



Daniel Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Wydział Zarządzania
Katedra Statystyki
daniel.kosiorowski@uek.krakow.pl

LOKALNE FUNKCJE GŁĘBI W MODELOWANIU UKŁADÓW EKONOMICZNYCH

Streszczenie: W artykule rozważamy prostą dwuosobową grę kooperacyjną, w której gracze działają w warunkach niepełnej informacji oraz opierając się na szeregu czasowym zawierającym obserwacje odstające. Rozpatrywana gra nawiązuje do idei klasyfikatora indukowanego przez statystyczną funkcję głębi.

Słowa kluczowe: funkcja głębi, kooperacyjna gra dynamiczna, odporność.

Wprowadzenie

Rozmiary zbiorów danych, na podstawie których ekonomiści obecnie podejmują decyzje, coraz częściej wymuszają stosowanie odmiennych strategii przetwarzania danych, niż miało to miejsce jeszcze kilka lat temu. Wielopoziomowe monitorowanie aktywności użytkowników sieci Internet, handel algorytmiczny czy on-line credit scoring stanowią przykłady zjawisk, które inicjują ewolucję tzw. klasycznych technik analizy danych i wnioskowania statystycznego [por. Huber, 2011]. Motywacją powstania niniejszego artykułu był jeden z kierunków ewolucji metod statystycznych związany z gospodarką on-line nazywany *strumieniowym przetwarzaniem danych* (SPD). W przypadku SPD dane docierają do systemu je przetwarzającego w sposób bardzo gwałtowny, w wielkich ilościach, podczas gdy do dyspozycji mamy jedynie ograniczoną ilość pamięci, aby te dane magazynować [por. Aggerwal, 2007]. Algorytmy, którymi posługujemy się w ramach SPD, muszą radzić sobie z wysokimi wymaganiami w zakresie: 1) szybkości transmisji danych do programu, 2) złożoności obliczeniowej algorytmu oraz 3) wielkości pamięci niezbędnej dla prawidłowego dzia-

łania algorytmu. Algorytmy takie są stosowane w sytuacjach, gdzie konieczna jest zautomatyzowana obsługa danych uaktualnianych w sposób ciągły. Algorytm taki musi się odznaczać wysoką elastycznością w stosunku do zmian charakterystyk napływających danych – musi się do takich zmian szybko adaptować [por. Anagnostopoulos i in., 2007]. W literaturze proponuje się kilka sposobów konstruowania algorytmów dedykowanych SPD. W kontekście *strumieni danych ekonomicznych* warto zwrócić uwagę na podejścia związane z *przetwarzaniem równoległym* bądź stosowaniem *hierarchizacji* napływających danych. Warto też zauważyć, że w kontekście SPD do łask wraca szereg prostych statystyk, które daje się obliczać rekurencyjnie i/lub równoległe. Mamy tutaj przykładowo na uwadze zwykle średnie arytmetyczne, zwykle wariancje i kowariancje, a tym samym macierze kowariancji, dynamiczne regresje najmniejszych kwadratów, filtr Kalmana itd. [por. Kosiorowski i Zawadzki, 2014a; Kosiorowski i in., 2014].

Przyjmując pewien model, według którego są generowane obserwacje, oraz pewien model pobierania generowanych obserwacji, w ramach SPD nasze zadanie polega na właściwym odczytaniu wartości pewnej funkcji niesionego przez strumień sygnału. Przykładowo dane są generowane przez proces autoregresyjny rzędu pierwszego o zmiennym trendzie, pobieramy co setną obserwację, ale w sumie nie więcej niż pięćset – mamy za zadanie wskazywać zmiany trendu. Postuluje się, aby w każdej chwili naszej analizy czas przetwarzania danych, wielkość magazynowanych danych oraz czas obliczeń funkcji sygnału łącznie nie przekraczały wielkości $o(N)$, a najlepiej $poly\log(N)$, gdzie N to wielkości próby, liczba bitów pamięci itd. Zaznaczmy, że taki postulat stanowi ograniczenie dla stosowalności wysokiej jakości procedur odpornych, które są wysoce złożone pod kątem obliczeniowym, tzn. ich złożoność na ogół przekracza $o(N^{3/2})$ [por. Huber, 2011; Kosiorowski, 2014; Kosiorowski i in., 2014a].

