



## Piotr Peternek

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów  
Katedra Badań Operacyjnych  
piotr.peternek@ue.wroc.pl

# KONSTRUKCJA WIELOWYMIAROWYCH KART KONTROLNYCH INDYWIDUALNYCH POMIARÓW Z WYKORZYSTANIEM SZTUCZNYCH SIECI NEURONOWYCH

**Streszczenie:** Klasyczne metody statystycznego sterowania procesem wykorzystują założenie o rozkładzie normalnym badanej cechy. W sytuacji, gdy warunek ten nie jest spełniony, wykorzystuje się odpowiednie transformacje lub korzysta się ze specyficznych, odpornych na rodzaj rozkładu metod. W pracy przedstawiona zostanie próba wykorzystania sztucznych sieci neuronowych do konstrukcji wielowymiarowych kart kontrolnych. Przeprowadzone zostaną symulacje dla rozkładu normalnego i chi-kwadrat.

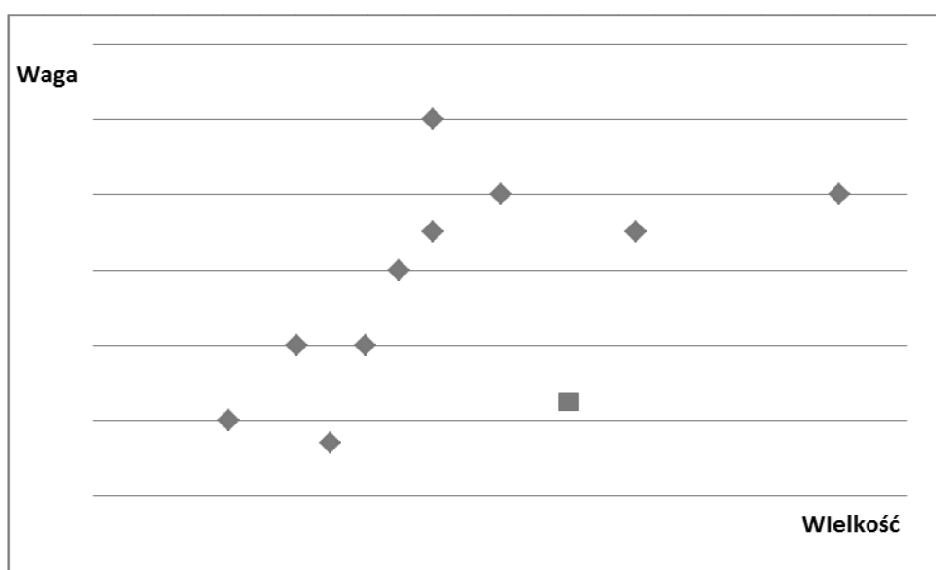
**Słowa kluczowe:** karty kontrolne, sztuczne sieci neuronowe, karta Hotellinga.

## Wprowadzenie

W problematyce statystycznego sterowania procesem powszechnie obowiązujące jest założenie o rozkładzie normalnym badanej cechy. W praktyce założenie takie często bywa niespełnione. Jednakże, jak wykazali E. Schilling i P. Nelson [1976], wystarczy, że pobiera się próby 4-elementowe, by zapewnić rozkład normalny badanych cech. Zupełnie inaczej wygląda sytuacja, gdy pobiera się dane indywidualne, a zatem próbki są jednoelementowe. W takiej sytuacji, gdy spełnione jest założenie o rozkładzie normalnym cechy, zwykle stosuje się znaną kartę IX-MR, czyli kartę, w której wykorzystuje się tzw. ruchomy rozstęp [zob. np. Montgomery, 2007]. Gdy jednak założenie o rozkładzie normalnym cechy nie jest spełnione, wtedy poszukuje się alternatywnych rozwiązań wykorzystujących bądź to przekształcenia danych, bądź też dopasowania rozkładów. Interesu-

jące wyniki uzyskuje się, korzystając z uogólnionego rozkładu lambda [Kanji i Arif, 2000; Peternek, 2013], czy też wykorzystując krzywe Johnsona [Johnson, 1947; Slifker i Shapiro, 1980; Peternek, 2014].

