



### Agnieszka Orwat-Acedańska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
agnieszka.orwat@ue.katowice.pl

## ODPORNE MODYFIKACJE MODELU BLACKA–LITTERMANA NA PRZYKŁADZIE POLSKIEGO RYNKU KAPITAŁOWEGO

**Streszczenie:** W pracy rozważano portfele Markowitza, dla których charakterystyki aktywów składowych szacowano odpornymi metodami MVE oraz MCD, a także podejściem Blacka–Littermana, gdzie rozkład a priori specyfikowano na podstawie prognoz wykorzystujących wyniki badań ankietowych koniunktury. Na podstawie dziennych stóp zwrotu z indeksów sektorowych GPW obejmujących lata 2007-2013 analizowano empiryczne własności rozważanych portfeli. Pokazano, że metoda MVE generuje portfele bardzo konserwatywne, natomiast MCD – agresywne, niezależnie od przyjętych wartości punktów załamania. Uwzględnienie dodatkowo rozkładów a priori w podejściu Blacka–Littermana miało jedynie ograniczony wpływ na wyniki. Pokazano także, że korzystanie z wyników badań ankietowych koniunktury w klasycznym podejściu Blacka–Littermana jest uzasadnione przy dłuższych szeregach czasowych, na podstawie których były generowane prognozy stóp zwrotu aktywów składowych portfeli.

**Słowa kluczowe:** portfel Blacka–Littermana, estymator odporny MVE, estymator odporny MCD, rozkład a priori wiedzy eksperckiej, rozkład a posteriori.

### Wprowadzenie

Jednym z wyzwań dla rozwoju statystycznych metod nowoczesnej teorii portfela są podejścia umożliwiające ograniczenie skutków ryzyka estymacji (*estimation risk*). Ryzyko to związane jest z możliwością poniesienia straty w wyniku błędów estymacji parametrów modeli. Źródłem tego ryzyka w procesie wyboru portfela inwestycyjnego jest wrażliwość optymalizowanej funkcji klasycznej alokacji<sup>1</sup> na

<sup>1</sup> *Alokacja aktywów* rozumiana jest w niniejszej pracy jako dobór aktywów w różnych proporcjach (poprzez proces optymalizacji) w celu osiągnięcia możliwie najwyższej oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka.

nieznane wartości parametrów składowych portfela. W ich konsekwencji udziały portfela wyznaczone na podstawie klasycznej estymacji i optymalizacji nie są w rzeczywistości rozwiązaniem optymalnym, lecz sub-optymalnym, natomiast charakterystyki portfela obarczone są dużymi błędami i mogą się istotnie różnić od ich wartości rzeczywistych.

Do nieklasycznych metod alokacji aktywów służących ograniczeniu skutków ryzyka estymacji zaliczają się m.in. podejście odporne<sup>2</sup> (*robust allocation*), bayesowskie (*bayesian allocation*) i odporno-bayesowskie<sup>3</sup>, podejście oparte na technikach próbkowania (*sampling allocation*) oraz Blacka–Littermana (*Black–Litterman allocation*).

W przypadku metodologii zaproponowanej przez Blacka i Littermana [1990], wiedza ekspercka a priori dotyczy nie tylko wartości parametrów składowych portfela, lecz również samego rozkładu stóp zwrotu oraz innych wariantów związanych z rozkładem i dotyczących postawy inwestora wobec ryzyka estymacji. Model Blacka–Littermana (BL) wykorzystuje teorię równowagi [Sharpe, 1964, s. 425-442] w celu określania oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela. Jednak zasadniczą wadą oryginalnego modelu BL jest założenie, że stopy zwrotu mają rozkład normalny. W praktyce współczesnych rynków finansowych to założenie okazuje się zbyt restrykcyjne.

Niniejsza praca zawiera propozycję modyfikacji modelu BL „łagodzącą” restrykcyjność tego założenia. Celem pracy jest zaproponowanie i implementacja odpornych modyfikacji modelu Blacka–Littermana do wyboru portfela inwestycyjnego. Zastosowane podejście polega na wykorzystaniu wielowymiarowych estymatorów odpornych charakterystyk składowych portfeli: oczekiwanej stopy zwrotu oraz macierzy kowariancji. Wybranymi przez autorkę estymatorami odpornymi na wielowymiarowe obserwacje odstające są MCD-estymatory oraz MVE-estymatory. Wartości tych estymatorów są aplikowane w procedurze wyboru portfela Blacka–Littermana. Praca podejmuje problem weryfikacji użyteczności odpornych modyfikacji modelu Blacka–Littermana na przykładzie danych dotyczących indeksów sektorowych GPW. Realizacji postawionego celu pracy służy analiza porównawcza charakterystyk portfeli nieklasycznych: BL oraz jego odpornych modyfikacji z klasycznym portfelem Markowitza oraz jego odpornym odpowiednikiem.

Punkt pierwszy zawiera opis metodologii Blacka–Littermana. W szczególności jego pierwszy podpunkt poświęcony jest ogólnym założeniom tego modelu z wyszczególnionymi etapami procedury, a ostatnie dwa zawierają odpowied-

<sup>2</sup> Przykład implementacji metody na polskim rynku zawiera praca [Orwat-Acedańska, 2012].

<sup>3</sup> Problem oceny użyteczności tych metod podejmuje m.in. [Orwat-Acedańska, 2011; 2013].

nio: założenia o opinii eksperckiej wykorzystywanej przez inwestora, czyli o rozkładzie a priori oraz postaci parametrów rozkładu *a posteriori* Blacka–Littermana. W punkcie drugim opisano idee odpornych procedur estymacji: MVE i MCD. Przyjęte dodatkowe założenia teoretyczne dla modelu BL i jego modyfikacji opisano w rozdziale trzecim. Czwarty rozdział zawiera opis założeń badawczych i najważniejsze wyniki analizy empirycznej. Praca kończy się podsumowaniem.

## 1. Metodologia Blacka–Littermana (BL)

### 1.1. Ogólne założenia modelu BL

Rozważmy wektor stóp zwrotu  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)'$  dla  $N$  klas aktywów o rozkładzie normalnym  $\mathbf{R} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Wektor wartości oczekiwanych  $\boldsymbol{\mu}$  składowych portfela traktowany jest jako wektor losowy, którego dyspersja reprezentuje możliwy błąd estymacji. O wektorze tym zakładamy, że ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną  $\boldsymbol{\pi}$  i macierzą kowariancji  $\tau\boldsymbol{\Sigma}$ , co zapisujemy:

$$\boldsymbol{\mu} \sim N_N(\boldsymbol{\pi}, \tau\boldsymbol{\Sigma}) \quad (1)$$

gdzie  $\tau$  reprezentuje błąd estymacji związany z szacowaniem  $\boldsymbol{\mu}$ .

