Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 241 · 2015

Informatyka i Ekonometria 3

Joanna Zwierzchowska

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Nieliniowej Analizy Matematycznej i Topologii
joanna.zwierzchowska@mat.umk.pl

STRATEGIE SEMI-KOOPERATYWNE W GRACH RÓŻNICZKOWYCH MODELUJĄCYCH PROBLEMY DUOPOLU

Streszczenie: Dynamiczne modele duopolu są obiektem zainteresowania osób zajmujących się teorią gier od wielu lat. Typowym podejściem do rozwiązania tak zadanego problemu jest poszukiwanie równowag Nasha wśród strategii w pętli zamkniętej. Sposób ten opiera się na pomocniczym wykorzystaniu funkcji wartości, które spełniają układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Niestety, uzyskany w ten sposób układ w ogólności nie jest dobrze postawionym problemem, co oznacza, że niezasadne jest poszukiwanie numerycznego rozwiązania zagadnienia. Nowym podejściem są strategie semi-kooperatywne, pozwalające na badanie ukrytej kooperacji między graczami. W tym wypadku układ równań różniczkowych opisujących funkcje wypłaty jest hiperboliczny, co jest niezbędne, by jego rozwiązanie istniało i było wyznaczone jednoznacznie. Teoria ta może być efektywnie wykorzystana w przypadku modelu Lanchestera, co zostanie pokazane w niniejszym artykule.

Słowa kluczowe: gry różniczkowe modelujące duopol, model Lanchestera, strategie semi-kooperatywne, hiperboliczne równania różniczkowe cząstkowe.

Wprowadzenie

Badacze zajmujący się grami różniczkowymi, przed przystąpieniem do analizy, muszą zdecydować o dwóch sprawach. Pierwsza – to określenie rodzaju interesującego ich rozwiązania. Standardowo w grach niekooperacyjnych rozważa się równowagę Nasha jako rozwiązanie optymalne. Następnie należy określić zbiór informacyjny, do którego mają dostęp gracze przed podjęciem decyzji.

Najprostszą postacią zbioru informacyjnego jest odcinek obrazujący czas, w jakim ma być rozgrywana gra. Oznacza to, że strategią gracza jest funkcja działająca na zadanym przedziale w zbiór dopuszczalnych wyborów gracza. Strategie takie nazywamy strategiami w pętli otwartej. Podejście oparte na strategiach w pętli otwartej jest bardzo dobrze opisane w literaturze [np. Basar i Olsder, 1999; Dockner i in., 2000],a co ważniejsze – równowaga Nasha w pętli otwartej jest efektywnie wyliczalna w przypadkach empirycznych. Nie jest to jednak rozwiązanie racjonalne w każdej sytuacji.

Łatwo zauważyć, że podejmowanie decyzji, opierając się tylko na chwili, w jakiej znajduje się gra, nie jest realistycznym założeniem. W wielu sytuacjach najważniejszym czynnikiem decydującym o wyborze zachowania jest stan, w jakim znajduje się układ. Najprostszym przykładem jest problem optymalizacyjny, gdzie jeden gracz – osoba sterująca – kieruje pojazdem w taki sposób, aby dojechać do wyznaczonego celu. Kierowca nigdy nie decyduje o kierunku jazdy czy prędkości samochodu, posługując się tylko zegarkiem. Sterujący musi obserwować drogę,czyli śledzić stan, w którym znajduje się pojazd. Strategie zależneod czasu i stanu układu nazywamy strategiami w pętli zamkniętej.

Przedmiotem poniższego artykułu jest przedstawienie ostatnich wyników dla problemu znalezienia optymalnego rozwiązania gry różniczkowej o dynamice zadanej równaniem:

$$\dot{x} = f(x) + \varphi(x)u_1 + \psi(x)u_2$$

Standardowa definicja rozwiązania gry niekooperacyjnej – równowaga Nasha – nie jest dobrym wyjściem, ze względu na problem braku stabilności układu opisującego funkcję wypłat w tym przypadku. W artykule zostaną nakreślone problemy, jakie występują przy rozważaniu równowag Nashaw pętli zamkniętej oraz zostaną wspomniane metody poradzenia sobiez tymi problemami.

W sekcji drugiej zostanie przedstawione nowe podejście [Bressani Shen, 2004], czyli strategie semi-kooperatywne uwzględniające ukrytą kooperację między graczami. W ogólności rozwiązaniem problemu przy tych strategiach nie jest równowaga Nasha. Podstawową zaletą tego podejścia jest fakt, iż układy, które są generowane przez tego typu strategie, mają własności pozwalające na poszukiwanie rozwiązań w sposób numeryczny. Niestety, w obecnej chwili nie ma gotowych algorytmów.

Do określenia strategii semi-kooperatywnych wykorzystuje się pojęcie Pareto-optymalności. W wyborze jednego z możliwych optimów Pareto ukryta jest kooperacja graczy. Powstaje problem, w jaki sposób gracze powinni dokonywać jednoznacznego wyboru, aby wyselekcjonowany punkt spełniał oczekiwania zarówno graczy (maksymalizacja zysków), jak i badaczy (warunek powinien mieć własności pozwalające na znalezienie szukanego punktu w sposób analityczny). Okazuje się, że wykorzystując rozwiązanie Nasha dla problemów przetargowych, można określić punkt Pareto – optymalny, dający wybór racjonalny i analitycznie wyliczalny w rozważanych przypadkach. Wybór ten uwzględnia również ewentualną przewagę jednego gracza nad drugim.

