Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 237 · 2015
Informatyka i Ekonometria 2

Ewa Michalska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
ewa.michalska@ue.katowice.pl

Renata Dudzińska-Baryła

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
renata.dudzinska-baryła@ue.katowice.pl

ZWIĄZEK FUNKCJI OMEGA Z DOMINACJĄ STOCHASTYCZNĄ

Streszczenie: Dominacje stochastyczne są relacjami porządku częściowego w zbiorze losowych wariantów decyzyjnych, podobnie jak relacja dominacji oparta na zaproponowanej przez Keatinga i Shadwicka w 2002 roku funkcji omega, służącej ocenie i uporządkowaniu wariantów inwestycyjnych pod kątem ich efektywności. Celem artykułu jest zbadanie zgodności porządku względem dominacji stochastycznych i funkcji omega oraz przedstawienie zależności między tymi kryteriami.

Słowa kluczowe: dominacje stochastyczne, funkcja omega, efektywność.

Wprowadzenie

Konsekwencją stosowania różnych kryteriów decyzyjnych w ocenie losowych wariantów decyzyjnych jest często rozbieżność wyborów. Wybory zgodne z zasadami dominacji stochastycznych to wybory racjonalne. W kryterium dominacji stochastycznej pierwszego stopnia czyni się jedynie założenie, że decydent woli posiadać więcej niż mniej. W teorii użyteczności oznacza to, że funkcja użyteczności decydenta jest rosnąca. Kryterium dominacji stochastycznej drugiego stopnia wyraża to, że decydent woli posiadać więcej niż mniej i ma awersję do ryzyka, co w teorii użyteczności odpowiada sytuacji, gdy funkcja użyteczności decydenta jest rosnąca i wklęsła [Kopańska-Bródka, 1999].

Relacja dominacji oparta na zaproponowanej przez Keatinga i Shadwicka w 2002 roku funkcji omega służy ocenie i porządkowaniu wariantów inwestycyjnych pod kątem ich efektywności. Relacja ta, podobnie jak relacje dominacji stochastycznej, jest relacją porządku częściowego. Celem artykułu jest zbadanie zgodności uporządkowań względem kryteriów dominacji stochastycznych (pierwszego i drugiego stopnia) oraz funkcji omega. Wskazane zostaną także zależności pomiędzy tymi kryteriami.

1. Funkcja omega

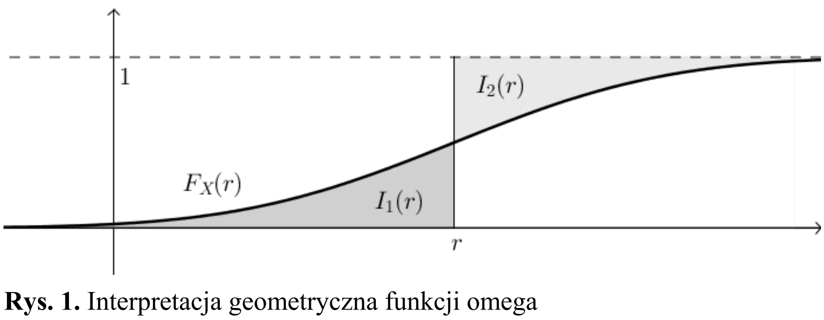
Konstrukcja funkcji omega umożliwia uwzględnienie preferencji inwestora wyrażanych poprzez wartość progową r (np. akceptowaną przez decydenta stopę zwrotu) stanowiącą punkt referencyjny, względem którego wyniki inwestycji X są oceniane jako pożądane (wartości większe od wartości progowej) oraz wyniki niepożądane (wartości mniejsze od wartości progowej) [Keating i Shadwick, 2002]. Funkcja omega jest definiowana jako iloraz wartości oczekiwanych zysków i oczekiwanych strat wyznaczanych względem wartości r:

$$\Omega_X(r) = \frac{\mathrm{E}(\max\{X - r, 0\})}{\mathrm{E}(\max\{r - X, 0\})} \tag{1}$$