W pierwszym etapie procedury BL przy określeniu wektora wartości oczekiwanych  $\boldsymbol{\pi}$  metodologia BL odwołuje się do teorii równowagi. W tym aspekcie zakłada się, że inwestorzy, mając określone oczekiwania wobec przyszłych stóp zwrotu, dokonują wyboru portfela inwestycyjnego o wektorze udziałów  $\mathbf{w}$  na podstawie rozwiązania dwukryterialnego problemu optymalizacyjnego postaci [Meucci, 2009]:

$$\max_{\mathbf{w}} \{ \mathbf{w}'\boldsymbol{\pi} - \lambda \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \} \quad (2)$$

gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem awersji do ryzyka inwestycyjnego<sup>4</sup>. Rozwiązaniem tego zadania jest relacja postaci (4) :

$$\boldsymbol{\pi} \equiv 2\tilde{\lambda}\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\mathbf{w}} \quad (3)$$

gdzie macierz kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}$  szacowana jest na podstawie przeszłych obserwacji;  $\tilde{\mathbf{w}}$  jest wektorem udziałów portfela określanym na podstawie kapitalizacji

<sup>4</sup> W swojej pracy Black i Litterman przyjęli  $\tilde{\lambda} = 1,2$ .

poszczególnych aktywów składowych w stosunku do łącznej kapitalizacji wszystkich aktywów.

Wartości wektora  $\boldsymbol{\pi}$  oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela mogą być również oszacowane na podstawie przeszłych obserwacji. Parametr ten jest bardzo wrażliwy na występowanie obserwacji odstających, stąd istotną kwestią jest stosowanie nieklasycznych technik estymacji, m.in. opartych na teorii statystyki odpornej (*robust*) [Rousseeuw, Leroy, 2003, Zuo, 2005]. Inną propozycją dla estymacji wektora wartości oczekiwanej jest w tym miejscu teoria estymatorów uciętych typu *shrinkage* [Stein, 1995]. Jednak jak pokazano w [Orwat-Acedańska, 2014], charakterystyki portfeli BL wykorzystujące te estymatory nie różnią się znacząco od charakterystyk portfeli oryginalnego modelu BL. Natomiast poziom niepewności  $\tau$  w zależności (1) dotyczący rzeczywistych wartości parametru  $\boldsymbol{\mu}$  i będący źródłem błędu estymacji można kalibrować uwzględniając na przykład rozkład estymatora tego parametru, przyjmując za estymator średnią z próby. Wówczas:

$$\tau = \frac{1}{T} \quad (4)$$

gdzie  $T$  jest długością szeregów czasowych stóp zwrotu rozważanych aktywów portfela.<sup>5</sup>

Drugi etap procedury BL dotyczy określenia parametrów rozkładu a priori oceny eksperckiej (opis tej części zawarto w podpunkcie 1.2). W kolejnym kroku wyznaczone są (zgodnie z zasadą Bayesa) parametry rozkładu a posteriori stóp zwrotu (opis tej części zawarto w podpunkcie 1.3). W ostatnim etapie dokonywana jest optymalizacja portfela.

## 1.2. Założenia o opinii eksperckiej

Zakładamy, że opinia ekspercka (ocena) formułowana jest w odniesieniu do wartości oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela  $\boldsymbol{\mu}$ . Jest ona reprezentowana przez  $(K \times N)$ -wymiarową macierz  $\mathbf{P}$ , nazywaną w metodologii BL macierzą wskaźnikową. Każda  $k$ -ta kolumna tej macierzy określa zero-jedynkowe wagi odpowiadające opiniom dotyczącym poszczególnych składowych

<sup>5</sup> Satchell i Scowcroft [2000] proponują kalibrację  $\tau$  opartą na założeniu o jego stochastycznej naturze.

wektora oczekiwanych stóp zwrotu. Oczywiście, ocena ekspercka dotycząca oczekiwanych stóp zwrotu obciążona jest ryzykiem estymacji. Podejście BL zakłada, że ma ona rozkład [Meucci, 2010]:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \sim N_N(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (5)$$

gdzie meta-parametry  $\mathbf{v}$  oraz  $\boldsymbol{\Omega}$  kwantyfikują odpowiednio oczekiwaną ocenę ekspercką oraz niepewność związaną z opiniami ekspertów.

### 1.3. Rozkład a posteriori

Przy oznaczeniach i założeniach opisanych w poprzednich podpunktach, rozkład a posteriori wartości oczekiwanej  $\boldsymbol{\mu}$  jest postaci [Meucci, 2010]:

$$\boldsymbol{\mu}|\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}_{BL}, \boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu}), \text{ gdzie} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} \equiv \left( (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P} \right)^{-1} \left( (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{v} \right) \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu} \equiv \left( (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{P} \right)^{-1} \quad (8)$$

W celu odniesienia tego rozkładu bezpośrednio do wektora  $\mathbf{R}$  stóp zwrotu, konieczne jest przedstawienie tego wektora w postaci:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (9)$$

wówczas

$$\mathbf{R}|\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\mu}|\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{R}|\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}_{BL}, \boldsymbol{\Sigma}_{BL}) \quad (10)$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu}_{BL}$  jest wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* modelu BL i jest postaci (7), natomiast postać parametru  $\boldsymbol{\Sigma}_{BL}$  wynika z (9), przy założeniu, że wektory losowe  $\boldsymbol{\mu}$  i  $\mathbf{Z}$  są niezależne i wówczas:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} \equiv \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu} \quad (11)$$

## 2. Odporne modyfikacje modelu BL

Oprócz oryginalnego modelu BL opisanego w pierwszym punkcie, zastosowano w pracy pewne jego odporne modyfikacje, polegające na odstąpieniu od wykorzystania teorii równowagi do określenia wektora wartości oczekiwanych  $\boldsymbol{\pi}$  w zależności (3) oraz macierzy kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Do wyznaczenia ocen tych parametrów (służących następnie oszacowaniu parametrów rozkładu a posteriori Blacka–Littermana w zależnościach (7) i (11)) wykorzystano wielowymiarowe estymatory odporne MVE i MCD.