Ostatnia część artykułu przedstawia zastosowanie wcześniej wprowadzonej teorii do gry różniczkowej, której dynamika zadana jest przez model Lanchestera. Pierwotnie służył on do opisu działań wojennych, jednak od drugiej połowy lat 50. XX w. funkcjonuje jako model duopolu. Na przestrzeni lat model ten wykorzystywano zarówno w rozważaniach teoretycznych [Breton i in., 1996; Jarrar i in., 2004], jak i do badań empirycznych analizujących rynki, takie jak: Coca-Cola vs Pepsi-Cola, Marlboro vs Winston (papierosy) czy Anheuser-Busch vs Miller (piwo) [Chintagunta i Vilcassim, 1992; Erickson, 1992; Fruchter i Kalish, 1997; Wang i Wu, 2001; Breton i in., 2006]. W artykule zostanie przedstawiona procedura wyznaczania strategii semi-kooperatywnych dla duopolu Lanchestera.

1. Gry różniczkowe i strategie w pętli zamkniętej

Gry różniczkowe składają się z równania różniczkowego opisującego stan układu oraz z funkcjonałów obrazujących wypłaty graczy na koniec rozgrywki. Strategie wybrane przez uczestników gry wpływają na ewolucję stanu układu w czasie oraz na wypłaty graczy. Przedmiotem dalszych rozważań jest gra różniczkowa, w której konkuruje ze sobą dwóch przeciwników.

Ewolucja stanu układu w czasie jest zadana następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x} = F(x, u_1, u_2), \text{ gdzie } x \in R^m,\ u_1, u_2 \in R^n \tag{1}$$

wraz z warunkiem początkowym:

$$x(\tau) = y \in R^m \tag{2}$$

Gracz pierwszy i drugi muszą podjąć decyzję o wyborze strategii odpowiednio $u_1(t)$ i $u_2(t)$ w taki sposób, by maksymalizować swój funkcjonał zysku:

$$J_i(\tau, y, u_1, u_2) = g_i(x(T)) - \int_\tau^T h_i(x(t), u_i(t))dt, \text{ gdzie } i = 1,2 \tag{3}$$

Funkcja zysku końcowego i-tego gracza: $g_i : R^m \to R$ jest nieujemna i gładka, a funkcja kosztów pośrednich i-tego gracza: $h_i : R^m \times R^n \to R$ jest funkcją gładką taką, że funkcja $h_i(x,\cdot)$ jest ściśle wypukła dla dowolnego $x \in R^m$.

Powyższe obiekty są zapisane przy użyciu sterowań w pętli otwartej ($u_1(t)$, $u_2(t)$ zależą tylko od zmiennej czasu). Jeśli gracze stosują sterowania w pętli zamkniętej $u_i(t,x)$, to wstawiając je do równania (1), można znaleźć związaną z tymi strategiami trajektorię $x(t)$. Oznaczając $u_i(t) = u_i(t, x(t))$, określa się sterowania w pętli otwartej, wyznaczoneprzez wybrane sterowania w pętli zamkniętej. Powyższy zapis ma sens w przypadku obu rodzajów sterowań.

Podstawowym narzędziem służącym do optymalizacji wypłat w grach niekooperacyjnych jest pojęcie równowagi Nasha.

Definicja 1. Niech U_i będzie zbiorem sterowań w pętli zamkniętej i-tego gracza, tzn. $U_i = \{u_i : [\tau, T] \times R^m \to R^n\}$ dla $i = 1,2$. Równowagą Nashaw pętli zamkniętej dla problemu (1)–(3) nazywamy parę strategii $(u_1^N, u_2^N) \in U_1 \times U_2$, spełniającą następujące warunki:

1. Dla dowolnego $u_1 \in U_1$ zachodzi: $J_1(\tau, y, u_1, u_2^N) \le J_1(\tau, y, u_1^N, u_2^N)$.
2. Dla dowolnego $u_2 \in U_2$ zachodzi: $J_2(\tau, y, u_1^N, u_2) \le J_2(\tau, y, u_1^N, u_2^N)$.

Gracz używający strategię równowagi Nasha ma zagwarantowane, że jego przeciwnik nie zyska, stosując dowolną inną strategię w pętli zamkniętej.

Standardową procedurą wyznaczania równowagi Nasha w pętli zamkniętej jest znalezienie ograniczonych i gładkich funkcji $V_i(\tau, y)$, spełniających układ równań Hamiltona – Jacobiego – Bellmana:

$$\begin{cases} V_{1,t} + H_1(x, \nabla_x V_1, \nabla_x V_2) = 0 \\ V_{2,t} + H_2(x, \nabla_x V_1, \nabla_x V_2) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

wraz z warunkiem końcowym:

$$\begin{cases} V_1(T, x) = g_1(x) \\ V_2(T, x) = g_2(x) \end{cases} \tag{5}$$

gdzie Hamiltoniany $H_i : R^{3m} \to R$ określone są za pomocą następującego algorytmu. Z problemem (1)–(3) stowarzysza się funkcjonały natychmiastowego zysku:

$$Y_i(x, p_1, p_2, u_1, u_2) = p_i \cdot F(x, u_1, u_2) - h_i(x, u_i) \text{ dla } i = 1,2$$