Warto zwrócić uwagę na fakt, że SPD stanowi cechę charakterystyczną ludzi i organizacji ludzkich. W trakcie całego życia dociera do nas ogrom informacji poprzez wszystkie zmysły. Stosujemy abstrakcję, aby wystarczało nam korzystanie z jedynie niewielkiego fragmentu docierających do nas informacji. Człowieka można opisać jako biologiczny system stosujący SPD. Na kolejnym poziomie abstrakcji warto zwrócić uwagę, że organizacje ludzkie powszechnie stosują zarówno równoległe przetwarzanie danych, jak i hierarchizację wykonywanych procesów przetwarzania danych.

Niniejszy artykuł stanowi początek projektu badawczego mającego na celu ustalenie związków pomiędzy teorią gier kooperacyjnych a SPD [por. Haurie i Zaccour, 2005]. W ramach projektu zamierzamy m.in. wskazać zachowania kooperacyjne, strategie współdziałania w grupie, które prowadzą do najskuteczniej-

szych algorytmów SPD. W artykule staramy się zwrócić uwagę na zagadnienie *lokalności* stosowanej przez graczy strategii. Pokazujemy m.in., że *lokalna strategia* może mieć przewagę nad strategią globalną w sytuacji, gdy dane generowane przez *Naturę* zawierają zanieczyszczenia.

Dalsze części artykułu są zorganizowane w następujący sposób: w rozdziale pierwszym przedstawiono wybrane elementy lokalnej koncepcji danych, w rozdziale drugim sformułowano prostą grę dynamiczną, w której wykorzystuje się głębię lokalną, natomiast rozdział trzeci zawiera dyskusję wyników badań symulacyjnych zaproponowanej gry.

1. Koncepcja głębi danych

Mianem *koncepcji głębi danych* (KGD) jest określany zestaw technik wielowymiarowej analizy statystycznej opierających się na wielowymiarowych uogólnieniach jednowymiarowych technik statystycznych wykorzystujących statystyki porządkowe i rangi. W ramach KGD proponuje się m.in. wielowymiarowe wykresy kwantyl-kwantyl, wielowymiarowe testy Wilcozona, odporne regresje, odporne i nieparametryczne miary rozrzutu, skośności, kurtozy [por. Zuo i Serfling, 2000; Kosiorowski, 2012].

1.1. Podstawowe pojęcia koncepcji

Podstawowym narzędziem KGD jest *statystyczna funkcja głębi* $D(\cdot, F)$, która przyporządkowuje punktowi $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d$ miarę centralności punktu $D(\mathbf{x}, F) \in [0, 1]$, zważywszy na rozkład prawdopodobieństwa $F \in P$ na \mathfrak{R}^d bądź na rozkład empiryczny $F_n \in P$ obliczony na podstawie próby $\mathbf{X}^n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Im wyższa wartość głębi (bliższa jedności), tym bardziej centralny jest punkt względem rozkładu F bądź F_n . Punkt bądź zbiór punktów, dla których funkcja głębi przyjmuje maksimum, jest nazywany *wielowymiarową medianą indukowaną* przez tę głębię. W kontekście zastosowań ekonomicznych warto zwrócić uwagę na **ważną głębię** L^p , która w przypadku próby $\mathbf{X}^n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ jest definiowana jako:

$$D(\mathbf{x}; \mathbf{X}^n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_i\|_p)}, \quad (1)$$

gdzie w jest stosowną niemalejącą i ciągłą na $[0, \infty]$ funkcją wagową oraz $\|\cdot\|_p$ oznacza L^p normę (dla $p = 2$ mamy zwykłą normę Euklidesową).

Ważona głębia L^p w punkcie ma niską wartość punktu załamania próby skończonej (BP) i nieograniczoną funkcję wpływu (IF) (BP wyraża minimalną frakcję „złych” obserwacji w próbie, która sprawia, że procedura staje się bezużyteczna, IF wyraża wrażliwość procedury na punktowe zanieczyszczenie [por. Marona i in., 2006; Genton i Lucas, 2003]). Z drugiej strony indukowana przez ważoną L^p głębnię mediana ma bardzo wysoki BP i ograniczoną funkcję wpływu. W odróżnieniu do konkurencyjnych funkcji głębni ważona głębnia L^p indukuje procedury, które łatwo oblicza się w wyższych wymiarach, a złożoność obliczeniowa jest odpowiednia dla praktycznych zastosowań [por. Zuo, 2004].

Zbiór punktów, w których głębnia przyjmuje wartość nie mniejszą niż $\alpha \in [0,1]$, to wielowymiarowy odpowiednik kwantyla, który jest nazywany α – centralnym obszarem $D_\alpha(\mathbf{X}^n) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d : D(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \geq \alpha\}$.