Niech  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)'$  będzie realizacją wektora losowego stóp zwrotu  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)'$  dla  $N$  klas aktywów, którego rozkład reprezentowany jest przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{r}}$ :

$$f_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \mathfrak{g}\left(Ma^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma})\right), \quad (12)$$

gdzie  $\mathfrak{g}$  jest generatorem funkcji  $f_{\mathbf{r}}$ ,  $Ma^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma})$  jest kwadratem odległości Mahalanobisa wektora obserwacji  $\mathbf{r}$  od wektora parametru położenia  $\boldsymbol{\pi}$  względem macierzy kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}$  wektora losowego  $\mathbf{R}$ .

$$Ma^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{r} - \boldsymbol{\pi})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{r} - \boldsymbol{\pi}) \quad (13)$$

Wybór estymatorów odpornych MVE i MCD podyktowany był przede wszystkim faktem, że posiadają one pożądane własności odporności. Mianowicie charakteryzują się wysokim punktem załamania (równym 0,5), nieograniczoną funkcją wpływu, małą maksymalną wrażliwością na błędy, wysoką asymptotyczną efektywnością, afiniczną ekwiwariantnością<sup>6</sup>.

## 2.1. Metoda elipsoidy minimalnej objętości – MVE

Idea metody elipsoidy minimalnej objętości (*Minimum Volume Ellipsoid – MVE*<sup>7</sup>) polega na estymacji wartości oczekiwanej  $\boldsymbol{\pi}$  oraz macierzy kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}$  odpornych na wielowymiarowe obserwacje nietypowe zidentyfikowane za pomocą najmniejszej elipsoidy tworzonej przez rdzeń<sup>8</sup> wielowymiarowych obserwacji. Odległości  $Ma(\mathbf{r}_t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  wektora obserwacji  $\mathbf{r}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  od parametru  $\boldsymbol{\pi}$  względem macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}$  porządkowane są rosnąco, a następnie rozważana jest  $t_d$ -ta odległość, gdzie  $T_D$  oznacza liczbę danych stanowiących rdzeń. Estymatory  $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MVE}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MVE}}$  są wyznaczone przez elipsoidę minimalnej objętości, gdy spełniony jest następujący warunek [Meucci, 2005]:

<sup>6</sup> Formalne definicje tych pojęć można znaleźć m.in. w [Trzpiot, red., 2013, rozdz. 1.2 i 1.3].

<sup>7</sup> Metoda została zaproponowana przez Rousseeuwa w 1985.

<sup>8</sup> W teorii metod odpornych „rdzeniem” nazywany jest zbiór obserwacji, do którego nie należą obserwacje odstające (nietypowe).

$$(\hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MVE}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MVE}}) = \arg \min_{\boldsymbol{\Sigma} \geq 0, |\boldsymbol{\Sigma}|=1, \boldsymbol{\pi}} Ma(\mathbf{r}_{T_D}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (14),$$

gdzie notacja  $\boldsymbol{\Sigma} \geq 0$  oznacza dodatnią określoność macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Elipsoida o promieniu  $q_{T_D} = Ma(\mathbf{r}_{T_D}, \hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MVE}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MVE}})$  ma najmniejszą objętość. Wartości estymatorów  $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MVE}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MVE}}$  mają postać:

$$\mathbf{m}_{T_D}^{\text{MVE}} = \frac{1}{T_D} \sum_{t=1}^{T_D} \omega_t \mathbf{r}_t, \quad \mathbf{S}_{T_D}^{\text{MVE}} = \frac{1}{T_D} \sum_{t=1}^{T_D} \omega_t (\mathbf{r}_t - \mathbf{m}_{T_D}^{\text{MVE}})(\mathbf{r}_t - \mathbf{m}_{T_D}^{\text{MVE}})' \quad (15)$$

gdzie  $\omega_t, t = 1, 2, \dots, T_D$  są odpowiednio dobranymi wagami takimi, że  $\sum_{t=1}^{T_D} \omega_t = T_D$ .

Algorytm wykrywania obserwacji nietypowych oraz estymacji odpornej parametrów  $\boldsymbol{\pi}$  oraz  $\boldsymbol{\Sigma}$  składa się z kilku etapów. W pierwszym etapie generowana jest elipsoida wyznaczona przez obserwacje pozostałe po odrzuceniu obserwacji najbardziej oddalonych. Następnie szacowany jest wektor położenia oraz macierz rozrzutu, dla których obliczane są odległości Mahalanobisa dla każdego wektora  $\mathbf{r}$ . Doboru odpowiednich wag  $\omega_t$  dokonuje się wykorzystując kryterium kwantyla rzędu 0,025 rozkładu chi-kadrat z  $N$  stopniami swobody aż do momentu wygenerowania elipsoidy o najmniejszej objętości, tworzącej rdzeń wielowymiarowych obserwacji.

## 2.2. Metoda minimalnego wyznacznika kowariancji – MCD

Idea metody minimalnego wyznacznika kowariancji (*Minimum Covariance Determinant* – MCD)<sup>9</sup> podobna jest do MVE. W podejściu tym określa się podzbiór  $\{\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \dots, \mathbf{r}_{T_D}^*\}$  obserwacji rdzenia, dla którego wyznacznik macierzy kowariancji  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}$  przyjmuje wartość minimalną. Estymatory  $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MCD}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MCD}}$  są wyznaczone przez minimalny wyznacznik kowariancji, gdy spełniony jest następujący warunek:

<sup>9</sup> MCD zaproponował P.J. Rousseeuw, który w 1999 r. wraz z K. van Dreissen przedstawił algorytm tej metody w pracy [Rousseeuw, van Dreissen, 1999].

$$(\hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MCD}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MCD}}) = \arg \min_{\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \dots, \mathbf{r}_{T_D}^*} \left| \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D} \right| \quad (16)$$

Wartości estymatorów  $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{T_D}^{\text{MCD}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T_D}^{\text{MCD}}$  są postaci:

$$\mathbf{m}_{T_D}^{\text{MCD}} = \frac{1}{T_D} \sum_{t=1}^{T_D} \omega_t \mathbf{r}_t^*, \quad \mathbf{S}_{T_D}^{\text{MCD}} = \frac{1}{T_D} \sum_{t=1}^{T_D} \omega_t (\mathbf{r}_t^* - \mathbf{m}_{T_D}^{\text{MCD}})(\mathbf{r}_t^* - \mathbf{m}_{T_D}^{\text{MCD}})' \quad (17)$$

gdzie  $\omega_t, t = 1, 2, \dots, T_D$  są odpowiednio dobranymi wagami.