Przy ustalonych $x, p_1, p_2 \in R^m$ rozważa się grę statyczną dla dwóch graczy, o wypłatach zadanych funkcjami odpowiednio $Y_1(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot)$ oraz $Y_2(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot)$. Równowaga Nasha $(u_1^*(x, p_1, p_2), u_2^*(x, p_1, p_2))$ gry statycznej $\{Y_1(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot), Y_2(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot)\}$ wyznacza Hamiltonianyw układzie (4) w następujący sposób:

$$H_i(x, p_1, p_2) = Y_i(x, p_1, p_2, u_1^*(x, p_1, p_2), u_2^*(x, p_1, p_2)),\ i = 1,2$$

Związek rozwiązania (V_1, V_2) problemu (4)–(5) z równowagą Nasha w pętli zamkniętej problemu (1)–(3) wykazuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Przy powyższych oznaczeniach, jeśli $u_1^*(x, p_1, p_2)$, $u_2^*(x, p_1, p_2)$, $H_1(x, p_1, p_2)$, $H_2(x, p_1, p_2)$ są funkcjami gładkimi oraz istnieje $V = (V_1, V_2)$ – jedyne rozwiązanie klasyczne zagadnienia (4)–(5)to strategie w pętli zamkniętej, zdefiniowane następująco:

$$u_i^N(t, x) = u_i^*(x, \nabla_x V_1(t, x), \nabla_x V_2(t, x))$$

są równowagą Nasha w pętli zamkniętej problemu (1)–(3), a funkcje wypłaty wyznaczone przez te sterowania:

$$J_i^N(\tau, y) = J_i(\tau, y, u_1^N, u_2^N)$$

spełniają równość: $J_i^N(\tau, y) = V_i(\tau, y)$ dla każdego $\tau \in [0, T]$, $y \in R^m$, $i = 1,2$.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy Basara i Olsdera [1999]. Procedura znalezienia równowagi Nasha w pętli zamkniętej jest określona w konkretny sposób, jednak aby znaleźć te strategie, potrzebne są gradienty funkcji wypłaty właśnie przy tych szukanych strategiach. Obiekty występujące w problemie są ze sobą uwikłane w istotnym stopniu.

Warto zauważyć, że przy rozważaniu sterowań w pętli zamkniętej, poszukiwanie rozwiązania problemu (1)–(3) [zadanego zagadnieniem początkowym], zostaje zamienione na problem rozwiązania układu (4)–(5), występującego w postaci zagadnienia końcowego.

Mankament Twierdzenia 1. kryje się w fakcie, iż bardzo rzadko zdarza się, by optymalne sterowania i funkcje wypłaty im odpowiadające, były funkcjami gładkimi. To sprawia, że twierdzenie, mimo że bardzo wartościowe teoretycznie, ma małe zastosowanie w praktyce. Dodatkowo, jak pokazali Bressan i Shen [2004], w ogólności zagadnienia typu (4)–(5), generowane przez równowagę Nasha, nie są dobrze postawionymi problemami. Zagadnienie jest dobrze postawionym problemem, gdy posiada jednoznaczne rozwiązanie, które jest zależne w sposób ciągły od warunków początkowych. Uwaga Bressana i Shen postawiła pod znakiem zapytania zasadność poszukiwania rozwiązania numerycznego tak zadanego problemu, gdyż jest on niezwykle czuły na wszelkie, nawet najdrobniejsze, zmiany warunków początkowych.

2. Strategie semi-kooperatywne

Równowaga Nasha w ogólności generuje układy niestabilne, dlatego powstało pytanie, jak radzić sobie z problemem znalezienia optymalnego rozwiązania gry (1)–(3). Jedną z możliwości jest pozostanie przy równowadze Nasha jako rozwiązaniu i rozważanie tylko problemów liniowo-kwadratowych, dla których istnieje kompletna teoria [Bassar i Olsder, 1999; Engwerda, 2005]. Podejście to ogranicza jednak różnorodność rozważanych dynamik (model Lanchestera nie jest problemem typu liniowo-kwadratowego). Innym wyjściem jest wykorzystanie aproksymacji analizowanej gry stochastycznymi grami różniczkowymi [Shen, 2009], dla których równania Hamiltona – Jacobiego mają jednoznaczne rozwiązanie [Friedman, 1972; Manucci, 2004]. Należy jednak pamiętać, że nie mamy gwarancji, iż będzie istniała funkcja graniczna, będąca rozwiązaniem wyjściowej gry różniczkowej.

Najbardziej obiecujące podejście zaproponowali Bressan i Shen [2004]. Zamiast równowagi Nasha wykorzystują oni pojęcie Pareto-optymalności do określenia nowego rozwiązania gry. Jak się okazało, uzyskane przez nich wyniki dla dynamiki $\dot{x} = f(x) + u_1 + u_2$ udało się uogólnić na rodzinę dynamik, do której należy model Lanchestera [Zwierzchowska, 2015].

2.1. Główny wynik

Niech stan układu będzie opisany równaniem:

$$\dot{x} = f(x) + \varphi(x)u_1 + \psi(x)u_2 \tag{6}$$

gdzie: $x \in R^m$, $u_1, u_2 \in R^n$, natomiast $f : R^m \to R^m$, $\varphi, \psi : R^m \to R^n$ są funkcjami gładkimi. Dodatkowo rozważamy stan początkowy (2) oraz funkcjonały zysku (3) wraz z założeniami o funkcjach zysku końcowego oraz o funkcjach kosztów pośrednich.