1.2. Koncepcja głębni lokalnej

W odróżnieniu od funkcji gęstości funkcja głębni ma globalną naturę – wyraża centralność punktu względem całej próby. Ta własność stanowi wadę funkcji głębni w kontekście jej niektórych zastosowań, np. w przypadku konstruowania reguły klasyfikacyjnej typu *k-najbliższych sąsiadów*. Indukowany przez głębnię klasyfikator wymaga lokalnej wersji głębni.

Szczególnie udana lokalna wersja funkcji głębni została zaproponowana przez Paindavaine i van Bever [2013]. Dla zdefiniowania sąsiedztwa punktu autorzy posługują się *symetryzacją* próby (rozkładu) względem punktu, w którym głębnia jest obliczana. W takim podejściu zamiast korzystać z rozkładu P^X , korzysta się z rozkładu $P_x = 1/2P^X + 1/2P^{2x-X}$.

Dla wprowadzenia formalnej definicji głębni lokalnej wygodnie wprowadzić dla każdego $\beta \in (0,1]$ najmniejszy obszar centralny zawierający nie mniej niż β masy probabilistycznej:

$$R^\beta(F) = \bigcap_{\alpha \in A(\beta)} D_\alpha(F), \quad (2)$$

gdzie $A(\beta) = \{\alpha \geq 0 : P[D_\alpha(F)] \geq \beta\}$.

W takim ujęciu można zdefiniować *otoczenie* punktu x jako $R^\beta(P_x)$. Formalnie niech $D(\cdot, P)$ oznacza funkcję głębni. Lokalna funkcja głębni z parametrem lokalności $\beta \in (0,1]$ w punkcie x jest definiowana jako:

$$LD^\beta(z, P) : z \rightarrow D(z, P_x^\beta), \quad (3)$$

gdzie $P_x^\beta(\cdot) = P(\cdot | R_x^\beta(P))$ jest rozkładem warunkowym P , warunkowanym otoczeniem $R_x^\beta(P)$. Dla $\beta = 1$ głębia lokalna sprowadza się do zwykłej głębi globalnej.

W przypadku próby $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ w pierwszym kroku obliczamy głębię punktu x w powiększonej próbie zawierającej x_1, \dots, x_n oraz ich odbicia $2x - x_1, \dots, 2x - x_n$ względem x – oznaczmy tę próbę za pomocą X_x^n . Następnie porządkujemy obserwacje w oryginalnej próbie względem wartości $D(\cdot, X_x^n)$, tzn. $D(x_{(1)}, X_x^n) \geq \dots \geq D(x_{(n)}, X_x^n)$. Ustalamy stopień lokalności $\beta \in (0, 1]$ determinujący wielkość sąsiedztwa x . Następnie obliczamy $n_\beta(X_x^n) = \max \{l = \lceil n\beta \rceil, \dots, n\} : D(x_{(l)}, X_x^n) = D(x_{\lceil n\beta \rceil}, X_x^n)\}$. W końcu obliczamy $LD^\beta(x, X^n) = D(x, X_x^{n, \beta})$, gdzie $X_x^{n, \beta}$ oznacza podpróbę $x_{(1)}, \dots, x_{(n_\beta)}$ próby X_x^n .

Teoretyczne własności procedury znajdziemy w Paindavaine i van Bever [2013]. Implementację przedstawionych metod koncepcji znajdziemy w darmowym pakiecie środowiska R DepthProc [por. Kosiorowski i Zawadzki, 2014]. Zaznaczmy, że podejście nie ogranicza się jedynie do tzw. głębi położenia – można je stosować do głębi regresyjnych, głębi dla danych funkcjonalnych [por. Kosiorowski, 2012].

2. Sformułowanie problemu

Nasze studia zagadnienia lokalności w *kooperacyjnych grach dynamicznych* rozpoczynamy od prostego przypadku dynamicznej gry, w której uczestniczy dwóch graczy. Zakładamy, że dany jest dwureżimowy, dwuwymiarowy szereg czasowy $\{X_t\}_{t \in \infty}$ reprezentujący naturę. Za swego rodzaju wzorzec natury przyjmujemy ogólny schemat wieloreżimowych procesów z losowym przełączaniem pomiędzy reżimami nazywany VCHARME [por. Stockis, 2010] (ang. *vector conditionally heteroscedastic autoregressive mixture of experts*).

