*</b>
			średnia	<b>0,238*</b>	<b>0,359*</b>	<b>0,518*</b>	<b>0,253*</b>	<b>0,402*</b>	<b>0,539*</b>
		dla obiektów	min	0,011	-0,001	0,096	0,046	0,050	0,056
			max	-0,070	0,046	0,051	-0,114	0,033	0,057
			średnia	0,022	0,093	0,168	-0,031	0,089	0,127
	odległości euklidesowe	pomiędzy kryteriami	min	0,051	0,002	0,011	0,112	0,058	-0,016
			max	0,003	0,067	0,122	-0,069	-0,003	0,092
			średnia	0,067	0,019	0,025	0,143	0,073	-0,043
		pomiędzy obiektami	min	-0,033	-0,150	-0,153	-0,070	-0,096	-0,075
			max	-0,036	0,042	0,021	-0,092	-0,052	-0,049
			średnia	-0,064	-0,180	-0,157	-0,021	-0,076	-0,100

\* – Współczynniki korelacji istotne statystycznie różniące się od zera dla poziomu istotności  $\alpha \leq 5\%$

Podobnie jak w eksperymencie 1, jedynie średni współczynnik korelacji pomiędzy kryteriami *cor* okazał się wpływać na stabilność wyników. W tym przypadku obliczone współczynniki korelacji pomiędzy *cor* a parametrami *ratio* i *rho* (dla  $\sigma = 2$   $r_{ratio, cor} = 0,539$  i  $r_{rho, cor} = 0,518$ ) były jednak niższe. Za pomocą testu sparowanych rang Wilcozona<sup>4</sup> sprawdzono, że różnica ta była istotna statystycznie na poziomie istotności  $\alpha < 1\%$ .

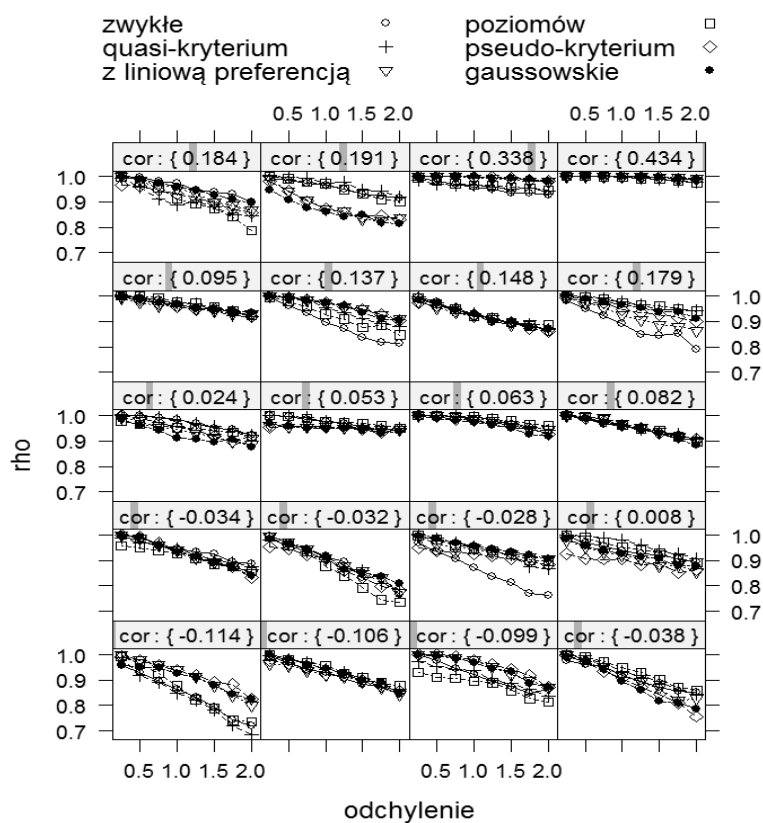
### 3.3. Eksperyment 3

Wyniki eksperymentu 2 wskazują, że dobór kryteriów może mieć kluczowe znaczenie dla stabilności uzyskanego rankingu. W celu sprawdzenia, które z uogólnionych kryteriów gwarantują największą stabilność wyników metody

<sup>4</sup> Testu t-Studenta dla prób sparowanych nie mógł być wykorzystany z powodu odrzucenia hipotezy o rozkładzie normalnym uzyskanych w eksperymentach parametrów stabilności rankingów *ratio* i *rho*. Test sparowanych rang Wilcozona został wykonany za pomocą funkcji `wilcox.test(..., paired=TRUE)`.

PROMETHEE II, przeprowadzono 6 nowych symulacji. W każdej z nich ustalany był tylko jeden rodzaj uogólnionego kryterium, za każdym razem inny. Wektor wag bazowych ustalony był jako wektor kolejnych liczb naturalnych od 1 do 6. W celu lepszej prezentacji danych symulacja nie była przeprowadzana dla wszystkich 100 przygotowanych macierzy danych  $X_i$ , a jedynie wybranych 20 z nich. Uzyskane wyniki stabilności rankingów mierzone za pomocą parametru  $\rho$ , w zależności od siły zaburzenia wag bazowych, dla wszystkich 20 macierzy danych przedstawia rys. 1.

Stosunkowo wysoka wartość współczynnika korelacji pomiędzy  $\rho$  a  $\text{cor}$ , uzyskana w eksperymentach 1 i 2 sugerowałaby, że im bardziej skorelowane ze sobą są kryteria, tym stabilniejsze powinny okazać się rankingi. Na rys. 1 można zaobserwować taką tendencję, jednakże występują od niej istotne wyjątki, jak np. macierze o  $\text{cor} = 0,053$  i  $\text{cor} = 0,063$ .