Podejście Bressana i Shen [2004] oparte jest na rozwiązaniach Pareto-optymalnych gier zadanych przez funkcjonały natychmiastowego zysku, które w przypadku (6) przyjmują postać:

$$Y_i(x, p_1, p_2, u_1, u_2) = p_i \cdot (f(x) + \varphi(x)u_1 + \psi(x)u_2) - h_i(x, u_i)$$

Definicja 2. Niech gra będzie zadana przez funkcje wypłaty $Y_1(u_1, u_2)$, $Y_2(u_1, u_2)$. Multistrategię (u_1^P, u_2^P) nazywamy Pareto-optymalną, jeśli nie istnieje multistrategia (u_1, u_2) taka, że

$$Y_1(u_1, u_2) > Y_1(u_1^P, u_2^P) \text{ oraz } Y_2(u_1, u_2) > Y_2(u_1^P, u_2^P)$$

Jedną z metod znajdowania punktów Pareto-optymalnych jest maksymalizacja funkcjonału $Y_s = sY_1 + Y_2$ dla dowolnego, ustalonego $s > 0$ (w istocie jest to warunek dostateczny Pareto-optymalności). Procedura wygląda następująco.

Analogicznie do przypadku równowagi Nasha, ustala się $x, p_1, p_2 \in R^m$ i rozważa się grę statyczną zadaną przez funkcjonały natychmiastowego zysku. Za pomocą warunku dostatecznego, poszukuje się sterowań Pareto-optymalnych:

$$(u_1^P(x, p_1, p_2, s), u_2^P(x, p_1, p_2, s)) = \\ = \arg\max\{sY_1(x, p_1, p_2, u_1, u_2) + Y_2(x, p_1, p_2 u_1, u_2) : u_1, u_2\} \qquad (7)$$

W ten sposób dla ustalonych $x, p_1, p_2 \in R^m$ można otrzymać całą rodzinę strategii Pareto-optymalnych, indeksowanych literą $s > 0$. Należy pamiętać, że przy takim podejściu rodzi się pytanie, w jaki sposób wybierać odpowiednie $s > 0$ dla $x, p_1, p_2 \in R^m$ tak, aby wybór był sensowny. Problem ten został opisany w sekcji 2.2.

Załóżmy, że gracze dokonali wyboru stałej $s > 0$ dla każdego możliwego układu $x, p_1, p_2 \in R^m$. Oznacza to, że dysponują funkcją $s : R^{3m} \to (0, \infty)$, wyznaczającą w sposób jednoznaczny wybory Pareto-optymalne dla rozważanej gry statycznej. Możliwe jest zdefiniowanie strategii

$$u_i^s(x, p_1, p_2) = u_i^P(x, p_1, p_2, s(x, p_1, p_2)) \text{ dla } i = 1,2 \qquad (8)$$

Bressan i Shen [2004] nazwali (8) strategiami semi-kooperatywnymi, gdyż dopuszczają one pewnego rodzaju kooperację między graczami (odzwierciedla to wybór funkcji $s(x, p_1, p_2)$).

Hamiltoniany są definiowane jako wartość funkcjonałów zysku przy strategii semi-kooperatywnej:

$$H_i(x, p_1, p_2) = Y_i(x, p_1, p_2, u_1^s(x, p_1, p_2), u_2^s(x, p_1, p_2)),\ i = 1,2$$

Jeśli określimy funkcje wartości jako

$$V_i\ (\tau, y) = J_i(\tau, y, u_1^s, u_2^s) \tag{9}$$

i są one gładkie, wówczas spełniają układ równań Hamiltona – Jacobiego:

$$\begin{cases} V_{1,t} + H_1(x, \nabla_x V_1, \nabla_x V_2) = 0 \\ V_{2,t} + H_2(x, \nabla_x V_1, \nabla_x V_2) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

wraz z warunkiem końcowym:

$$\begin{cases} V_1(T, x) = g_1(x) \\ V_2(T, x) = g_2(x) \end{cases} \tag{11}$$

Twierdzenie 2. Niech będzie dana gra o dynamice (6) wraz z warunkiem początkowym (2) i funkcjonałami zysku (3). Jeśli gradienty (p_1, p_2) funkcji wartości (V_1, V_2), zdefiniowanej w (9), należą do pewnego otwartego zbioru $\Omega \subseteq R^{2m}$, gracze stosują strategie semi-kooperatywne zdefiniowane w (8) oraz funkcja $s(x, p_1, p_2)$ jest gładka, wówczas układ (10) jest słabo hiperboliczny na obszarze Ω. Co więcej, w przypadku jednowymiarowej przestrzeni stanu ($m = 1$), układ (10) jest hiperboliczny poza skończoną ilością krzywych na płaszczyźnie (p_1, p_2).

Dowód zamieszczony jest w pracy [Zwierzchowska, 2015]. Powyższe twierdzenie jest istotnym uogólnieniem twierdzenia Bressana i Shen [2004], gdyż pozwala na stwierdzenie hiperboliczności układu opisującego funkcje wartości dla szerszej klasy problemów.

Twierdzenie 2. ma zasadniczą wartość dla badań empirycznych, gdyżz hiperbolicznością układu (10) ściśle związane jest zagadnienie istnieniai jednoznaczności rozwiązania oraz jego ciągłej zależności od warunków początkowych (co jest równoznaczne z tym, że układ (10) jest dobrze postawionym problemem) [Bressan i Shen, 2004]. Przedstawiona teoria zostanie zilustrowana przy pomocy modelu Lanchestera (sekcja 3.), dlatego zagadnienie hiperboliczności zostanie omówione dla sytuacji gry z jednowymiarową przestrzenią stanu.