Zadanie graczy A i B polega na sukcesywnym wskazaniu reżimu, który wygenerował obserwację x_t w ustalonym przedziale czasu t_0, \dots, T . Innymi słowy rozważamy dwa ciągi obserwacji-decyzji: **Gracz A**: $(x_1, a_1^A), (x_2, a_2^A), \dots, (x_T, a_T^A)$ oraz **Gracz B**: $(x_1, a_1^B), (x_2, a_2^B), \dots, (x_T, a_T^B)$. Początkowo zakładamy, że gracze podejmują decyzje niezależnie od siebie. Założenie to można na wiele sposobów osłabić w trakcie dalszych studiów, np. zakładając, że gracze w chwili t znają decyzje konkurenta z chwili $t - 1$.

Informacja, którą dysponują gracze: Zakładamy, że gracze dysponują próbami uczącymi wygenerowanymi przez naturę: gracz A dysponuje $U^A = [x_l^A, r(x_l^A)]$ oraz gracz B dysponuje $U^B = [x_k^B, r(x_k^B)]$, $l = 1, \dots, n_A$, $k = 1, \dots, n_B$, gdzie $r(\cdot) \in \{0, 1\}$ oznacza etykietę wskazującą reżim procesu. Gracze mogą się dzielić informacją, np. poprzez udostępnienie konkurentowi swojej próby uczącej. Zakładamy też, że gracze mogą celowo wprowadzać się w błąd, np. poprzez dostarczanie konkurentowi zanieczyszczonych danych.

Lokalność: Decyzje są podejmowane przez graczy za pomocą zasady *k-najbliższych sąsiadów*, gdzie sąsiedztwo jest definiowane z wykorzystaniem **lokalnej funkcji głębi**. Gracz wybiera reżim, względem którego dana obserwacja będzie bardziej centralna w ramach pewnego sąsiedztwa tej obserwacji. Strategie graczy S^A i S^B mogą się różnić stopniem lokalności. Gracze w swoich ocenach mogą uwzględniać różne frakcje bliskich obserwacji względem zaobserwowanego punktu.

Wyplata dla graczy zależy od dwóch elementów *trafności własnej decyzji* poprzez funkcję w_A, w_B oraz *trafności decyzji rywala* poprzez funkcję g_A, g_B (funkcja reprezentuje *racjonalność indywidualną* graczy):

$$\text{Gracz A: } \pi(A) = \sum_{i=1}^T \left(w_A [r(x_i), a_i^A] + g_A [r(x_i) - a_i^B] \right), \quad (4)$$

$$\text{Gracz B: } \pi(B) = \sum_{i=1}^T \left(w_B [r(x_i), a_i^B] + g_B [r(x_i) - a_i^A] \right). \quad (5)$$

W takim ujęciu można dla przykładu rozważać gracza A, który zyskuje na własnych poprawnych wskazaniach reżimu i traci na poprawnych wskazaniach rywala (postawa egoistyczna), i gracza, który zyskuje zarówno na własnych poprawnych wskazaniach, jak też na poprawnych wskazaniach rywala (postawa solidarna).

Co do zasady interesują nas *kooperacyjne gry wieloosobowe*.

Tabela 1. Funkcja wypląt dla gracza A

Gracz A	$r(x) = 1$	$r(x) = 2$
$d^A(x, S^A) = 1$	w_A^{11}	w_A^{12}
$d^A(x, S^A) = 2$	w_A^{21}	w_A^{22}

Tabela 2. Funkcja wypląt dla gracza B

Gracz B	$r(x) = 1$	$r(x) = 2$
$d^B(x, S^B) = 1$	w_B^{11}	w_B^{12}
$d^B(x, S^B) = 2$	w_B^{21}	w_B^{22}

Wprowadzamy zatem dodatkowo funkcję łącznego wyboru obu graczy oraz jej zagregowaną po czasie wersję reprezentującą **racjonalność grupową**:

$$Z(t) = f(a_t^A, a_t^B), \quad (6)$$

$$\pi(G) = \sum_{i=1}^T h[Z(i) - r(x_i)]. \quad (7)$$

Cele gry: Przyjmując powyższe ramy pojęciowe, poszukujemy takich strategii graczy, które maksymalizują racjonalność grupową $\pi(G)$ oraz racjonalności indywidualne $\pi(A)$ i $\pi(B)$.