Nieco odmiennie wygląda sytuacja, gdy rozpatruje się wiele zmiennych wzajemnie od siebie zależnych. Dla dwóch zmiennych można stosować kartę regresyjną, kiedy jednak liczba zmiennych wzrasta, korzysta się ze specjalnie skonstruowanych do tego celu kart kontrolnych, takich jak np. karta  $T^2$  Hotellinga [Tracy i in., 1992; Montgomery, 2007]. Należy tu zwrócić szczególną uwagę, że dla zmiennych zależnych nie powinno stosować się odrębnych, indywidualnych kart dla każdej zmiennej. Może bowiem dochodzić do sytuacji, w której rozpatrywane na osobnych kartach kontrolnych badane cechy nie wykażą rozregulowania, gdy tymczasem w rzeczywistości takie rozregulowanie występuje. Wystarczy dla prostego przykładu rozpatrywać dwie cechy, takie jak np. waga oraz wielkość (por. rys. 1). Nietrudno zauważyć, że gdyby zaznaczony kwadratem na rys. 1 punkt rozpatrywać osobno względem każdej z dwóch cech, czyli w rzutach na obie osie, nie stanowiłby on diametralnie różnego od pozostałych punktu. Jeżeli jednak przedstawimy go w układzie dwuwymiarowym, to wyraźnie widać, że dla takiej dużej wielkości na osi odciętych wartość na osi rzędnych nie powinna być tak mała. Odnosząc się do przykładowych cech, jakimi były waga i wielkość, należy zauważyć, że dla tak dużej wartości wielkości waga nie powinna być tak mała.



Rys. 1. Dwie cechy przedstawione w układzie dwuwymiarowym

Korzystanie ze specjalizowanych kart wielowymiarowych dla cech wzajemnie zależnych wydaje się zatem obowiązkowe. Oprócz wspomnianej wcześniej karty  $T^2$  Hotellinga, do najczęściej wykorzystywanych należą także karty MCUSUM czy MEWMA. Literatura przedmiotu wskazuje również na możliwość zastosowania metody głównych składowych [zob. np. Bersimis i in., 2006]. Metoda głównych składowych traktowana tu jest jako metoda transformacji danych, albowiem w wyniku wyodrębnienia głównych składowych uzyskuje się nieskorelowane cechy, z których każdą można analizować na odrębnej, klasycznej karcie kontrolnej. Szczegółowy przegląd różnych kart wielowymiarowych znaleźć można np. w [Bersimis i in., 2006].

Stosowanie wyżej wymienionych kart wielowymiarowych obwarowane jest jednak stałymi założeniami, do których należy normalność rozkładu badanej cechy oraz liniowość zależności. Przy braku spełnienia tych założeń możliwości aplikacyjne są dość skromne [np. Bersimis i in., 2006]. Na szczególne uwzględnienie zasługują tu prace [Liu, 1995] czy [Liu i in., 2004], wykorzystujące koncepcję głębi danych. Literatura przedmiotu wskazuje także na możliwość zastosowania sztucznych sieci neuronowych do konstrukcji kart kontrolnych. Zorriassatine i Tannock [1998], odnosząc się do kart jednowymiarowych, wyróżniają dwie grupy zastosowań sieci neuronowych. Pierwsza z nich dotyczy wykrywania zmian w strukturze (średnia, wariancja) [np.: Pugh, 1991; Cheng, 1995] druga odnosi się do rozpoznawania odpowiednich wzorców [zob. np. Hwarng i Hybele, 1993]. Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do kart wielowymiarowych również jest przedmiotem zainteresowań badaczy [np. Martin i Morris, 1995; Wilson i in., 1997], lecz liczba prac dotyczących kart wielowymiarowych jest znacznie skromniejsza niż ta dotycząca kart jednowymiarowych. Jako że literatura ogranicza się w znacznym stopniu do kart jednowymiarowych, to właśnie możliwością zastosowania sztucznych sieci neuronowych do konstrukcji wielowymiarowych kart kontrolnych indywidualnych pomiarów poświęcona jest ta praca.

W pracy omówiona zostanie klasyczna karta  $T^2$  Hotellinga, a następnie przedstawione zostaną techniki wykorzystujące sztuczne sieci neuronowe do konstrukcji kart wielowymiarowych. Przedstawione propozycje zostaną zweryfikowane za pomocą symulacji, a wyniki porównane do klasycznie stosowanej karty Hotellinga.

