Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 248 · 2015

Marcin Anholcer

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych
m.anholcer@ue.poznan.pl

ALGORYTM DLA WIELOASORTYMENTOWEGO STOCHASTYCZNEGO ZADANIA TRANSPORTOWEGO[1]

Streszczenie: W wieloasortymentowym zadaniu transportowym celem jest optymalizacja transportu kilku (co najmniej dwóch) dóbr od dostawców do odbiorców. W stochastycznej wersji zadania wielkości popytu poszczególnych odbiorców na poszczególne dobra są zmiennymi losowymi, a celem jest minimalizacja sumy kosztów transportu i wartości oczekiwanej dodatkowych kosztów związanych z realizacją dostaw w wielkości innej niż rzeczywista realizacja popytu. W uogólnionej wersji zagadnienia zakłada się ponadto, że ilości transportowanych dóbr zmieniają się w czasie transportu. W pracy przedstawiony został model zadania i zaproponowana metoda jego rozwiązywania.

Słowa kluczowe: uogólnione zadanie transportowe, stochastyczne zadanie transportowe, wieloasortymentowe zadanie transportowe, metoda wyrównań.

Wprowadzenie

W klasycznym zadaniu transportowym jednorodne dobro dostarczane jest od dostawców do odbiorców. Dane są w szczególności jednostkowe koszty transportu, wielkości podaży dostawców i wielkości popytu odbiorców. Celem jest znalezienie takiego planu dostaw, który spełnia wszystkie ograniczenia podażowe i popytowe, jednocześnie minimalizując całkowity koszt transportu. Zmienne decyzyjne mają podwójne indeksy – jeden indeks odpowiada dostawcy, drugi odbiorcy.

[1] Niniejsza praca powstała w ramach projektu „Optymalizacja nieliniowa w wybranych zastosowaniach ekonomicznych". Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/D/HS4/03543.

W przypadku zadania wieloasortymentowego, transportowanych jest jednocześnie kilka towarów (co najmniej dwa). W tym przypadku zmienne są potrójnie indeksowane – jeden indeks odpowiada dostawcy, drugi odbiorcy, trzeci zaś transportowanemu dobru.

W przypadku gdy ilość towaru zmienia się w trakcie transportu (czy to na skutek jego właściwości fizykochemicznych, czy też zdarzeń losowych), zasadne jest rozpatrywanie ogólniejszego modelu, tzw. uogólnionego zadania transportowego (w literaturze polskiej zwanego również zagadnieniem rozdziału, ze względu na jedno z zastosowań; ang. *Generalized Transportation Problem*, GTP). Teoria i wybrane zastosowania uogólnionych przepływów, a w szczególności uogólnionych zadań transportowych przedstawione zostały na przykład w [Ahuja, Magnanti i Orlin, 1993, rozdz. 15]. Różne algorytmy rozwiązywania zadań z tej rodziny można znaleźć między innymi w pracach [Glover, Klingman i Napier, 1972; Goldberg, Plotkin i Tardos, 1988; Ahuja, Magnanti i Orlin, 1993, rozdz. 15; Wayne, 2002]. Wybrane zastosowania w praktycznych problemach gospodarczych opisane zostały w [Nagurney i in., 2013]. Szczególny przypadek, czyli GTP, został omówiony m.in. w pracach [Balas, Ivanescu, 1964; Lourie, 1964; Balas, 1966]. W pracy [Anholcer i Kawa, 2012] autorzy wykazali związek między poziomem reklamacji (czyli ogólniej procentowym udziałem ilości towaru, która nie jest dostępna u odbiorcy) a stopniem złożoności optymalnej sieci dystrybucji.

Stochastyczne zagadnienie rozdziału to bliższa rzeczywistości wersja problemu, w której popyt odbiorców na poszczególne dobra nie jest znany. Zakładamy jednak, że znany jest jego rozkład dla każdego z odbiorców. Stosując podejście Dantziga–Madansky'ego, staramy się zminimalizować wartość oczekiwaną całkowitego kosztu transportu, dostaw, magazynowania itd. Szczególny przypadek tego typu zadania (stochastyczne zadanie transportowe, SGTP) był analizowany m.in. w pracach [Sikora, Runka i Pyrzyński, 1991; Sikora, 1993a; Anholcer, 2005; Anholcer, 2008a; Anholcer, 2008b]. We wszystkich tych pracach analizowana była metoda wyrównań, w [Anholcer, 2005; Anholcer, 2008a] wykazano jej zbieżność w jednej z ogólnych postaci. W [Anholcer, 2012] przedstawiono metodę opartą na zbliżonej idei dla stochastycznego uogólnionego zagadnienia transportowego, a w pracy [Anholcer, 2015] – dla nieliniowego uogólnionego zagadnienia transportowego. Dowiedziono też zbieżności tej wersji metody, wykorzystując m.in. twierdzenia o zbieżności zawarte w [Bazaraa, Sherali i Shetty, 1993, rozdział 7]. Tak zwaną iteracyjną metodę lasu (*Forest Iteration Method*) dla stochastycznego zadania transportowego zaprezentowano w pracy [Qi, 1985], a uogólnioną jej wersję (iteracyjna metoda A-lasu, *A-Forest Iteration Method*) – w pracy [Qi, 1987]. Stochastyczne zadania transportowe z dyskretnym rozkładem popytu były analizowane w pracy [Sikora, 1993a], zaś jego uogólniona wersja – w [Anholcer, 2013]. W żadnej ze znanych autorowi prac nie zajmowano się wieloasortymentową wersją zagadnienia.