Załóżmy, że istnieje klasyczne rozwiązanie $V = (V_1, V_2)$ układu (10), który w jednowymiarowej sytuacji $(m = 1)$ przyjmuje postać:

$$\begin{cases} V_{1,t} + H_1(x, V_{1,x}, V_{2,x}) = 0 \\ V_{2,t} + H_2(x, V_{1,x}, V_{2,x}) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Różniczkując powyższy układ i oznaczając $W = V_x$, otrzymuje się quasi-liniowy układ równań postaci:

$W_t + A(x,W)W_x = -b(x,W)$ gdzie macierz $A(x,W)$ i wektor $b(x,W)$ są zadane następującymi wzorami:

$$A(x,W) = \left[\frac{\partial H_i(x,W)}{\partial p_j}\right]_{i,j=1}^2 \qquad \text{oraz} \qquad b(x,W) = \left[\frac{\partial H_i(x,W)}{\partial x}\right]_{i=1}^2$$

Definicja 3. Układ (12) jest słabo hiperboliczny, gdy macierz $A(x,W)$ ma dwie rzeczywiste wartości własne $\lambda_1(x,W) \le \lambda_2(x,W)$. Układ (12) jest hiperboliczny wtedy i tylko wtedy, gdy wektory własne macierzy $A(x,W)$ tworzą bazę w przestrzeni R^2.

Teoria [Bressan i Shen, 2004; Serre, 2000] wykazuje,że hiperboliczność jest warunkiem koniecznym na to, aby układ typu (10) był dobrze postawionym problemem. Co więcej, są to jedyne warunki strukturalne, które ma spełniać wspominany układ, aby posiadał on jednoznaczne rozwiązanie. Reszta warunków wymaganych do uzyskania jednoznaczności rozwiązania dotyczy regularności funkcji składających się na problem. W świetle powyższych faktów Twierdzenie 2. daje podstawę do poszukiwania numerycznego rozwiązania układu (10).

2.2. Jednoznaczny wybór stopnia kooperacji

Strategie semi-kooperatywne są oparte na wyborze sterowania Pareto-optymalnego w grze statycznej opisanej funkcjonałami natychmiastowego zysku. Oznacza to, że dla dowolnych $x, p_1, p_2 \in R^m$, należy dokonać wyboru sterowania Pareto-optymalnego, który będzie racjonalnie uzasadniony i analitycznie wyliczalny. Zatem kluczowe dla określenia strategii semi-kooperatywnych: $u_i^s(x, p_1, p_2) = u_i^P(x, p_1, p_2, s(x, p_1, p_2))$ jest wskazanie odpowiedniej funkcji $s : R^{3m} \to (0,\infty)$.

Gra statyczna $\{Y_1(x, p_1, p_2,\cdot,\cdot), Y_2(x, p_1, p_2,\cdot,\cdot)\}$ posiada równowagę Nasha (oznaczoną przez $(u_1^*(x, p_1, p_2), u_2^*(x, p_1, p_2))$), dlatego możemy odnosić się do wypłat przy tych strategiach:

$$Y_i^N(x, p_1, p_2) = Y_i(x, p_1, p_2, u_1^*(x, p_1, p_2), u_2^*(x, p_1, p_2)) \text{ dla } i = 1,2$$

Zależność wypłat Pareto-optymalnych od funkcji $s(x, p_1, p_2)$ wyrażamy w następujący sposób:

$$Y_i^s(x, p_1, p_2) = Y_i(x, p_1, p_2, u_1^s(x, p_1, p_2), u_2^s(x, p_1, p_2)) \text{ dla } i = 1,2$$

Pierwszym warunkiem, jaki ma spełniać wybór sterowania Pareto-optymalnego, jest jego przewaga nad równowagą Nasha. Żądamy,by wypłaty przy sterowaniu Pareto-optymalnym były nie mniejsze niż przy równowadze Nasha:

$$Y_i^N(x, p_1, p_2) \le Y_i^s(x, p_1, p_2) \text{ dla każdego } i = 1,2 \qquad (13)$$

W innym wypadku jednemu z graczy nie opłaca się odrzucać równowagi Nasha. Warunek (13) może ograniczać rozważany zbiór rozwiązań Pareto--optymalnych, nie daje jednak jednoznaczności tego wyboru.

Niech $\widetilde{S}(x, p_1, p_2)$ oznacza zbiór stałych $s > 0$ spełniających warunek (13). Bressan i Shen [2004] zaproponowali, by jednoznaczność uzyskaćza pomocą warunku „sprawiedliwego". Każdy z graczy zyskuje tyle samow stosunku do wypłaty przy równowadze Nasha. Funkcja $s(x, p_1, p_2)$ ma zatem spełniać równość:

$$Y_1^s(x, p_1, p_2) - Y_1^N(x, p_1, p_2) = Y_2^s(x, p_1, p_2) - Y_2^N(x, p_1, p_2) \qquad (14)$$

W przypadku modelu Lanchestera (i nie tylko [Zwierzchowska, 2015]), warunek (14) wymusza numeryczne znajdowanie funkcji $s(x, p_1, p_2)$,co niepotrzebnie zwiększa błąd rozwiązania numerycznego. Drugą możliwością jest wykorzystanie rozwiązania Nasha problemu przetargowego [Zwierzchowska, 2015].