## 1. Karta $T^2$ Hotellinga do indywidualnych pomiarów

Karta  $T^2$  Hotellinga jest prawdopodobnie najpopularniejszą wielowymiarową kartą kontrolną. Idea tej karty została przedstawiona przez Hotellinga już w 1947 r. Jest ona uogólnieniem klasycznej karty kontrolnej jednowymiarowej

i należy ją rozumieć jako odległość od środka wielowymiarowego rozkładu normalnego. Wymaga ona zatem założenia o wielowymiarowym rozkładzie normalnym badanych cech i w konsekwencji założenia o liniowej zależności pomiędzy cechami. Dla indywidualnych pomiarów statystyka Hotellinga przyjmuje postać:

$$T^2(i) = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad (1)$$

gdzie:

$\bar{\mathbf{x}}$  – wektor średnich wartości cech uregulowanego procesu,

$\mathbf{S}$  – próbkowa macierz kowariancji cech uregulowanego procesu.

Warto zauważyć, że przy korzystaniu z tej karty kontrolnej występują dwie fazy. Pierwsza, w której granice kontrolne wyznacza się zgodnie z wzorem [zob. np. Montgomery, 2007]:

$$GLK = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}, \quad (2)$$

$$DLK = 0$$

gdzie:

$\beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$  – kwantyl rzędu  $\alpha$  rozkładu beta,

$p$  – liczba cech,

$m$  – liczba próbek.

W fazie pierwszej, zwanej także retrospektywną, bada się stabilność dotychczasowego procesu. Jeżeli proces jest uregulowany, ustala się wartość wektorów  $\mathbf{S}$  oraz  $\bar{\mathbf{x}}$  i przechodzi się do fazy drugiej (zwanej prospektywną), w której na bieżąco monitoruje się proces. Gdyby w fazie pierwszej pojawiły się sygnały rozregulowania, wtedy parametry procesu  $\mathbf{S}$  oraz  $\bar{\mathbf{x}}$  wylicza się z pominięciem obserwacji rozregulowanych. W fazie II granice kontrolne wyznacza się zgodnie z wzorem:

$$GLK = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, (m-p)}, \quad (3)$$

$$DLK = 0$$

gdzie:

$p$  – liczba cech,

$m$  – liczba próbek,

$F_{\alpha, p, (m-p)}$  – kwantyl rzędu  $\alpha$  rozkładu F.

## 2. Wykorzystanie sztucznych sieci neuronowych – propozycje

Postulowane w literaturze [zob. np. Bersimis i in., 2006] wykorzystanie do konstrukcji kart kontrolnych sieci neuronowych nie jest jednoznaczne. Możliwości i zastosowania sztucznych sieci neuronowych umożliwiają ich wykorzystanie przynajmniej na kilka sposobów. Biorąc pod uwagę, że konstrukcja kart kontrolnych to w zasadzie klasyfikacja wartości cech na kilka (zwykle 3) grup, z których dwie stanowią informacje o rozregulowaniu, można by wykorzystać sztuczną sieć neuronową do takiej właśnie klasyfikacji. Zauważmy jednak, że przy klasycznym sposobie postępowania sieć musi „nauczyć się” odpowiedniej klasyfikacji na podstawie danych uczących. Trudno o taką sytuację w przypadku wielowymiarowych danych dotyczących cech. Trzeba by bowiem wiedzieć, które wartości cech i w jakiej konfiguracji świadczą o rozregulowaniu, a dodatkowo takich obserwacji musiałaby być znacząca liczba. Niesie to ze sobą dwa problemy: po pierwsze, tak naprawdę na tym etapie nie jest wiadomo, które obserwacje należy traktować jako odstające, a po drugie, stoi to w sprzeczności z ideą postępowania przy konstrukcji kart kontrolnych, w której to domyślnie zakłada się uregulowanie procesu, na podstawie którego ustala się granice kontrolne. A zatem konstrukcja kart kontrolnych z wykorzystaniem klasyfikacji za pomocą sztucznej sieci neuronowej przy wykorzystaniu sieci z nauczycielem nie jest możliwa ze względu na brak wystarczającej liczby danych. Wydaje się zatem, że można by dokonać takiej klasyfikacji przy użyciu sieci bez nauczyciela, czyli tzw. samoorganizujących się map cech zwanych sieciami Kohonena. Taka próba została podjęta, niestety, wyniki były absolutnie niezadowolające. Sieć Kohonena klasyfikowała cechy na bardzo liczne klasy (niektóre klasyfikacje były względnie równoliczne), a uprzedzając przedstawione w kolejnym podrozdziale symulacje należy powiedzieć, że podział powinien być taki, aby w skrajnych klasach znalazło się ok. 0,3% obserwacji. Taki wymóg nie został spełniony ani razu w trakcie przeprowadzania symulacji, a zatem wykorzystanie samoorganizujących się map cech do konstrukcji kart kontrolnych w tym przypadku jest bezzasadne.