Strategie graczy: W ramach gry można wyodrębnić dwie grupy strategii. *Po pierwsze* mamy na uwadze strategie wobec Natury wiążące się ze sposobem wykorzystania próby uczącej – przyjęciem określonej reguły dyskryminacyjnej, stopnia lokalności, charakterystyk zapominania dotychczasowych wyników gry itd. *Po drugie* mamy na uwadze strategie graczy względem siebie – kooperację w postaci udostępniania konkurentowi własnej próby uczącej bądź własnych wyborów lub wprowadzanie konkurenta w błąd poprzez udostępnianie „złośliwie” spreparowanej próby uczącej, umowa dotycząca korzystania z „ruchomych prób uczących” o różnej wielkości, umowa dotycząca redystrybucji globalnej wypłaty.

Warunki gry: Początkowo zakładamy, że gracze nie mogą modyfikować swoich strategii w trakcie gry oraz że wypłaty następują po ostatnich decyzjach graczy. Dopuszczamy możliwość występowania zanieczyszczonych danych spośród danych generowanych przez naturę.

Uogólnienia: Naturalne uogólnienie powyższego schematu stanowi wprowadzenie większej liczby graczy. Z kolei można rozważyć zmiany warunków gry w chwili $k + 1$ w zależności od jej wyniku w chwilach t_0, \dots, t_k oraz większą liczbę reżimów gry. Możemy rozważać też różne częstotliwości podejmowania decyzji dla poszczególnych graczy.

3. Badania symulacyjne

W celu zbadania własności prostej gry dynamicznej rozgrywanej według schematu proponowanego w rozdziale drugim przeprowadzono badania symulacyjne. Generowano 1000 razy trajektorie składające się z $T = 5000$ obserwacji z procesu VCHARME składającego się z dwóch dwuwymiarowych procesów wektorowej autoregresji VAR(1), oznaczanych dalej jako M1 i M2, których przełączaniem rządził ukryty łańcuch Markowa, którego macierz przejścia składała się z wier-

szy $[0.99; 0.01]$ i $[0.01; 0.99]$. Dane zawierały do 20% addytywnych obserwacji odstających. Próby generowano za pomocą pakietu {DSE} autorstwa Paula Gilberta. Zastosowano następujące specyfikacje modeli:

$$\mathbf{M1}: \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{M2}: \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Gracze umownie nazwani A i B dysponowali stuelementowymi próbami uczącymi, których nie uaktualniali, nie uzupełniali w trakcie gry. Gracze decydowali niezależnie od siebie. Przyjmując oznaczenia z tab. 1 i 2, za funkcje wypłat indywidualnych przyjęto:

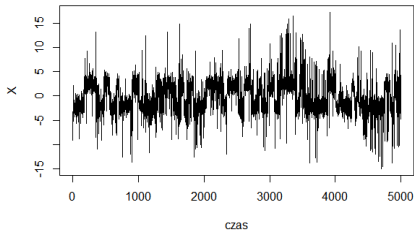
$$\text{Gracz A: } \pi(A) = w_A^{11} + w_B^{12},$$

$$\text{Gracz B: } \pi(B) = w_B^{22} - w_A^{21}.$$

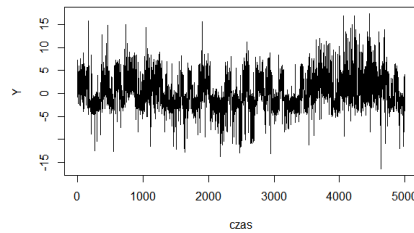
Innymi słowy gracz A zyskuje na właściwych wskazaniach reżimu M1 oraz na błędnych wskazaniach konkurenta, gdy dane generuje M1. Gracz B kieruje się swego rodzaju solidaryzmem – zyskuje na właściwych wskazaniach reżimu M2 i traci, gdy konkurent nie wskaże właściwie M2. Za racjonalność zbiorową przyjmujemy natomiast dwukrotność liczby obserwacji minus tzw. całkowity błąd klasyfikacji popełniony przez obu graczy:

$$\pi(G) = 2T - (w_A^{12} + w_A^{21} + w_B^{12} + w_B^{21}).$$

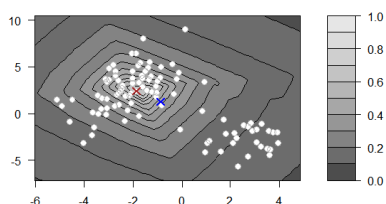
Obaj gracze stosują klasyfikator głębi lokalnej L^2 , przy czym pierwszy gracz stosuje współczynnik lokalności $\beta = 0.9$, natomiast drugi gracz stosuje $\beta = 0.3$. Wypłaty następują co 500 obserwacji.