### 3. Dodatkowe założenia o rozkładzie a priori modelu BL

Do zdefiniowania oceny eksperckiej a priori na temat oczekiwanych stóp składowych portfela BL i jego odpornych modyfikacji wykorzystano zależność liniową stóp zwrotu każdego z rozważanych indeksów sektorowych od wskaźnika koniunktury w danym sektorze. W tym celu w kwantyfikacji parametrów  $\mathbf{v}$  oraz  $\boldsymbol{\Omega}$  rozkładu wiedzy eksperckiej a priori (zależność 6) zastosowano estymację wartości prognoz  $\hat{\mathbf{y}}_{T_D}^i$  modelu regresji dla każdego  $i$ -tego indeksu sektorowego WIG:

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{X}^i \boldsymbol{\beta}^i + \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (18)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}^i = (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_T^i)'$  jest wektorem składników losowych modelu,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$  jest wektorem obserwacji stóp zwrotu  $i$ -tego indeksu sektorowego,  $\mathbf{X}^i$  jest  $(T \times 2)$ -wymiarową macierzą obserwacji wskaźnika koniunktury w  $i$ -tym sektorze,  $\boldsymbol{\beta}^i$  jest wektorem parametrów modelu. Estymacja wartości oczekiwanej prognozy  $\hat{\mathbf{y}}_{T_D}^i$  stanowiła podstawę do określenia elementów wektora  $\mathbf{v}$ , natomiast wartość estymatora wariancji tej prognozy dla każdego  $i$ -tego modelu była elementem diagonalnym macierzy kowariancji  $\boldsymbol{\Omega}$  rozkładu wiedzy eksperckiej a priori.



## 4. Analiza empiryczna

### 4.1. Założenia

W pracy rozważono i zastosowano siedem typów portfeli inwestycyjnych: klasyczny portfel Markowitza (M) oraz portfele nieklasyczne: oparte na oryginalnym modelu BL (BL) oraz jego odpornych modyfikacjach: (BL\_MCD), (BL\_MVE), jak również portfele odporne, których charakterystyki składowych wyznaczono na podstawie rozważanych estymatorów odpornów (MVE), (MCD). Dodatkowo, analizowano portfele będące uśrednieniem udziałów portfeli odpornych MVE i MCD (MVE+MCD).

W pracy wszystkie portfele są wynikiem maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka inwestycyjnego. W przypadku metody BL portfele są uzyskano w wyniku następującego zadania optymalizacyjnego.

$$\max_{\mathbf{x}_{BL} \in \mathcal{C}} \{ \mathbf{x}_{BL}' \boldsymbol{\mu}_{BL} \} \quad \text{p.w.} \quad \sqrt{\mathbf{x}_{BL}' \boldsymbol{\Sigma}_{BL} \mathbf{x}_{BL}} \leq s \quad (19)$$

Składowymi rozważanych portfeli były indeksy sektorowe WIG: WIG-banki, WIG-budownictwo, WIG-chemia, WIG-deweloperzy, WIG-informatyka, WIG-media, WIG-paliwa, WIG-spożywczy oraz WIG-telekomunikacja. Obserwacje stóp zwrotu tych indeksów pochodziły ze strony internetowej Giełdy Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie. Zbiór danych liczył 1590 obserwacji dziennych stóp zwrotu obejmujących okres badawczy 2.07.2007-30.10.2013. Estymacji portfeli dokonywano na podstawie rocznych, półtorarocznych oraz dwuletnich podokresów powyższego okresu. W celu oceny działania prezentowanych metod weryfikowano uzyskane wyniki portfeli przyjmując trzy długości okresu weryfikacji: 1 miesiąc, 3 miesiące oraz 6 miesięcy. Proces weryfikacji portfeli polegał na wyznaczeniu udziałów portfeli na podstawie danych z „okresu estymacji”, a następnie na wyznaczaniu w „okresie weryfikacji” charakterystyk portfeli uzyskanych w poprzednim etapie. W ten sposób uzyskano 58 portfeli dla rocznego „okresu estymacji”, 52 portfele dla wariantu półtorarocznego oraz 46 portfeli dla dwuletniego wariantu. Następnie, w każdym wariantcie, uśredniono otrzymane charakterystyki oraz przyjęte wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela każdego z czterech typów portfeli.

Wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli wyznaczano w następujący sposób: W pierwszym etapie wyznaczono portfel minimalnego ryzyka, które stanowiło dolną granicę wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli. Natomiast górną granicą wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli była wartość ryzyka aktywa o największej stopie zwrotu. Następnie

rozstęp między górną i dolną wartością maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli podzielono na 10 równych części uzyskując kolejne wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli.

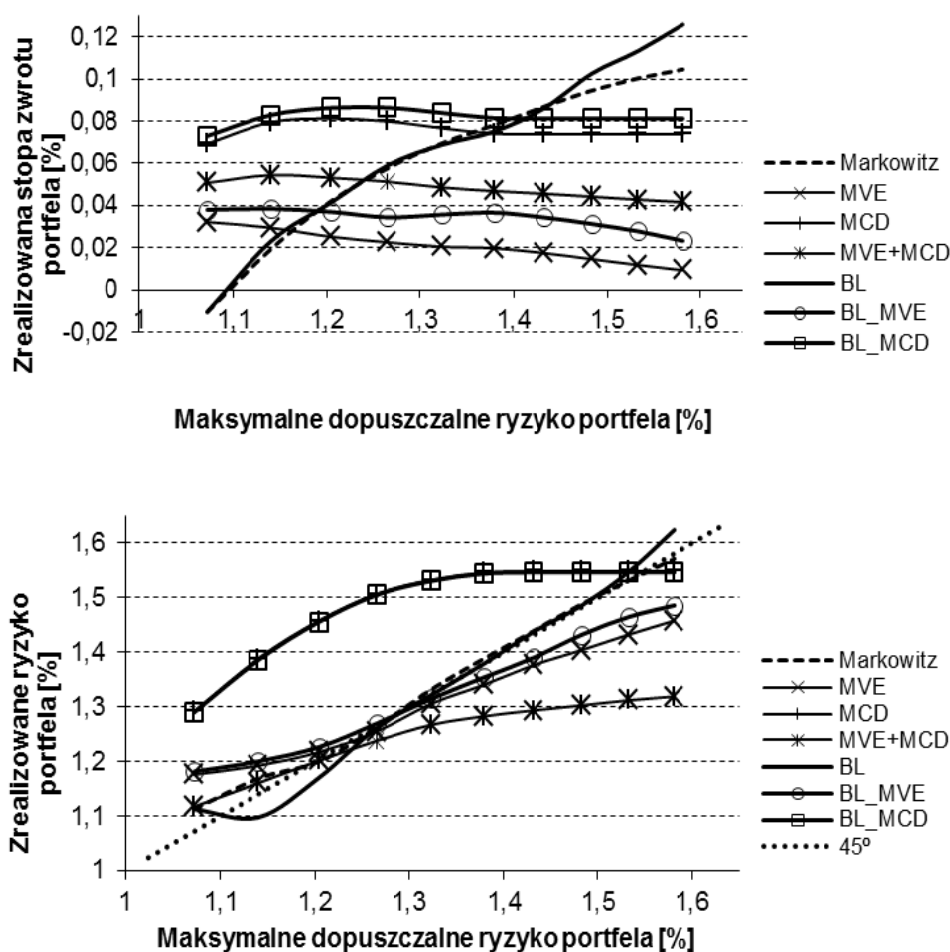
W przypadku portfeli BL oraz jego modyfikacji wyznaczając wartość zależności (3) przyjęto  $\tilde{\lambda} = 0,05$ . Natomiast do wyznaczenia w modelu BL wartości wag  $\tilde{w}$  wykorzystano informacje o wielkości kapitalizacji poszczególnych indeksów sektorowych w stosunku do łącznej kapitalizacji wszystkich rozważanych indeksów sektorowych, które pochodziły ze strony internetowej GPW. Dla odpornych charakterystyk rozważanych portfeli przyjęto 2 warianty wartości punktu załamania: maksymalny – równy 0,5 oraz (w celach porównawczych) 0,1. Celem uzyskania ocen parametrów rozkładu a priori portfelach BL i jego modyfikacjach wykorzystano zależność liniową miesięcznych stóp zwrotu każdego z rozważanych indeksów sektorowych od wskaźnika koniunktury danego sektora w ujęciu miesięcznym. Źródłem danych służących do oszacowania parametrów tych modelu była strona internetowa Głównego Urzędu Statystycznego (GUS). Uzyskane wyniki analizy empirycznej są rezultatem zastosowania procedur programu MATLAB stworzonych na potrzeby niniejszej pracy.