Pozostał zatem jedyny sposób wykorzystania sztucznej sieci neuronowej do konstrukcji kart kontrolnych, tzn. konstrukcja modelu regresyjnego. W takiej sytuacji pojawiają się dwa problemy. Po pierwsze, należy określić, co ma stanowić zmienne objaśniane, a co objaśniające, a po drugie, co ma stanowić sygnał rozregulowania.

Pierwszy problem jest stosunkowo prosty do rozwiązania, albowiem jeżeli rzeczywiście pomiędzy badanymi cechami występuje jakaś zależność, to zasadniczo nie ma znaczenia, która z cech stanie się w tym przypadku objaśnianą –

wybór jest tu raczej dowolny, ważne tylko, aby między cechami występowała jakaś relacja. Znacznie większym problemem jest, jak się wydaje, określenie sygnału rozregulowania. Mając bowiem ustaloną (za pomocą sieci) relację (model) pomiędzy zmienną objaśnianą stanowiącą jedną z cech a pozostałymi cechami, możemy za pomocą tego modelu oszacować wartość teoretyczną tejże cechy na podstawie empirycznych wartości pozostałych cech. Możliwe jest zatem porównanie wartości teoretycznej, wynikającej z modelu regresyjnego odwzorowanego przez sztuczną sieć neuronową, z rzeczywistą wartością empiryczną. Jeżeli zatem ta wartość teoretyczna znacząco różni się od wartości obserwowanej, oznacza to, że zależność między cechami nie jest spełniona (gdyby była, odzwierciedlone byłoby to w modelu uzyskanym za pomocą sztucznej sieci neuronowej), zatem sygnałem rozregulowania byłaby zbyt duża, co do wartości bezwzględnej, wartość reszty modelu. Pojęcie „zbyt duża” nie jest jednak zbyt precyzyjne i wymaga doprecyzowania. Zdecydowano się tu na trzy alternatywne podejścia:

- Podejście tradycyjne – wykorzystuje klasyczne rozumienie kart kontrolnych i umieszczenie granic kontrolnych w tzw. przedziale 3-sigmowym, czyli w granicach trzech odchyłeń standardowych. Przy stosowaniu tego podejścia należy obliczyć odchylenie standardowe reszt, a następnie należy skonstruować 3-sigmowy przedział  $(\bar{e} - 3s_e; \bar{e} + 3s_e)$ . Jeżeli któraś z obserwacji (reszt) znajduje się poza tym przedziałem, oznacza to, że obserwacja ta jest rozregulowana, czyli jest poza kontrolą statystyczną. Wadą stosowania takiego podejścia jest nieznan rozkład reszt. Gdyby wiadomo było, że rozkład reszt jest normalny, wtedy takie postępowanie byłoby jak najbardziej słuszne i poprawne. Jeżeli jednak rozkład reszt jest nieznan, to takie postępowanie musi budzić liczne wątpliwości.
- Podejście ARL (*average run length*) – taki sposób wyznaczania granic kontrolnych jest dość powszechny w statystycznej kontroli jakości. Wyznaczanie granic kontrolnych na podstawie średniej długości serii (ARL) polega na tym, że przeprowadza się szereg symulacji, wykorzystując uregulowane dane, na podstawie których wyznacza się granice kontrolne w takim miejscu, aby liczba sygnałów o rozregulowaniu odpowiadała założonym z góry wartościom, zwykle np. trzy razy na 1000 obserwacji. Granice kontrolne są zatem wyznaczane w sposób empiryczny.
- Podejście z transformacją – w tym sposobie postępowania uzyskane reszty poddane zostaną transformacji w taki sposób, aby uzyskać standaryzowany rozkład normalny. Dla tak transformowanych reszt wyznaczenie granic kontrolnych jest oczywiste – wyznaczyć je można w tradycyjnym miejscu, czyli