Definicja 4. Powiemy, że para Pareto-optymalna $(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) = (Y_1^S, Y_2^S)$ jest rozwiązaniem przetargowym Nasha [1950], gdy $S \in \widetilde{S}$ i $(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2)$ spełnia następujący warunek:

$$(\widetilde{Y}_1 - Y_1^N)(\widetilde{Y}_2 - Y_2^N) \ge (Y_1^s - Y_1^N)(Y_2^s - Y_2^N) \text{ dla każdego } s \in \widetilde{S} \qquad (15)$$

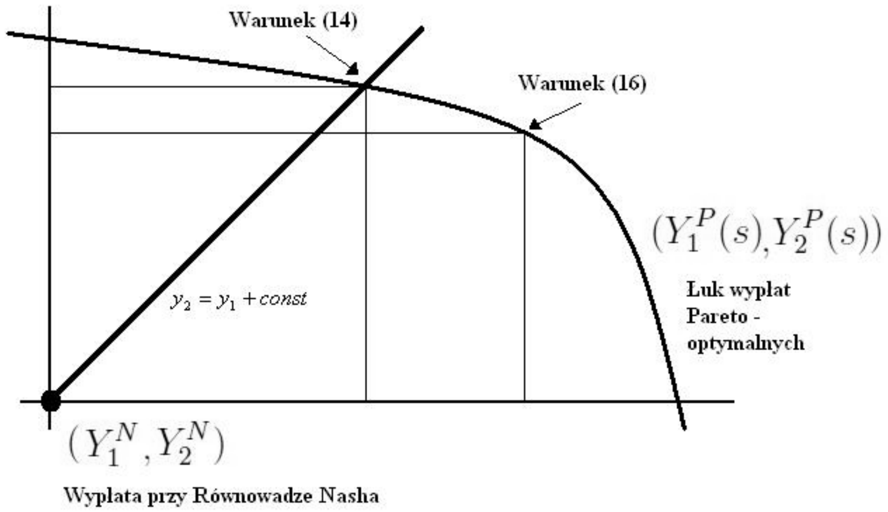
Warunek (14) może być przeformułowany w języku funkcji $s(x, p_1, p_2)$ w poniższy sposób:

$$s(x, p_1, p_2) =$$
$$= \operatorname{argmax}\{(Y_1^s(x, p_1, p_2) - Y_1^N(x, p_1, p_2))(Y_2^s(x, p_1, p_2) - Y_2^N(x, p_1, p_2)) :$$
$$s \in \widetilde{S}\} \qquad (16)$$

Jeśli obraz funkcji $(Y_1\ (x, p_1, p_2, \cdot, \cdot), Y_2\ (x, p_1, p_2, \cdot, \cdot))$ jest zbiorem wypukłym, wówczas warunek (16) określa funkcję $s : R^{3m} \to (0, \infty)$ w sposób poprawny.

Mimo że warunek (14) jest nazywany warunkiem sprawiedliwym, to w przypadkach niesymetrycznych użycie warunku (16) jest bardziej uzasadnione. Załóżmy, że obraz odwzorowania $Y\ (u_1, u_2) = (Y_1(u_1, u_2), Y_2(u_1, u_2))$ nie jest symetryczny względem prostej $y_2 = y_1 + const$, przechodzącej przez wypłaty przy równowadze Nasha. Wówczas tylko warunek (16) uwzględnia przewagę jednego gracza nad drugim i wskazuje optimum Pareto, które procentowo daje taki sam zysk obu graczom.

Sytuację niesymetryczną i wybory generowane przez warunki (14) i (16) ilustruje poniższy rysunek.



Rys. 1. Porównanie warunków jednoznacznego wyboru rozwiązania Pareto-optymalnego

Źródło: Badania własne.

3. Przykład – Model Lanchestera

Pierwotnie model Lanchestera powstał na potrzeby opisania zmianw podziale sił podczas działań wojennych. W latach 50. zeszłego wiekupo raz pierwszy został użyty do badania problemu duopolu (historię wykorzystania modelu i jego wariantów można znaleźć w publikacji [Huang, Leng i Liang, 2012]). W modelu zakłada się, że dwie firmy konkurują o udział w rynku za pomocą ustalenia wielkości własnych nakładów na reklamę. Dodatkowo, reklama każdej firmy wycelowana jest tylko w klientów konkurencji.

Niech $x_1(t) = x(t)$ oznacza udział w rynku pierwszej firmy w chwili $t \geq 0$, natomiast $x_2(t) = 1 - x(t)$ – udział w rynku drugiej firmy w chwili $t \geq 0$. Stan układu opisany jest równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = k_1(1 - x(t))u_1(t) - k_2 x(t) u_2(t)$$

gdzie $k_i > 0$ odzwierciedla skuteczność reklamy i-tego graczana zwolenników konkurencyjnej firmy, a $u_i(t)$ to strategia – nakład na reklamę – gracza i-tego w chwili $t \geq 0$. Wraz z dynamiką stowarzyszony jest standardowy warunek początkowy: $x(\tau) = y$.