#### 4.2. Wyniki analizy empirycznej

Na rysunku 1 przedstawiono uśrednione zrealizowane<sup>10</sup> stopy zwrotu analizowanych portfeli oraz ich ryzyko w zależności od maksymalnego dopuszczalnego ryzyka dla 1,5-roczych okresów estymacji oraz 3-miesięcznych okresów weryfikacji. Identyczne dla wszystkich portfeli wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela pozwalają na porównywanie portfeli ze względu na pozostałe charakterystyki. W odniesieniu do średnich stóp zwrotu można zauważyć, że charakterystyki portfeli odpornych (MVE, MCD, BL\_MVE, BL\_MCD) są praktycznie niewrażliwe na zmiany dopuszczalnego ryzyka. Ponadto metoda MVE daje portfele o niskich stopach zwrotu, natomiast MCD – o wysokich. Wyniki dla portfeli Markowitza oraz klasycznego Blacka–Littermana są do siebie bardzo podobne. Natomiast w odniesieniu do przeciętnego zrealizowanego ryzyka widać wyraźnie, iż ryzyko portfeli MCD zdecydowanie przekracza ryzyko dopuszczalne, oznaczane linią kropkowaną. Portfele MVE cechują się z kolei niskim ryzykiem. Omawiane różnice pomiędzy dwiema procedurami odpornymi wynikają z faktu, że procedura MVE daje duże oszacowania macierzy kowariancji oraz średnich stóp zwrotu, natomiast MCD – małe. A więc metoda MVE

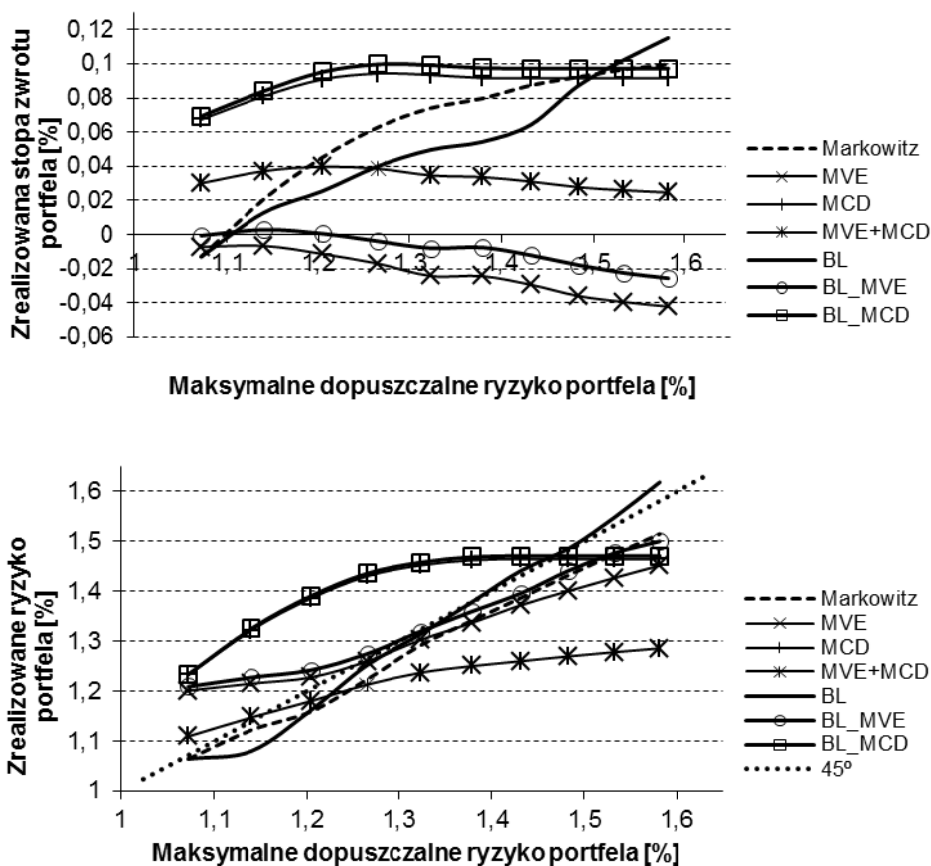
<sup>10</sup> Określenia „zrealizowane” są używane celem zaakcentowania przeprowadzanej respecyfikacji portfeli w ramach przeprowadzonego procesu ich weryfikacji.

w omawianym przypadku koncentruje się na prawym ogonie rozkładu, a MCD – na lewym. Uśrednione portfele MVE i MCD dają portfele o najniższym ryzyku, co jest konsekwencją dużych różnic pomiędzy portfelami MVE i MCD. Charakterystyki portfeli MVE i BL\_MVE oraz MCD i BL\_MCD praktycznie się pokrywają. Wynika to z dużych różnic w oszacowaniach charakterystyk aktywów składowych pomiędzy metodami MVE oraz MCD, których informacja a priori nie jest w stanie zniwelować przy przyjętych wartościach parametrów. Ponadto można również zauważyć, iż zrealizowane ryzyko portfeli Markowitza oraz klasycznych Blacka–Littermana jest bliskie ryzyku dopuszczalnego.