w wartościach -3 i 3. Pewną wątpliwość może budzić rodzaj transformacji mający zapewnić rozkład normalny. W artykule zdecydowano się na skorzystanie z krzywych Johnsona. Do estymacji krzywych Johnsona wybrano zmodyfikowaną procedurę przedstawioną przez Slifkera i Shapiro [1980], a zaproponowaną w [Peternek, 2014].

### 3. Opis i wyniki przeprowadzonych symulacji

W celu weryfikacji przedstawionych w poprzedniej części podejść przeprowadzono symulacje. W tym celu zdecydowano się na rozpatrywanie trzech powiązanych ze sobą cech, dla których pobierano po 1000 obserwacji. Dane do próbek generowane były z dwóch arbitralnie wybranych rodzajów rozkładów, tzn. z rozkładu normalnego  $N(20; 3)$  oraz z rozkładu chi-kwadrat (10). Wygenerowane dane stanowiły pierwszą zmienną, a dodatkowe cztery zmienne uzyskano w wyniku przekształceń. Przekształcenia te były tak dobrane, że dwie dodatkowe zmienne były zależne liniowo od wygenerowanej zmiennej, a pozostałe dwie nieliniowo. Do wygenerowania dodatkowych cech wykorzystano przekształcenie logarytmiczne, potęgowe i liniowe postaci:

– dla przekształceń liniowych:

$$\begin{aligned} X_2^L &= X_1 \cdot \rho + \varepsilon \\ X_3^L &= (X_1 \cdot \rho + \varepsilon) \cdot \rho + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (4)$$

– dla przekształceń nieliniowych:

$$\begin{aligned} X_2 &= 0,0001 \cdot 2^{X_1 + \varepsilon} \\ X_3 &= 0,001 \cdot \frac{\exp(X_1 + \varepsilon)}{X_1 + \varepsilon} \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$X_1$  – wygenerowana z zadanego rozkładu zmienna,

$\varepsilon \sim N(0; 1)$ ,

$\rho$  – stała wynosząca 0,8.

Po przeprowadzonej transformacji i wygenerowaniu dodatkowych zmiennych przeprowadzono analizę zależności. Współczynniki korelacji dla liniowych zależności pomiędzy generowanymi zmiennymi przekraczały wartość 0,8, a dla zależności nieliniowych nie przekraczały 0,4 (przy tym większość była mniejsza niż 0,25). Dodatkowo dla zmiennych zależnych nieliniowo od wygenerowanej

zmiennej skonstruowano adekwatne modele nieliniowe jednej zmiennej (potęgowe i logarytmiczne), a dopasowanie tych modeli liczone współczynnikiem determinacji przekraczało 80%.

Dla tak uzyskanych zmiennych dokonano porównania wyników uzyskanych za pomocą karty  $T^2$  Hotellinga oraz kart wykorzystujących sztuczne sieci neuronowe. Przeprowadzono ok. 60 symulacji, w pracy prezentowane są wyniki dla 20. Należy tu zaznaczyć, że sztuczne sieci neuronowe uzyskiwane były w pakiecie Statistica. W sposób automatyczny generowano po 20 sieci, a wybierano tę, dla której jakość dopasowania danych walidacyjnych była jak największa. Jako funkcję błędu wybrano sumę kwadratów różnic, natomiast liczba neuronów ukrytych nie przekraczała 9. Dla każdej wybranej sieci obliczono reszty z modelu, przy czym analiza reszt dokonywała była na 1000 elementów, a zatem zarówno na próbie uczącej, walidacyjnej, jak i testowej. Dla potrzeb ustalenia granic kontrolnych w podejściu ARL wzięto pod uwagę po 5000 obserwacji dla każdego rozkładu i każdej zależności (liniowa i nieliniowa) z osobna. Przyjęto prawdopodobieństwo uzyskania fałszywego sygnału na poziomie 0,0027 (tak jak w klasycznym podejściu), co oznaczało 13 błędnych sygnałów na 5000 prób. Przy takim podejściu za sygnał rozregulowania uznawano wartość reszty, która była większa/mniejsza niż średnie  $\pm k$  odchylenia standardowe reszt, gdzie dla rozkładu normalnego i danych zależnych nieliniowo:  $k = 4,4$ , a dla zależnych liniowo  $k = 2,87$ . W przypadku rozkładu chi-kwadrat parametry  $k$  wynosiły:  $k = 3,6$  dla nieliniowych zależności oraz  $k = 3,1$  dla relacji liniowych.