Przykładowym funkcjonałem zysku, spełniającym założeniaTwierdzenia 2. i spotykanym w literaturze odnoszącej się do badań empirycznych [Wang i Wu, 2001], jest:

$$J_i(\tau, y, u_1, u_2) = \beta_i x_i(T) + \int_\tau^T \left[\alpha_i x_i(t) - \frac{1}{2} u_i^2(t) \right] dt \text{ dla } i = 1,2$$

Aby uzyskać układ (10) dla powyższego problemu, należy znaleźć strategie semi-kooperatywne (8). Do jednoznacznego wyboru sterowań Pareto-optymalnych posłuży warunek (16). Funkcjonały natychmiastowego zysku w tym przypadku przyjmują postać:

$$Y_i(x, p_1, p_2, u_1, u_2) = p_i(k_1(1 - x)u_1 - k_2 x u_2) + \alpha_i x_i - \frac{1}{2} u_i^2 \text{ dla } i = 1,2$$

Do znalezienia równowagi Nasha gry statycznej $\{Y_1(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot),\ Y_2(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot)\}$ wystarczy wykorzystać warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego. W tym celu różniczkuje się funkcję $Y_1(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot)$ po zmiennej u_1, natomiast funkcję $Y_2(x, p_1, p_2, \cdot, \cdot)$ po u_2. Przyrównując do zera otrzymane pochodne, dostaje się równowagę Nasha:

$$u_1^*(x, p_1, p_2) = k_1 p_1 (1 - x), \qquad u_2^*(x, p_1, p_2) = -k_2 p_2 x$$

Wypłaty Nasha dla funkcjonałów natychmiastowego zysku to:

$$Y_1^N(x, p_1, p_2) = Y_1(x, p_1, p_2, u_1^*(x, p_1, p_2), u_2^*(x, p_1, p_2)) =$$
$$= \frac{1}{2} k_1^2 (1 - x)^2 p_1^2 + k_2^2 x^2 p_1 p_2 + \alpha_1 x$$

i analogicznie

$$Y_2^N(x,p_1,p_2)=\frac{1}{2}k_2^2x^2p_2^2+k_1^2(1-x)^2p_1p_2+\alpha_2(1-x)$$

Do uzyskania sterowań Pareto-optymalnych posłuży warunek (7). Funkcjonałem poddawanym maksymalizacji jest:

$$Y_s(x,p_1,p_2)=s(p_1(k_1(1-x)u_1-k_2xu_2)+\alpha_1x-\frac{1}{2}u_1^2)+$$
$$+p_2(k_1(1-x)u_1-k_2xu_2)+\alpha_2(1-x)-\frac{1}{2}u_2^2$$

Korzystając z warunku koniecznego istnienia maksimum funkcji dwóch zmiennych, uzyskuje się wzór na sterowania Pareto-optymalne:

$$u_1^P(x,p_1,p_2,s)=k_1(1-x)(p_1+\frac{1}{s}p_2),\ \ u_2^P(x,p_1,p_2,s)=-k_2x(sp_1+p_2)$$

przy których wypłaty to:

$$Y_1^P(x,p_1,p_2,s)=Y_1(x,p_1,p_2,u_1^P(x,p_1,p_2.s),u_2^P(x,p_1,p_2,s))=$$
$$=\left(\frac{1}{2}k_1^2(1-x)^2+sk_2^2x^2\right)p_1^2+k_2^2x^2p_1p_2-\frac{1}{2s^2}k_1^2(1-x)^2p_2^2+\alpha_1x$$

$$Y_2^P(x,p_1,p_2,s)=$$
$$=\left(\frac{1}{s}k_1^2(1-x)^2+\frac{1}{2}k_2^2x^2\right)p_2^2+k_1^2(1-x)^2p_1p_2-\frac{1}{2}s^2k_2^2x^2p_1^2+\alpha_2(1-x)$$

Korzystając z warunku (16), otrzymuje się następujący wzór na funkcję:

$$s(x,p_1,p_2)=\left(\frac{k_1(1-x)p_2}{k_2xp_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

a strategie semi-kooperatywne przyjmują postać:

$$u_1^s(x,p_1,p_2)=k_1(1-x)\left(p_1+p_2\left(\frac{k_2xp_1}{k_1(1-x)p_2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$u_2^s(x,p_1,p_2) = -k_2 x \left(p_1 \left(\frac{k_1(1-x)p_2}{k_2 x p_1} \right)^{\frac{2}{3}} + p_2 \right)$$

Uzyskana funkcja $s(x,p_1,p_2)$ jest gładka, zatem na mocy Twierdzenia 2. układ (10), generowany przez powyższy problem, jest hiperboliczny (układ opisujący funkcje wypłaty przy strategiach semi-kooperatywnychdla modelu Lanchestera można znaleźć w artykule [Zwierzchowska, 2015]).

Biorąc pod uwagę szeroki wachlarz publikacji na temat badań empirycznych wykorzystujących model Lanchestara, naturalnym krokiem dopełniającym wiedzę na temat tego modelu, jest wyznaczenie strategii semi-kooperatywnych oraz układu (10). Jak wcześniej zauważono, strategie semi-kooperatywne $u_i^s(x,p_1,p_2)$, $i=1,2$, występują w postaci zawierającej gradienty funkcji wypłat. Na chwilę obecną brak gotowych programów rozwiązujących problemy z tak uwikłanymi ze sobą składowymi. Jednak teoria metod numerycznych dla układów quasi-liniowych daje podstawy, by sądzić, że w najbliższej przyszłości układ (10) zostanie rozwiązany dla modeli postaci (6).

W pracy [Zwierzchowska, 2015] można znaleźć inny przykład duopolu, pochodzący z pracy Bressana i Shen [2004], który również posiada dynamikę typu (6). Dla niego także wyliczony jest jednoznaczny wybór strategii semi-kooperatywnej oraz układ (10).

Podsumowanie

Strategie w pętli zamkniętej dla gier różniczkowych w dalszym ciągu nastręczają wielu problemów i rodzą sporo pytań. Mimo że szczególne przypadki (równowaga Nasha dla problemów liniowo-kwadratowych) są rozwiązywalne w tej klasie strategii, nie oznacza to, że udaje się uzyskać dostatecznie obiecujące rezultaty dla każdego typu dynamiki.