Rys. 1. Uśrednione zrealizowane stopy zwrotu oraz ryzyko portfeli dla 1,5-roczych okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji

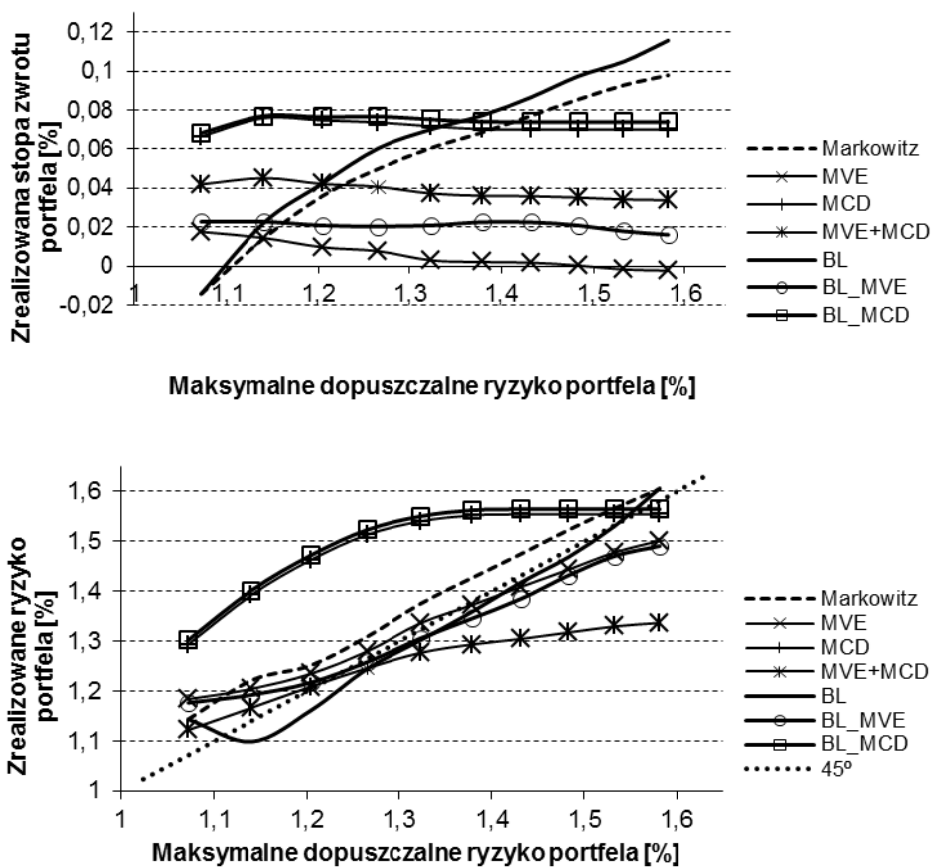
W przypadku 1-miesięcznych okresów weryfikacji, dla których wyniki zestawiono na rysunku 2, powyższe wnioski pozostają w całości aktualne. Podobnie, jak dla okresów 6-miesięcznych, które uwzględniono na rysunku 3.



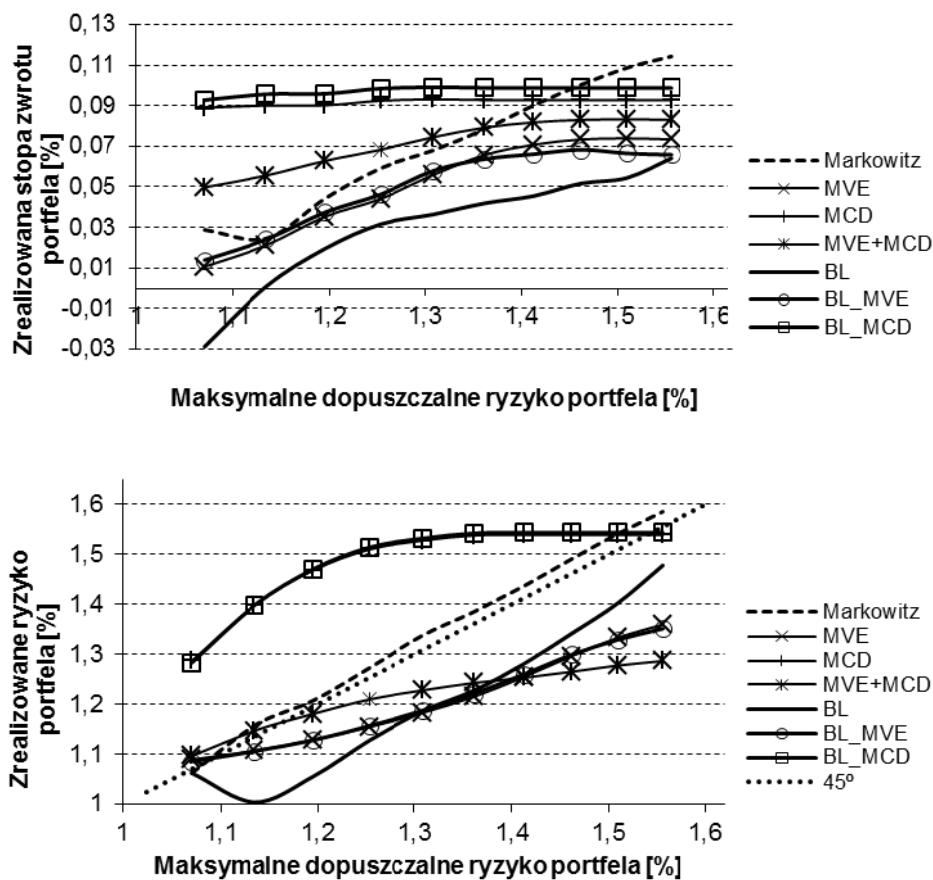
Rys. 2. Uśrednione zrealizowane stopy zwrotu oraz ryzyko portfeli dla 1,5-letnich okresów estymacji i 1-miesięcznych okresów weryfikacji

Na rysunku 4 przedstawiono wyniki dla portfeli konstruowanych na podstawie szeregów 2-letnich. Podobnie jak w przypadku 1,5-letnich okresów estymacyjnych portfele MCD cechują się wysokimi stopami zwrotu oraz wysokim ryzykiem, często w sposób znaczący przekraczającym poziom dopuszczalny. Natomiast portfele MVE dają niskie stopy zwrotu, ale i wyraźnie niższe ryzyko. Zwracają również uwagę bardzo niskie stopy zwrotu klasycznych portfeli Blacka–Littermana, którym towarzyszy również ryzyko wyraźnie poniżej poziomów dopuszczalnych. Także w przypadku krótszych okresów estymacji

klasyczne portfele Blacka–Littermana dają niskie stopy zwrotu. Tym razem jednak ryzyko portfeli jest relatywnie wysokie, szczególnie przy wyższych wartościach ryzyka dopuszczalnego. Pokazują to wykresy zestawione na rysunku 5.