Dla zmiennej losowej ciągłej X o dystrybuancie F_X i skończonej wartości oczekiwanej, funkcja omega ma postać[1] [Keating i Shadwick, 2002]:

$$\Omega_X(r) = \frac{\int_r^{+\infty}(1 - F_X(x))dx}{\int_{-\infty}^{r} F_X(x)dx} = \frac{I_2(r)}{I_1(r)} \tag{2}$$

gdzie wartości I_2 oraz I_1 są polami powierzchni obszarów zaznaczonych na rys. 1.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna funkcji omega

Źródło: Opracowanie własne.

[1] W literaturze funkcja omega jest także przedstawiana jako iloraz $\Omega_X(r) = I_1(r)/I_2(r)$.

W szczególności dla zmiennej losowej skokowej X przyjmującej wartości $x_1, x_2, ..., x_n$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, ..., p_n$ funkcja omega ma postać:

$$\Omega_X(r) = \frac{\sum_{i:\, x_i \geq r} (x_i - r) p_i}{\sum_{i:\, x_i < r} (r - x_i) p_i} \tag{3}$$

Dla ustalonej wartości r funkcja omega jest określana mianem wskaźnika efektywności. Gdy ma on wartość większą od 1, oznacza to, że w przypadku ocenianej inwestycji zyski przewyższają straty i wtedy inwestycja jest postrzegana jako efektywna.

2. Funkcja omega a dominacje stochastyczne

Dominacje stochastyczne są obiektywnymi, nieparametrycznymi zasadami wyboru losowych wariantów decyzyjnych. Zasady dominacji stochastycznych pierwszego (FSD) i drugiego stopnia (SSD) formułuje się w następujący sposób [Hanoch i Levy, 1969]:

- zmienna losowa X dominuje Y w sensie dominacji stochastycznych pierwszego stopnia (FSD), co zapiszemy $X \succ_{FSD} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_x(r) \leq F_y(r)$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $F_x(r) < F_y(r)$,
- zmienna losowa X dominuje Y w sensie dominacji stochastycznych drugiego stopnia (SSD), co zapiszemy $X \succ_{FSD} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_X^{(2)}(r) \leq F_Y^{(2)}(r)$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $F_X^{(2)}(r) < F_Y^{(2)}(r)$, gdzie $F_X^{(2)}(r) = \int_{-\infty}^{r} F_X(x)\, dx$, $F_Y^{(2)}(r) = \int_{-\infty}^{r} F_Y(x)\, dx$.

Symbolami F_X i F_Y oznaczono dystrybuanty zmiennych losowych odpowiednio X i Y, a symbolem $S \subset R$ łączny zbiór realizacji X i Y.

Formułując zasadę dominacji opartą na funkcji omega, powiemy, że zmienna losowa X dominuje Y, co zapiszemy $X \succ_{\Omega} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $\Omega_X(r) \geq \Omega_Y(r)$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $\Omega_X(r) > \Omega_Y(r)$.

Wzajemne zależności pomiędzy kryteriami FSD, SSD i kryterium funkcji Ω ilustruje diagram przedstawiony na rys. 2.

$$\begin{tikzcd} \textbf{FSD} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \textbf{SSD} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \boldsymbol{\Omega} & \end{tikzcd}$$

Rys. 2. Zależności pomiędzy kryteriami decyzyjnymi FSD, SSD i Ω

Źródło: Opracowanie własne.

Związek pomiędzy dominacją stopnia pierwszego i drugiego znajduje potwierdzenie w literaturze [Levy, 1992]. Pozostałe zależności formułujemy w postaci następujących twierdzeń:

Twierdzenie 1. Jeśli $X \succ_{\mathrm{FSD}} Y$, to $X \succ_{\Omega} Y$.

Twierdzenie 2. Jeśli $X \succ_{\mathrm{SSD}} Y$, to $X \succ_{\Omega} Y$.