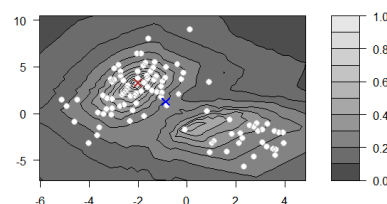
Rys. 1. Pierwsza współrzędna trajektorii wygenerowanej z VCHARME 2D złożonego z dwóch VAR(1)



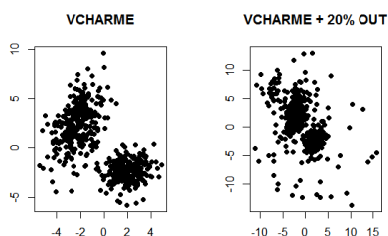
Rys. 2. Druga współrzędna trajektorii wygenerowanej z VCHARME 2D złożonego z dwóch VAR(1)



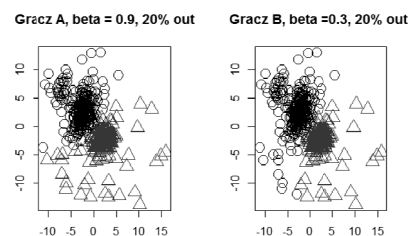
Rys. 3. Wykres konturowy głębi L^1 z parametrem lokalności $\beta = 0.95$ (dane pochodzą z VCHARME 2D)



Rys. 4. Wykres konturowy głębi L^1 z parametrem lokalności $\beta = 0.3$ (dane pochodzą z VCHAR-ME 2D)

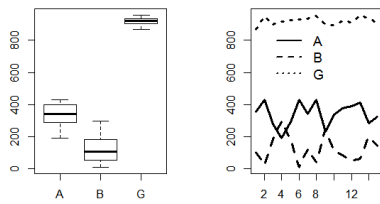


Rys. 5. Wartości przykładowej trajektorii z VCHARME 2D złożonego z dwóch VAR(1) – dane czyste i zawierające 20% zanieczyszczeń

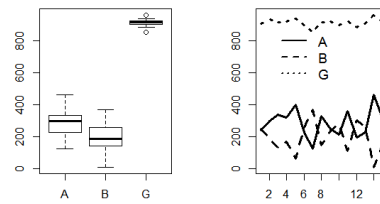


Rys. 6. Decyzje graczy A i B – klasyfikacje punktów wygenerowanych z VCHARME z zanieczyszczeniami, różne stopnie lokalności

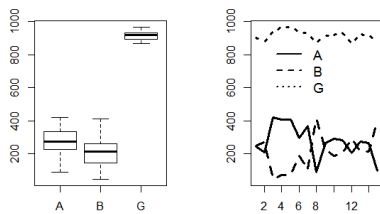
Rysunki 1 i 2 przedstawiają współrzędne przykładowej trajektorii wygenerowanej z procesu VCHARME 2D złożonego z dwóch modeli VAR(1). Zadanie graczy polega na wskazaniu właściwego modelu M1 bądź M2. Rysunki 3 i 4 przedstawiają konturowe wykresy głębi L^1 dla różnych wartości parametru lokalności β . Łatwo zauważyć, że przyjmując niższą wartość β (wyższy stopień lokalności), dostrzegamy w danych dwa skupiska. Dla wysokich wartości parametru β dwumodalność danych pozostaje niezauważona. Rysunek 5 przedstawia wartości przykładowej trajektorii wykorzystywanej w symulacji w sytuacji braku zanieczyszczeń oraz w sytuacji występowania 20% addytywnych zanieczyszczeń wśród danych. Rysunek 6 przedstawia po 500 decyzji klasyfikacyjnych graczy A i B co do obserwacji generowanych z modelu przedstawionego powyżej.



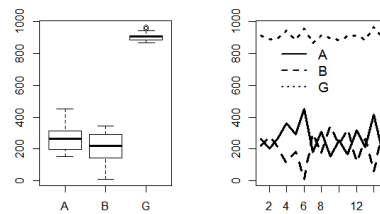
Rys. 7. Wykłady graczy A, B oraz wypłata grupowa G. $\beta(A) = 0.9$, $\beta(A) = 0.3$, 20% zanieczyszczeń, próby uczące niezależne 2 x 500 obs.