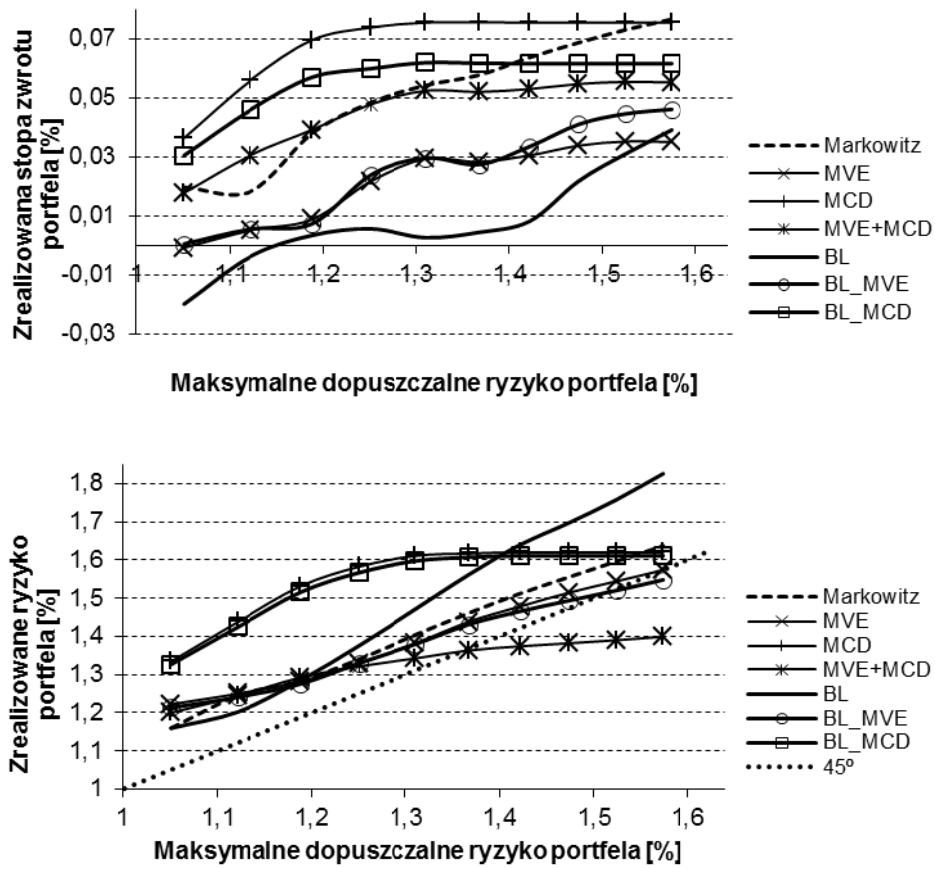
Rys. 3. Uśrednione zrealizowane stopy zwrotu oraz ryzyko portfeli dla 1,5-roczych okresów estymacji i 6-miesięcznych okresów weryfikacji



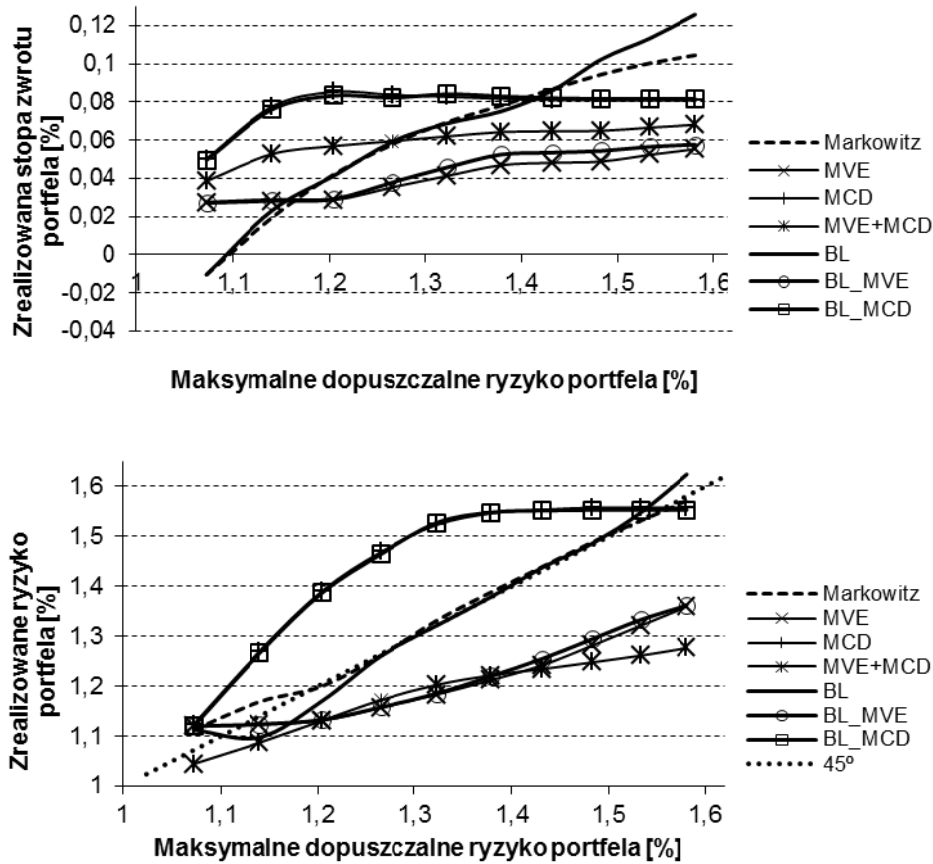
Rys. 4. Uśrednione zrealizowane stopy zwrotu oraz ryzyko portfeli dla 2-letnich okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji

Należy podkreślić, że w omawianym przypadku prawie wszystkie portfele cechują się ryzykiem przekraczającym poziom dopuszczalny. Wyjątkiem są tu portfele MVE+MCD dla wyższych wartości ryzyka dopuszczalnego.

W ostatnim etapie analizy rozważano portfele odporne z niższą wartością punktu załamania, równą 0,1. Wyniki te przedstawiono na rysunku 6. Można zauważyć, że również w tym przypadku wnioski odnoszące się do portfeli odpornych przedstawione powyżej pozostają aktualne. Znaczące zmniejszenie punktu załamania analizowanych metod w niewielkim stopniu wpłynęło na charakterystyki portfeli uzyskanych na ich podstawie. Różnice pomiędzy oszacowaniami są tym większe, im większy jest punkt załamania estymatora.