Dowód twierdzenia 1 przeprowadzimy korzystając z własności, że dystrybuanty F_X i F_Y przyjmują wartości z przedziału $[0, 1]$ oraz z zależności wynikających z definicji dominacji stochastycznej stopnia pierwszego. Jeśli $X \succ_{\mathrm{FSD}} Y$, to dla każdego $r \in \mathrm{S}$ zachodzi nierówność $F_X(r) \le F_Y(r)$ (oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in \mathrm{S}$ zachodzi $F_X(r) < F_Y(r)$). Prawdziwe są zatem następujące nierówności:

$$\int_{-\infty}^{r} F_X(x)dx \le \int_{-\infty}^{r} F_Y(x)dx \tag{4}$$

oraz:

$$\int_{r}^{+\infty} (1 - F_X(x))dx \ge \int_{r}^{+\infty} (1 - F_Y(x))dx \tag{5}$$

z których wynika nierówność:

$$\frac{\int_{r}^{+\infty} (1 - F_X(x))dx}{\int_{-\infty}^{r} F_X(x)dx} \ge \frac{\int_{r}^{+\infty} (1 - F_Y(x))dx}{\int_{-\infty}^{r} F_Y(x)dx}$$

Lewa strona tej nierówności jest równa $\Omega_X(r)$, zaś prawa $\Omega_Y(r)$, zatem $\Omega_X(r) \geq \Omega_Y(r)$ (oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in \mathrm{S}$ zachodzi $\Omega_X(r) > \Omega_Y(r)$).

W dowodzie twierdzenia 2 skorzystamy z definicji dominacji stochastycznej stopnia drugiego. Jeśli $X \succ_{\mathrm{SSD}} Y$, to dla każdego $r \in \mathrm{S}$ zachodzi nierówność:

$$\int_{-\infty}^{r} F_X(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{r} F_Y(x)\,dx \tag{6}$$

oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in \mathrm{S}$ zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{r} F_X(x)\,dx < \int_{-\infty}^{r} F_Y(x)\,dx \tag{7}$$

Z faktu, że $\mathrm{X} \succ_{\mathrm{SSD}} \mathrm{Y}$, wynika też nierówność dotycząca wartości oczekiwanych zmiennych losowych *X* i *Y* [Levy, 1992]:

$$E(X) \geq E(Y) \tag{8}$$

Ponadto stosując wzór na całkowanie przez części, otrzymujemy następujące przedstawienie wartości oczekiwanych $E(X)$ i $E(Y)$ dla dowolnego $r \in R$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = r - \int_{-\infty}^{r} F_X(x)\,dx + \int_{r}^{+\infty} (1 - F_X(x))\,dx \tag{9}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_Y(x)dx = r - \int_{-\infty}^{r} F_Y(x)\,dx + \int_{r}^{+\infty} (1 - F_Y(x))\,dx \tag{10}$$

przekształcając dalej:

$$\int_{r}^{+\infty} (1 - F_X(x))\,dx = E(X) - r + \int_{-\infty}^{r} F_X(x)\,dx \tag{11}$$

$$\int_{r}^{+\infty} (1 - F_Y(x))\,dx = E(Y) - r + \int_{-\infty}^{r} F_Y(x)\,dx \tag{12}$$

Obliczając różnicę $\Omega_X(r) - \Omega_Y(r)$ i podstawiając zależności (11) i (12), otrzymujemy:

$$\Omega_X(r) - \Omega_Y(r) = \frac{\int_r^{+\infty}(1-F_X(x))dx}{\int_{-\infty}^r F_X(x)dx} - \frac{\int_r^{+\infty}(1-F_Y(x))dx}{\int_{-\infty}^r F_Y(x)dx} =$$

$$= \frac{E(X) - r + \int_{-\infty}^r F_X(x)\,dx}{\int_{-\infty}^r F_X(x)dx} - \frac{E(Y) - r + \int_{-\infty}^r F_Y(x)\,dx}{\int_{-\infty}^r F_Y(x)dx} =$$

$$= \frac{E(X)-r}{\int_{-\infty}^r F_X(x)dx} + 1 - \frac{E(Y)-r}{\int_{-\infty}^r F_Y(x)dx} - 1 = \frac{E(X)-r}{\int_{-\infty}^r F_X(x)dx} - \frac{E(Y)-r}{\int_{-\infty}^r F_Y(x)dx} \geq 0$$