Wyniki przeprowadzonych symulacji prezentują tabele 1 i 2. Zamieszczono w nich liczbę sygnałów o rozregulowaniu. Przypomnijmy tu, że w każdym doświadczeniu znajdowało się 1000 obserwacji, a jako że generowane dane nie były rozregulowane, należałoby się spodziewać (przyjmując klasyczny poziom błędu  $\alpha = 0,0027$ ) nie więcej niż 3 sygnałów rozregulowania dla danego doświadczenia.

**Tabela 1.** Wyniki symulacji dla danych pochodzących z rozkładu normalnego

Normalny	Liniowa					Nieliniowe				
	0	1	1	0	0	11	9	14	6	15
Hotelling	0	1	1	0	0	11	9	14	6	15
Podejście tradycyjne	2	0	4	1	2	11	5	12	7	14
Podejście ARL	5	0	4	2	2	2	1	1	1	8
Podejście z transformacją	12	3	4	0	5	6	5	12	6	9



**Tabela 2.** Wyniki symulacji dla danych pochodzących z rozkładu chi-kwadrat

Chi-kwadrat	Liniowa					Nieliniowe				
Hotelling	3	1	1	1	0	3	9	5	4	5
Podejście tradycyjne	2	4	3	5	3	8	2	3	1	7
Podejście ARL	0	4	2	4	3	5	0	0	1	7
Podejście z transformacją	4	7	1	3	17	6	3	10	6	8

Jak można zauważyć w tabeli 1 i 2, zgodnie z oczekiwaniami karta  $T^2$  Hotellinga daje dobre rezultaty w sytuacji, kiedy pomiędzy cechami występują zależności liniowe. Jest przy tym dość odporna na zmianę rodzaju rozkładu. Jednakże w sytuacji, gdy pomiędzy cechami występują zależności nieliniowe, wyniki uzyskiwane z karty Hotellinga są znacząco gorsze. W przypadku, gdy rozpatrywane były cechy pochodzące z rozkładu normalnego, najlepsze wyniki dla sytuacji, w której występowały zależności nieliniowe, uzyskano dla karty kontrolnej skonstruowanej za pomocą sztucznej sieci neuronowej wykorzystującej transformację reszt do rozkładu normalnego. W przypadku analizy danych pochodzących z rozkładu chi-kwadrat lepsze wyniki uzyskano dla kart kontrolnych wykorzystujących sztuczne sieci neuronowe i przedział 3-sigmowy (podejście tradycyjne). Trzeba przy tym zauważyć, że pominięto w tej analizie karty wykorzystujące ARL, ponieważ karty te, w niejako sztuczny sposób, gwarantują małą liczbę sygnałów o rozregulowaniu, bo dla każdego pięciu doświadczeń liczba takich sygnałów nie może przekraczać 13.

Przeprowadzając analizy wyników symulacji należy także zauważyć, że dla różnych wygenerowanych kart kontrolnych dla danego zestawu cech jako sygnały rozregulowania uznawane były różne obserwacje, co oznacza, że zbiory obserwacji rozregulowanych dla różnych kart kontrolnych, lecz tych samych danych, pokrywały się tylko w niewielkim stopniu.