Z uwagi na to, że równowaga Nasha w ogólności prowadzi do niestabilnych układów równań różniczkowych cząstkowych, badacze stanęli przed problemem albo zmiany sposobu znajdowania równowagi Nasha(np. poprzez aproksymację stochastycznymi grami różniczkowymi,co nie zawsze kończy się powodzeniem), albo rozważania innego typu rozwiązania.

Bressan i Shen [2004] wprowadzili nową metodę. Biorą oni pod uwagę sterowania Pareto-optymalne dla funkcjonałów natychmiastowego zysku, a nie jak dotychczas – równowagi Nasha. W konsekwencji okazuje się,że model opisujący problem duopolu posiada wymagane własności [Zwierzchowska, 2015], by móc rozważać rozwiązania numeryczne.Co więcej, nowe podejście dostarcza dodatkowych informacji. Wyznaczając strategie semi-kooperatywne, uzyskuje się narzędzie do badania,czy gracze stosują ukrytą kooperację (zmowy cenowe), odzwierciedlonąw wybranej przez nich wspólnie funkcji $s(x, p_1, p_2)$.

Następnym etapem badań będzie wyznaczenie strategii semi-kooperatywnych w przypadku danych empirycznych. Porównanie uzyskanych w ten sposób wyników ze znanymi wynikami dla równowagi Nasha (np. [Wang i Wu, 2001]) pozwoli zbadać, czy na testowanych rynkach mamy do czynienia z grą niekooperacyjną, czy może jednakze zmową cenową.

Literatura

Basar T., Olsder G.J. (1999), *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2. edycja, SIAM, Nowy Jork.

Bressan A., Shen W. (2004), *Semi-cooperative Strategies for Differential Games*, „International Journal of Game Theory", Vol. 32, s. 561-593.

Breton M., Jarrar R., Zaccour G. (2006), *A Note on Feedback Sequential Equilibria in a Lanchester Model with Empirical Application*, „Management Sciences", Vol. 52, s. 804-811.

Breton M., Yezza A., Zaccour G. (1996), *Feedback Sackelberg Equilibria in a Dynamic Game of Advertising Competition: A Numerical Analysis*, S. Jorgensen, G. Zaccour (eds.), Springer-Verlag, Berlin.

Chintagunta P.K., Vilcassim N.J. (1992), *An Empirical Investigation of Advertising Strategies in a Dynamic Duopoly*, „Management Sciences", Vol. 38, s. 1230-1244.

Dockner E.J., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. (2000), *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press, Cambridge.

Engwerda J. (2005) *Linear-quadratic Dynamic Optimization and Differential Games*, John Wiley, New York.

Erickson G. (1992), *Empirical Analysis of Closed-loop Duopoly Advertising Strategies*, „Management Sciences", Vol. 38, s. 1732-1749.

Friedmann A. (1972), *Stochastic Differential Games*, „Journal of Differential Equation", Vol. 11, s. 79-108.

Fruchter G.E., Kalish S. (1997), *Closed-loop Advertising Strategies in a Duopoly*, „Management Sciences", Vol. 43, s. 54-63.

Huang J., Leng M., Liang L. (2012), *Recent Developments in Dynamic Advertising Research*, „European Journal of Operational Research", Vol. 220, s. 591-609.

Jarrar R., Martin-Herran G., Zaccour G. (2004), *Markov Perfect Equilibrium Advertising Strategies of Lanchester Duopoly Model. A Technical Note*, „Management Sciences".

Manucci P. (2004), *Nonzero Sum Stochastic Differentia Games with Dicontinuous Feedback*, „SIAM Journal on Control and Optimization", Vol. 43, s. 1222-1233.

Nash J. (1950), *The Bargaining Problem*, „Econometrica", Vol. 18, s. 155-162.

Serre D. (2000), *Systems of Conservation Laws I, II*, Cambridge University Press, Cambridge.

Shen W. (2009), *Non-cooperative and Semi-cooperative Differentia Games* (85-106) [w:] P. Bernhard, V. Gaitsgory i O. Pourtallier (eds.), *Advances in Dynamic Games and their Numerical Developments*, seria: Annals of ISDG, Vol. 10, Springer, Birkhauser.

Wang Q., Wu Z. (2001), *A Duopolistic Model of Dynamic Competitive Advertising*, „European Journal of Operational Research", Vol. 128, s. 213-226.

Zwierzchowska J. (2015), *Hyperbolicity of Systems Describing Value Functions in Differential Games which Model Duopoly Problems*, „Decision Making in Manufacturing and Services", Vol. 9.

SEMI-COOPERATIVE STRATEGIES IN DIFFERENTIAL GAMES WHICH MODEL DUOPOLY PROBLEMS

Summary: In the present paper, there is considered a class of non-cooperative differential finite horizon games for two players. Firstly, Nash equilibrium in feedback form are presented. In general, the systems of Hamilton-Jacobi equations generated by this strategies are ill-posed. Secondly, the paper is concerned with semi-cooperative strategies. In this case, the system of Hamilton-Jacobi equations is hyperbolic for duopoly problems. As semi-cooperative strategies are not unique, there is presented the application of Nash solution for bargaining problems to receive unique strategies. This approach is proper also for non-symetric situations. The theory is illustrated by Lanchester model.

Keywords: duopoly problems, Lanchester duopoly model, semi-cooperative strategies, hyperbolic partial differentia equations.