Rys. 5. Uśrednione zrealizowane stopy zwrotu oraz ryzyko portfeli dla rocznych okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji



Rys. 6. Uśrednione zrealizowane stopy zwrotu oraz ryzyko portfeli dla 1,5-roczych okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji dla punktu załamania estymatorów odpornych równego 0,1

## Podsumowanie

Praca skupia się na implementacji oryginalnego modelu Blacka–Littermana oraz jego odpornych modyfikacji, polegających na zastosowaniu wielowymiarowych odpornych estymatorów MVE i MCD. Cel pracy realizowano poprzez analizę porównawczą charakterystyk następujących portfeli: klasyczny portfel Markowitza (M) oraz portfele nieklasyczne: oparte na oryginalnym modelu BL (BL) i jego odpornych modyfikacjach – (BL\_MCD), (BL\_MVE), jak również portfele odporne, których charakterystyki składowych wyznaczono na podstawie rozważane estymatory odporne (MVE), (MCD). Dodatkowo, analizowano portfele będące uśrednieniem udziałów portfeli odpornych MVE i MCD (MVE+MCD).



W przypadku portfeli Blacka–Littermana i jego odpornych modyfikacji, rozkład a priori specyfikowano na podstawie prognoz wykorzystujących wyniki badań ankietowych koniunktury. Na podstawie dziennych stóp zwrotu z indeksów sektorowych GPW obejmujących lata 2007-2013 analizowano empiryczne własności rozważanych portfeli. Do oceny portfeli konstruowanych różnymi metodami zastosowano weryfikację tych portfeli w ujęciu dynamicznym. Polegała ona na ich respecyfikacjach przy różnych wariantach podokresów badawczych – 1 miesiąc, 3 miesiące oraz 6 miesięcy. Zastosowano również 3 warianty okresu estymacji: roczny, 1,5-roczny i 2-letni. Analizowane portfele składały się z wybranych indeksów sektorowych WIG.

Wyniki dla procedury MVE zdecydowanie różnią się od rezultatów uzyskanych przy zastosowaniu MCD. Portfele MVE są bardzo konserwatywne (o ryzyku wyraźnie niższym od maksymalnego dopuszczalnego), natomiast MCD – bardzo agresywne. Ich zrealizowane ryzyko znacząco przewyższa ryzyko dopuszczalne. Wynika to z faktu, że procedura MVE daje duże oszacowania macierzy kowariancji (wariancji poszczególnych aktywów) oraz średnich stóp zwrotu, natomiast MCD – małe (MVE koncentruje się więc na prawym ogonie rozkładu, a MCD – na lewym). Różnica pomiędzy oszacowaniami jest tym większa, im większy jest punkt załamania estymatora. Jednak nawet przy niskich wartościach punktu załamania charakterystyki portfeli MVE i MCD różnią się znacząco. Różnice pomiędzy portfelami bazującymi na estymatorach odpornych, a portfelami Blacka–Littermana z estymatorami odpornymi są bardzo niewielkie. A więc w tych przypadkach informacja a priori ma bardzo niewielkie znaczenie. Wynika to z dużych różnic w oszacowaniach charakterystyk aktywów składowych pomiędzy metodami MVE oraz MCD, których informacja a priori nie jest w stanie zniwelować przy przyjętych wartościach parametrów. Przy dużych wartościach punktu załamania charakterystyki portfeli odpornych zmieniają się nieznacznie wraz ze zmianami maksymalnego dopuszczalnego ryzyka. Im niższa wartość punktu załamania, tym większa wrażliwość zrealizowanych charakterystyk na wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli.

## Literatura

- Black F., Litterman R. (1990), *Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium*, “Goldman Sachs Fixed Income Research”.
- Meucci A. (2005), *Risk and Asset Allocation*, Springer, Berlin.
- Meucci A. (2010), *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions*, The Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley, New York.

- Orwat-Acedańska A. (2011), *Odporne bayesowskie metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji* [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '11*, Studia Ekonomiczne, nr 96, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice, s. 97-114.
- Orwat-Acedańska A. (2012), *Ocena ryzyka portfela w alokacji odpornej przy różnych typach rozkładów – podejście symulacyjne* [w:] G. Trzpiot (red.), *Analiza szeregów czasowych a statystyczny pomiar ryzyka*, Studia Ekonomiczne, nr 91, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice, s. 49-66.
- Orwat-Acedańska A. (2013), *Weryfikacja odporno-bayesowskiego modelu alokacji dla różnych typów rozkładów – podejście symulacyjne*, Studia Ekonomiczne „Analiza i wspomaganie decyzji”, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice 2013, s. 102-120.
- Orwat-Acedańska A. (2014), *Zastosowanie modelu Blacka-Littermana do wyboru portfela inwestycyjnego* [w:] G. Trzpiot (red.), *Wielowymiarowe modelowanie i analiza ryzyka*, Studia Ekonomiczne, nr 192, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice, s. 83-100.
- Rousseeuw P.J., Leroy A.M. (2003), *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley Interscience, New York.
- Rousseeuw, van Dreissen, (1999), *A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator*, “Journal of the American Statistical Association”, Vol. 41, s. 212-223.
- Satchell S., Scowcroft A. (2000), *A Demystification of the Black-Litterman model: Managing Quantitative and Traditional Construction*, “Journal of Asset Management”, Vol. 1, s. 138-150.
- Sharpe W.F. (1964), *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, “Journal of Finance”, Vol XIX, No. 3, s. 425-442.
- Stein C. (1995), *Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution*, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Berkeley Symposium on Probability and Statistics.
- Trzpiot G, red. (2013), *Wybrane elementy statystyki odpornej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.
- Zuo Y. (2005), *Robust Location and Scatter Estimators in Multivariate Analysis*, “The Frontiers in Statistics”, s. 467-490.

#### **ROBUST MODIFICATIONS OF BLACK-LITTERMAN MODEL FOR POLISH CAPITAL MARKET**

**Summary:** The paper discusses Markowitz portfolios where asset characteristics were estimated with robust MVE and MCD procedures as well as Black-Litterman method with business tendency survey results employed to specify a priori distributions. Using daily returns on sector stock indices from Warsaw Stock Exchange spanning the period 2007-2013 empirical performance of the portfolios were examined. It is shown that MVE portfolios were extremely conservative, whereas MCD – very aggressive regard-

less of the estimator's breakdown points. Incorporating additional a priori knowledge hardly affected the results. Additionally it is documented that including data from the business tendency surveys may improve the portfolio characteristics provided sufficiently long time series are used to forecast the asset returns.<sup>3</sup>

**Keywords:** Black–Litterman portfolio, robust estimator MVE, robust estimator MCD, a priori distribution of expert's views, a posteriori distribution.