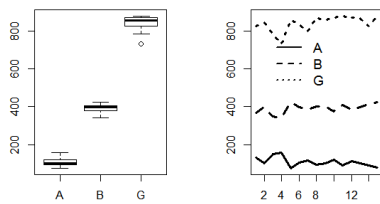
Rys. 8. Wykłady graczy A, B oraz wypłata grupowa G. $\beta(A) = 0.1$, $\beta(A) = 0.1$, 20% zanieczyszczeń, próby uczące niezależne 2 x 500 obs.



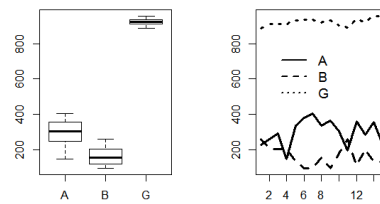
Rys. 9. Wykłady graczy A, B oraz wypłata grupowa G. $\beta(A) = 0.25$, $\beta(A) = 0.25$, 20% zanieczyszczeń, próby uczące niezależne 2 x 500 obs.



Rys. 10. Wykłady graczy A, B oraz wypłata grupowa G. $\beta(A) = 0.25$, $\beta(A) = 0.25$, 20% zanieczyszczeń, próby uczące współdzielone 2 x 100 obs



Rys. 11. Wykłady graczy A, B oraz wypłata grupowa G. $\beta(A) = 0.25$, $\beta(A) = 0.25$, 20% zanieczyszczeń, próby uczące współdzielone 2 x 100, zmiana częstości reżimów (natury)



Rys. 12. Wykłady graczy A, B oraz wypłata grupowa G. $\beta(A) = 0.25$, $\beta(A) = 0.25$, 20% zanieczyszczeń, próby uczące współdzielone 2 x 100, gracz A wprowadza w błąd gracza B, zmiana częstości reżimów (natury)

Rysunek 7 podsumowuje wyniki symulacji gry, przedstawiając za pomocą wykresów ramka wąsy wypłaty graczy A, B oraz wypłaty grupowe G dla parametrów lokalności $\beta(A) = 0.9$, $\beta(B) = 0.25$, 20% zanieczyszczeń i niezależnych prób uczących 2×500 . Wypłaty są wypłacane co 500 obserwacji. Natura jest reprezentowana przez dwa reżimy – macierz przejścia pomiędzy reżimami ma wiersze $[0.99; 0.01]$ i $[0.01; 0.99]$. Rysunek 8 przedstawia podobną sytuację, co rys. 7, z tą różnicą, że parametry lokalności wynoszą $\beta(A) = 0.1$, $\beta(B) = 0.1$. Rysunek 9 przedstawia analogiczną sytuację, co rys. 7 i 8, z tą różnicą, że parametry lokalności wynoszą $\beta(A) = 0.25$, $\beta(B) = 0.25$. Rysunek 10 przedstawia sytuację analogiczną do rys. 8, z takimi różnicami, że obaj gracze dzielą się próbami uczącymi – tym razem wielkości 2×100 obserwacji. W przypadku rys. 11 przy pozostałych warunkach jak na rys. 10 zmieniono charakterystyki Natury – częstość występowania reżimów. Tym razem zmianą reżimów Natury zawiaduje macierz przejścia o wierszach $[0.8; 0.2]$ i $[0.01; 0.99]$. Tym razem Natura ma większą skłonność do zmiany reżimu M1 na reżim M2. Rysunek 12 przedstawia analogiczną sytuację, co rys. 11 – jednakże tym razem gracz A wprowadza w błąd gracza B, dostarczając mu zanieczyszczoną próbę uczącą wielkości 100 obserwacji. W ten sposób gracz A stara się poprawić swoje wypłaty po zmianie charakterystyk Natury.

Zaprezentowane na rysunkach wybrane wyniki symulacji przebiegu rozpatrywanej gry pokazują, że poprzez zmianę stopnia lokalności gracze mogą wpłynąć na własne wypłaty i pośrednio na wypłaty konkurenta. Mniejsze próby uczące prowadzą do podobnych wyników, co większe próby (bardziej kosztowne) w warunkach dzielenia się przez graczy próbami. Na wyniki uzyskiwane przez graczy spory wpływ ma Natura – jej charakterystyki stochastyczne. Warto zauważyć sytuację uwidocznioną na rys. 12 – gracz A poprzez wprowadzanie gracza B w błąd przez dostarczanie mu zanieczyszczonej próby uczącej jest w stanie znacząco poprawić swoje wypłaty, nie wpływając jednocześnie istotnie na „dobrobyt grupowy” – wypłatę G. Taka sytuacja oczywiście wiąże się z konkretną postacią funkcji wypłat dla graczy i całej grupy.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono ogólne ramy pojęciowe dla studiowania zagadnienia lokalności w kontekście dynamicznych gier wieloosobowych. Przedstawione pojęcia zilustrowano przykładem prostej dynamicznej gry dwuosobowej. Za pomocą symulacji komputerowej pokazano wybrane własności tej gry. Arty-