Mimo niesatysfakcjonujących, choć niedyskwalifikujących, wyników przeprowadzonych doświadczeń wydaje się, że przy braku możliwości zastosowania karty  $T^2$  Hotellinga można korzystać z proponowanych kart kontrolnych wykorzystujących sztuczne sieci neuronowe. Nie można zarekomendować wyboru dokładnie jednej karty kontrolnej, gdyż z przeprowadzonych symulacji nie wynika jednoznaczna przewaga jednej karty nad pozostałymi. Należy przeprowadzić dalsze badania, aby zweryfikować jakość prezentowanych kart kontrolnych. Tymczasem można zaproponować wstępne procedury konstrukcji i korzystania z takich kart. Wydaje się, że procedura taka powinna mieć następującą postać:

- konstruuje się sztuczną sieć neuronową, uzależniając jedną z rozpatrywanych cech od pozostałych,

- jeżeli sieć będzie słabo dopasowana, może to oznaczać, że między cechami brak jest zależności i każdą z rozpatrywanych cech należy analizować oddzielnie za pomocą indywidualnych kart kontrolnych,
- jeżeli sieć będzie dostatecznie dobrze dopasowana, należy wyliczyć reszty z takiego modelu,
- dla podejścia z krzywymi Johnsona:
  - rozpatrywane reszty należy transformować za pomocą krzywych Johnsona do rozkładu normalnego,
  - uzyskaną w punkcie wcześniejszym krzywą Johnsona oraz wygenerowaną sieć wykorzystuje się do prognozowania wartości cechy dla kolejnych obserwacji, wyliczenia reszty oraz transformowania jej do rozkładu normalnego,
  - gdy po transformacji wartość reszty znajduje się poza przedziałem  $(-3; 3)$ , świadczy to o rozregulowaniu,
- dla podejścia tradycyjnego:
  - na podstawie wyliczonych reszt oblicza się odchylenie standardowe reszt,
  - za pomocą wygenerowanej wcześniej sieci wylicza się prognozowaną wartość cechy oraz resztę,
  - w przypadku, gdy reszta znajduje się poza przedziałem wyznaczonym przez  $k$  odchylenia standardowe reszt, świadczy to o rozregulowaniu.

Dla ilustracji i weryfikacji przedstawionej wyżej procedury wygenerowano dane z rozkładu normalnego i rozkładu chi-kwadrat. Dla każdego z rozkładów wygenerowano 1000 obserwacji, a następnie dodatkowo kolejne 50 obserwacji. Wygenerowane dane transformowano zgodnie z przedstawionymi wzorami (4) i (5).

Na podstawie 1000 obserwacji pochodzących z rozkładu normalnego wygenerowano sieć, która posłużyła do predykcji dodatkowych 50 obserwacji. Była to sieć wielowarstwowa o strukturze 2-5-1, jakość dopasowania do danych walidacyjnych określono na poziomie ok. 0,95; funkcją aktywacji był tangens hiperboliczny. Za pomocą uzyskanej sieci obliczono reszty dla dodatkowo wygenerowanych 50 obserwacji:

- dla podejścia tradycyjnego obliczono odchylenie standardowe reszt (do weryfikacji wykorzystano także odchylenie standardowe dla wszystkich 6000 wygenerowanych danych), a następnie stworzono karty kontrolne bazujące zarówno na podejściu tradycyjnym, w którym  $k = 3$ , jak i na podejściu ARL. Żadne z tych podejść nie dało sygnału o rozregulowaniu,
- dla podejścia z transformacją reszty z wygenerowanej sieci zostały wykorzystane do utworzenia krzywej Johnsona postaci:

$$z = 0,08 + 1,68 \operatorname{arcsin} h \frac{x - 0,085}{1,28}.$$

Za pomocą tej krzywej pozostałe 50 reszt uzyskanych ze sztucznej sieci neuronowej zostało transformowane do rozkładu normalnego. W tym podejściu także nie wykazano sygnałów o rozregulowaniu.

Analogicznie postąpiono z danymi pochodzącymi z rozkładu chi-kwadrat. Dla 1000 obserwacji wygenerowano sztuczną sieć neuronową o jakości dopasowania danych walidacyjnych na poziomie 0,82, w której struktura była 2-3-1, a funkcja aktywacji była wykładnicza. Po wyliczeniu reszt dla dodatkowych 50 obserwacji nie zaobserwowano sygnałów rozregulowania zarówno dla podejścia tradycyjnego, jak i w przypadku korzystania z krzywej Johnsona mającej w tym przypadku postać:

$$z = 1,46 + 1,78 \ln \left( \frac{x + 7,13}{21,26 - 7,13 - x} \right).$$

## Podsumowanie

Wykorzystanie sztucznych sieci neuronowych do konstrukcji wielowymiarowych kart kontrolnych jest możliwe, jednak wyniki osiągnięte dla tych kart nie są w pełni satysfakcjonujące. W sytuacji, kiedy między zmiennymi występuje zależność liniowa znacznie lepsze wyniki osiąga się, korzystając z klasycznej karty kontrolnej  $T^2$  Hotellinga. Natomiast gdy pomiędzy badanymi cechami występują zależności nieliniowe, wtedy karta Hotellinga daje gorsze rezultaty, niż karty uzyskane z wykorzystaniem sztucznej sieci neuronowej. Trudno zatem jednoznacznie rekomendować któryś ze sposobów postępowania z tego rodzaju kartami kontrolnymi. Wydaje się, że należy poddać je dalszej weryfikacji, w szczególności należy poddać badaniu błąd drugiego rodzaju, czyli błąd polegający na braku sygnału o rozregulowaniu. Trzeba także rozpatrzyć możliwość zastosowania tzw. radialnych sztucznych sieci neuronowych.

## Literatura

- Bersimis S., Psarakis S., Panaretos J. (2007), *Multivariate statistical process control charts: an overview*. „Quality and Reliability Engineering International”, Vol. 23(5).
- Cheng C.S. (1995), *A Multi-Layer Neural Network Model for Detecting Changes in the Process Mean*, „Computers and Industrial Engineering”, Vol. 28, No. 1.
- Hwang H.B., Hubele N.F. (1993), *Back-propagation pattern recognizers for X control charts: methodology and performance*, „Computers & Industrial Engineering”, Vol. 24(2).

- Johnson N.L. (1949), *System of frequency curves generated by methods of translation*, „Biometrika”, No. 36.
- Kanji G.K., Arif O.H. (2000), *Median rankit control chart by the quantile approach*, „Journal of Applied Statistics”, Vol. 27(6).
- Liu R.Y. (1995), *Control charts for multivariate processes*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 90(432).
- Liu R.Y., Singh K., Teng J.H. (2004), *DDMA-charts: nonparametric multivariate moving average control charts based on data depth*, „Allgemeines Statistisches Archiv”, Vol. 88(2).
- Martin E.B., Morris A.J. (1995), *Multivariate Statistics and Neural Networks In Process Fault Detection*, „IEE-Colloquium-(Digest)”, No. 079.
- Montgomery D.C. (2007), *Introduction to statistical quality control*, John Wiley & Sons.
- Ozturk A., Dale R. (1985), *Least squares estimation of the parameters of the Generalized Lambda Distribution*, „Technometrics”, Vol. 27(1).
- Peternek P. (2012), *Wybrane karty kontrolne indywidualnych pomiarów [w:] S. Forlicz (red.), Zastosowanie metod ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*, CeDeWu, Warszawa.
- Peternek P. (2013), *Porównanie kart kontrolnych indywidualnych pomiarów uzyskanych z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu lambda oraz krzywych Johnsona*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 309.
- Peternek P. (2014), *O optymalizacji procedury Slifkera i Shapiro estymacji krzywych Johnsona*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
- Pugh G.A. (1991), *A comparison of neural networks to SPC charts*, „Computers and Industrial Engineering”, Vol. 21(1).
- Schilling E.G., Nelson P.R. (1976), *The effect of non-normality on the control limits of X-bar charts*, „Journal of Quality Technology”, Vol. 8(4).
- Slifker J.F., Shapiro S.S. (1980), *The Johnson System: Selection and Parameter Estimation*, „Technometrics”, Vol. 22.
- Wilson D.J.H., Irwin G.W., Lightbody G. (1997), *Neural Networks and Multivariate*, „IEE-Colloquium-(Digest)”, No. 174.
- Zorriassatine F., Tannock J.D.T. (1998), *A review of neural networks for statistical process control*, „Journal of Intelligent Manufacturing”, Vol. 9(3).

#### APPLICATION OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS TO CONSTRUCTION OF MULTIVARIATE CONTROL CHARTS FOR INDIVIDUAL DATA

**Summary:** In classical statistical process control the assumption of normal distribution is usually valid. When this condition is not satisfied specifically transformation or the specified method are used. This article presents application of artificial neural networks to construct of multivariate control charts for individual data.

**Keywords:** control charts, artificial neural networks, Hotelling control chart.