Na podstawie nierówności (6)-(8) ostatnia różnica jest nieujemna, zatem $\Omega_X(r) - \Omega_Y(r) \geq 0$ (oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in \mathrm{S}$ zachodzi $\Omega_X(r) - \Omega_Y(r) > 0$), co oznacza, że $\mathrm{X} \succ_\Omega \mathrm{Y}$.

Twierdzenia odwrotne nie są prawdziwe, co potwierdza następujący przykład.

Przykład: Rozważmy zmienne losowe *X* oraz *Y* o rozkładach dyskretnych odpowiednio:

X	1	5
P(*X*)	1/2	1/2

Y	0	4
P(*Y*)	1/3	2/3

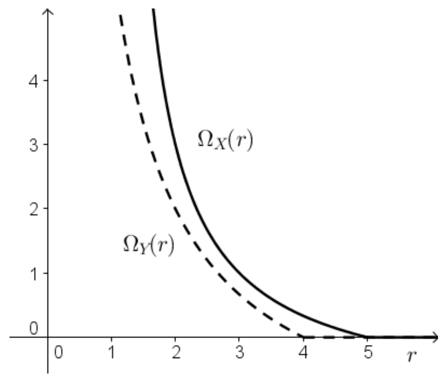
Dla zmiennej losowej X funkcja Ω_X ma postać:

$$\Omega_X(r) = \begin{cases} +\infty & r \leq 1 \\ \dfrac{5-r}{r-1} & 1 < r < 5 \\ 0 & r \geq 5 \end{cases}$$

zaś dla zmiennej losowej Y otrzymujemy:

$$\Omega_Y(r) = \begin{cases} +\infty & r \leq 0 \\ \dfrac{8-2r}{r} & 0 < r < 4 \\ 0 & r \geq 4 \end{cases}$$

Analizując wykresy funkcji Ω_X i Ω_Y przedstawione na rys. 3 stwierdzamy, że zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie funkcji omega, tzn. $X \succ_\Omega Y$, ponieważ dla każdego $r \in R$ zachodzi nierówność $\Omega_X(r) \geq \Omega_Y(r)$.



Rys. 3. Wykresy funkcji $\Omega_X(r)$ i $\Omega_Y(r)$
Źródło: Opracowanie własne.

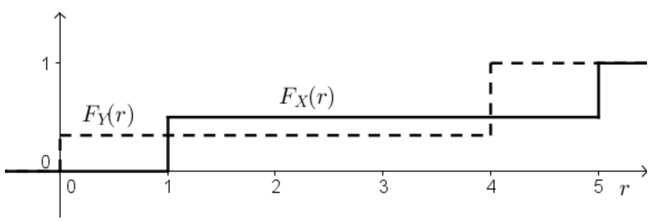
Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać:

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & r < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq r < 5 \\ 1 & r \geq 5 \end{cases}$$

a dystrybuanta zmiennej losowej Y to funkcja:

$$F_Y(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq r < 4 \\ 1 & r \geq 4 \end{cases}$$

Rysunek 4 przedstawia wykresy dystrybuant F_X i F_Y zmiennych losowych X i Y.