kuł stanowi punkt startowy programu badawczego mającego na celu zbadanie roli lokalności w teorii i zastosowaniach dynamicznych kooperacyjnych gier wieloosobowych oraz stworzenie aparatury statystycznej przeznaczonej do badań empirycznych takich gier.

Literatura

- Aggerwal Ch.C. (2007), *Data Streams – Models and Algorithms*, Springer, New York.
- Anagnostopoulou Ch., Tasoulis D.K., Adams N.M., Pavlidis N.G., Hand D.J. (2012), *Online Linear and Quadratic Discriminant Analysis with Adaptive Forgetting for Streaming Classification*, "Statistical Analysis and Data Mining", Vol. 5, s. 139-166.
- Genton M.G., Lucas A. (2003), *Comprehensive Definitions of Breakdown Points for Independent and Dependent Observations*, "Journal of the Royal Statistical Society Series B", 65, s. 81-84.
- Haurie A., Zaccour G. (2005), *Dynamic Games: Theory and Applications*, Springer, New York.
- Huber, P. (2011), *Data Analysis: What Can Be Learned from the Past 50 Years*, Wiley, New York.
- Kosiorowski D. (2012), *Statystyczne funkcje głębi w odpornej analizie ekonomicznej*, Wydawnictwo UEK, Kraków.
- Kosiorowski D. (2014), *L^p Depth Binning in Online Data Processing*, <http://arxiv.org/pdf/1405.0131v1.pdf>.
- Kosiorowski D., Bocian M., Bujak A. (2014a), *A Combination of Localdepth and svm Algorithms in Automatic Identification and Prediction of a Market State*, International Scientific Conference of the Faculty of Management 2014, Cracow University of Economics, submitted.
- Kosiorowski D., Zawadzki Z. (2014b), *Selected Issues Related to Online Calculation of Multivariate Robust Measures of Location and Scatter*, Proceedings from VIIIth A. Zeliaś Conference, s. 87-97.
- Kosiorowski D., Zawadzki Z. (2014), *DepthProc: An R Package for Robust Exploration of Multidimensional Economic Phenomena*, <http://arxiv.org/pdf/1408.4542.pdf>.
- Kosiorowski D., Mielczarek D., Rydlewski J., Snarska M. (2014), *Sparse Methods for Analysis of Sparse Multivariate Data from Big Economic Databases*, „Statistics in Transition New Series”, 15(1), s. 111-132.
- Maronna R.A., Martin R.D., Yohai V.J. (2006), *Robust Statistics – Theory and Methods*, Wiley, Chichester.
- Paindavaine D., Bever G. van (2013), *From Depth to Local Depth: A Focus on Centrality*, "Journal of the American Statistical Association", 105, s. 1105-1119.

-
- R Core Team (2013): *R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria, URL <http://www.R-project.org/>.
- Stockis J-P., Franke J., Kamgaing J.T. (2010), *On Geometric Ergodicity of CHARME Models*, "Journal of the Time Series Analysis", Vol. 31, s. 141-152.
- Zuo Y. (2004), *Robustness of Weighted L^p – Depth and L^p Median*, "Allgemeines Statistisches Archiv", 88, s. 215-234.
- Zuo Y., Serfling R. (2000), *General Notions of Statistical Depth Function*, "The Annals of Statistics", 28, s. 461-482.

LOCAL DEPTH FUNCTIONS IN ECONOMIC SYSTEMS MODELLING

Summary: In this paper we present a methodological framework for purposes of dynamic cooperative games with locality modelling. Our framework appeals to the recently proposed by *Painvaveine* and *van Bever* concept of local depth. We propose a simple dynamic games with two agents and study its properties by means of computer simulations. The paper is a starting point for our research program aiming at creating a statistical apparatus for the cooperative dynamic games with local maximization of individual and group goals.

Keywords: statistical depth function, cooperative dynamic game, robustness.