Rys. 1. Zmiany wartości współczynnika stabilności  $\rho$  w zależności od siły zaburzenia wag ( $\text{cor}$  – średni współczynnik korelacji pomiędzy kryteriami)

Trudno też zidentyfikować jakąkolwiek zależność pomiędzy wybranym typem kryterium uogólnionego a stabilnością uzyskanego rankingu. Dla poszczególnych macierzy, jak np. z:  $cor = -0,028$  oraz  $cor = 0,179$  wyraźnie widać, że wyniki uzyskane dla wariantu ze zwykłym uogólnionym kryterium wykazują zmniejszoną stabilność rankingu. Tendencja taka jest jednak sporadyczna i obejmuje jedynie pojedyncze macierze. Potwierdzeniem braku zależności pomiędzy wyborem kryterium uogólnionego a stabilnością rankingu jest wynik przeprowadzonej analizy ANOVA<sup>5</sup>. Wykazała ona, że średnie wartości współczynników *rho* nie różniły się pomiędzy symulacjami dla różnych kryteriów uogólnionych ( $p$ -value = 0,983).

### Podsumowanie

Ustalanie wag dla kryteriów przez decydenta jest jednym z najmniej precyzyjnych elementów metody PROMETHEE. Założenie o możliwości decydenta do określenia swoich preferencji w postaci dokładnych wartości wag jest bardzo trudne do spełnienia, a niepewność w tym zakresie może mieć znaczący wpływ na ostateczny ranking. Wpływ ten nie będzie jednakże taki sam dla każdego badanego problemu. To, jak silnie ranking jest wrażliwy na losowe zmiany nastroju, zależy od struktury macierzy atrybutów porównywanych obiektów. Jak wykazały przeprowadzone symulacje, stabilność rankingu nie zależy jednak od wybranych do porównania obiektów, a od siły i kierunku skorelowania kryteriów. Jest to sygnał do tego, aby unikać dodawania mało istotnych kryteriów. Po pierwsze, im większa liczba kryteriów, tym trudniej decydentowi jednoznacznie określić wartości wag dla nich [Brans i Mareschal, 2005], a więc zaburzenia wag w zaproponowanym tu modelu będą większe. Przy tym w przypadku ujemnego skorelowania dodatkowego kryterium z pozostałymi ranking będzie dużo bardziej wrażliwy na wahania wag.

Wyniki badań ujawniły dodatkowo, jak istotne jest przeprowadzenie odpowiedniej analizy wrażliwości. Specyficzne właściwości struktury macierzy danych, które sprawiają, że dany problem jest wrażliwy na wahania wag bądź nie jest trudny do uchwycenia jedynie tak prostym wskaźnikiem jak średni współczynnik korelacji pomiędzy kryteriami jest niewystarczający.

---

<sup>5</sup> Analizę przeprowadzono za pomocą funkcji *aov()* dla modelu *rho*-kryterium.

## Literatura

- Brans J.P. (1996), *The space of freedom of the decision maker. Modelling the human brain*, „European Journal of Operational Research”.
- Brans J.P., Mareschal B. (2005), *PROMETHEE methods* [w:] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer, New York.
- Cavalcante C.A.V., de Almeida A.T. (2007), *A multi-criteria decision-aiding model using PROMETHEE III for preventive maintenance planning under uncertain conditions*, „Journal of Quality in Maintenance Engineering”, Vol. 13.
- Corrente S., Figueira J.R., Greco S. (2014), *The SMAA-PROMETHEE method*, „European Journal of Operational Research”, Vol. 239(2).
- Durbach I., Stewart T. (2012), *Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis*, „European Journal of Operational Research”, Vol. 223.
- Górecka D. (2009), *Wielokryterialne wspomaganie wyboru projektów europejskich*, TNOiK „Dom Organizatora”, Toruń.
- Hyde K., Maier H.R., Colby C. (2003), *Incorporating Uncertainty in the PROMETHEE MCDA Method*, „Journal of Multi-Criteria Decision Analysis”, Vol. 12.
- Lahdelma R., Hokannen J., Salminen P. (1998), *SMAA – Stochastic multiobjective acceptability analysis*, „European Journal of Operational Research”, Vol. 106.
- Miszczyńska D. (2002), *Wielokryteriowy ranking Otwartych Funduszy Emerytalnych* [w:] Trzaskalik T. (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '01*, AE w Katowicach, Katowice.
- Nowak M. (2005), *Investment Project Evaluation by Simulation and Multiple Criteria Decision Aiding Procedure*, „Journal of Civil Engineering and Management”, Vol. 11.
- R Core Team (2013), *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, <http://www.R-project.org/>.
- Trzaskalik T (red.) (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Metody i zastosowania*, PWE, Warszawa.

### SIMULATION ANALYSIS OF STABILITY OF PROMETHEE RESULTS UNDER UNCERTAINTY UTILIZING R

**Summary:** The way how decision-maker's preferences are described is the one of most important source of uncertainty in PROMETHEE method. In this paper analyzed how random disruption of weights influence on stability of complete ranking. Stochastic simulation was used. Computations was made in R. The results shows dependency between stability and structure of evaluation matrix. If criteria was more correlated each other, stability was higher. Moreover, there was no statistical evidence on dependency between stability and correlation of objects.

**Keywords:** PROMETHEE, simulation, uncertain, R.