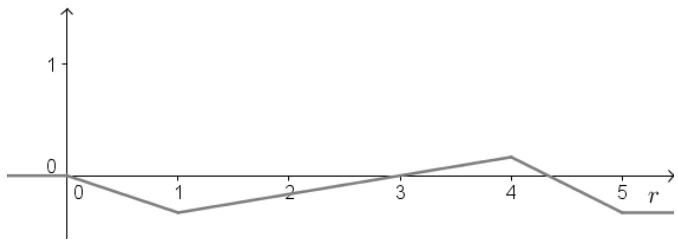
Rys. 4. Wykresy dystrybuant zmiennych losowych X i Y
Źródło: Opracowanie własne.

Zmienna losowa X nie dominuje zmiennej losowej Y w sensie dominacji stochastycznej stopnia pierwszego (FSD). Ponadto różnice $F_X^{(2)}(r) - F_Y^{(2)}(r)$ skumulowanych dystrybuant zmiennych losowych X i Y, gdzie:

$$F_X^{(2)}(r) = \begin{cases} 0 & r < 1 \\ \dfrac{r-1}{2} & 1 \le r < 5 \\ r-3 & r \ge 5 \end{cases}$$

$$F_Y^{(2)}(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \dfrac{r}{3} & 0 \le r < 4 \\ \dfrac{3r-8}{3} & r \ge 4 \end{cases}$$

przyjmują wartości większe od zera lub mniejsze od zera (rys. 5), co oznacza, że dla zmiennych losowych X i Y nie zachodzi także dominacja stochastyczna stopnia drugiego (SSD).



Rys. 5. Wykres wartości różnic $F_X^{(2)}(r) - F_Y^{(2)}(r)$ skumulowanych dystrybuant zmiennych losowych X i Y

Źródło: Opracowanie własne.

Uporządkowanie losowych wariantów decyzyjnych względem kryterium dominacji w sensie funkcji omega nie pociąga więc uporządkowania tychże elementów względem kryteriów dominacji stochastycznych pierwszego czy drugiego stopnia.

Podsumowanie

Funkcja omega znajduje praktyczne zastosowanie w analizach finansowych. Wartość funkcji omega dla ustalonej wartości progowej (inaczej wskaźnik omega) jest miarą efektywności inwestycji, np. funduszy inwestycyjnych. Inną miarą stosowaną w porównywaniu wariantów decyzyjnych (wariantów inwestycyjnych) są dominacje stochastyczne uznawane za miarę obiektywną. Ustalenie zależności między tymi dwoma kryteriami ma istotne znaczenie dla praktyki. W artykule stwierdzono, że kryterium dominacji stochastycznej i dominacji w sensie funkcji omega nie są równoważne.

Relacja dominacji stochastycznej i relacja dominacji w sensie funkcji omega są relacjami porządku częściowego w zbiorze losowych wariantów decyzyjnych. Zatem jedynie w sytuacji, gdy w danym zbiorze wszystkie losowe warianty decyzyjne będą uporządkowane względem kryterium dominacji stochastycznej, otrzymane porządki będą zgodne. W praktyce oznacza to możliwość stosowania dominacji stochastycznych do porządkowania wariantów inwestycyjnych ze względu na ich efektywność, niezależnie od przyjętej wartości progowej.

Literatura

Hanoch G., Levy H. (1969), *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk*, „Review Economic Studies", 36.

Keating C., Shadwick W. (2002), *A Universal Performance Measure*, „Journal of Performance Measurement", 6 (3).

Kopańska-Bródka D. (1999), *Optymalne decyzje inwestycyjne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Levy H. (1992), *Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis*, „Management Science", 38.

RELATIONSHIP BETWEEN OMEGA FUNCTION AND STOCHASTIC DOMINANCE

Summary: Stochastic dominance is a partial order in the set of random decision alternatives. Similarly, a partial order is the relation based on omega function proposed in 2002 by Keating and Shadwick, which is used as a performance measure for the valuation and ordering of investment alternatives. The purpose of this article is to examine the consistency between the ordering according to stochastic dominance and the ordering according to omega function. We also present relationships between these criteria.

Keywords: stochastic dominance, omega function, performance measure.