W niniejszym artykule zaprezentowany zostanie sposób wykorzystania zmodyfikowanej metody wyrównań dla stochastycznego uogólnionego wieloasortymentowego zadania transportowego. Kolejne rozdziały zawierają kolejno: sformułowanie problemu, algorytm, wyniki eksperymentów numerycznych i końcowe wnioski.

1. Sformułowanie problemu

Niech $i = 1, \dots, m$ oznacza indeks dostawcy, $j = 1, \dots, n$ indeks odbiorcy, zaś $k = 1, \dots, p$ – indeks towaru. Dla wszystkich kombinacji indeksów dane są jednostkowe koszty transportu c_{ij}^k towaru k od dostawcy i do odbiorcy j, wielkości podaży a_i^k towaru k u dostawcy i i wielkości popytu b_j^k na towar k u odbiorcy j. Celem jest znalezienie takiego planu dostaw, który spełnia wszystkie ograniczenia podażowe i popytowe, jednocześnie minimalizując całkowity koszt transportu. W klasycznym sformułowaniu problemu pojawiają się jeszcze ograniczenia na łączną ilość towarów, jaka może zostać przetransportowana od poszczególnych dostawców do poszczególnych odbiorców. Ze względu na ich techniczny charakter i niewielki związek z rzeczywistością, zostaną one pominięte w tej pracy. Przyjmując, że zmiana w ilości towaru k przewożonego od dostawcy i do odbiorcy j reprezentowana jest przez mnożnik r_{ij}^k, liniowe wieloasortymentowe uogólnione zadanie transportowe można zapisać w postaci (oznaczmy je przez GMTP):

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k x_{ij}^k \right\}$$

p.w.

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}^k x_{ij}^k = b_j^k,\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots,\ p,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = a_i^k,\ i = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots,\ p,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p.$$

W stochastycznej wersji problemu, wielkości popytu b_j^k nie są deterministyczne, ale dane jako ciągłe zmienne losowe X_j^k o funkcjach gęstości $\varphi_{j,k}$. Dla każdego odbiorcy j i towaru k znane są jednostkowy koszt nadwyżki $s_{j,k}^{(1)}$ i jednostkowy koszt niedoboru $s_{j,k}^{(2)}$. Całkowita ilość towaru dostarczona do każdego z odbiorców musi być nieujemna, więc funkcja oczekiwanego dodatkowego kosztu związanego z odbiorcą j i towarem k ma postać

$$f_{j,k}(x_j^k) = s_{j,k}^{(1)} \int_0^{x_j^k} (x_j^k - t)\varphi_{j,k}(t)dt + s_{j,k}^{(2)} \int_{x_j^k}^{\infty} (t - x_j^k)\varphi_{j,k}(t)dt.$$

Stosując standardowe przekształcenia (w szczególności całkowanie przez części), można ją przekształcić do formy

$$f_{j,k}(x_j^k) = s_{j,k}^{(2)}\left(E(X_j^k) - x_j^k\right) + \left(s_{j,k}^{(1)} + s_{j,k}^{(2)}\right) \int_0^{x_j^k} \Phi_{j,k}(t)dt,$$

gdzie $\Phi_{j,k}$ jest dystrybuantą popytu odbiorcy j na towar k. Łatwo zauważyć, że dla każdego j i k, pierwsze dwie pochodne funkcji oczekiwanego dodatkowego kosztu mają postać

$$f'_{j,k}(x_j^k) = -s_{j,k}^{(2)} + \left(s_{j,k}^{(1)} + s_{j,k}^{(2)}\right)\Phi_{j,k}(x_j^k),$$

$$f''_{j,k}(x_j^k) = \left(s_{j,k}^{(1)} + s_{j,k}^{(2)}\right)\varphi_{j,k}(x_j^k),$$

więc każda z funkcji $f_{j,k}$ jest funkcją wypukłą. Ostatecznie więc stochastyczne uogólnione wieloasortymentowe zadanie transportowe (SGMTP) ma postać

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f_{j,k}(x_j^k)\right\}$$

p.w.

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}^k x_{ij}^k = x_j^k,\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = a_i^k,\ i = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, p,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$x_j^k \geq 0,\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, p.$$

Zadanie to można przekształcić do postaci zbliżonej do stochastycznego uogólnionego zadania transportowego (SGTP) na tyle, że możliwe będzie jego rozwiązanie za pomocą odpowiednio opracowanego wariantu metody wyrównań. Przypomnijmy, że SGTP to zadanie postaci:

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\right\},$$

p. w.

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}x_{ij} = x_j, j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Jak widać, jedyną różnicą jest występowanie w SGMTP dodatkowego indeksu. Pomocnicze zadanie konstruujemy w ten sposób, że łączymy w pary odbiorców i towary, tworząc „pomocniczych" odbiorców. W ujęciu sieciowym działanie to sprowadza się do przekształcenia hiperkrawędzi (D_i, O_j, T_k) w krawędź w grafie dwudzielnym $(D_i, O_{j,k})$. W ten sposób zadanie z potrójnie indeksowanymi zmiennymi zmienia się *de facto* w zadanie ze zmiennymi o podwójnych indeksach. Funkcja dodatkowego kosztu jest określona dla każdego z „nowych" odbiorców, jedyna różnica polega na tym, że zakresy sumowania w przekształconym problemie są inne niż w SGTP.

2. Metoda rozwiązywania

Aby rozwiązać zadanie za pomocą metody wyrównań, wprowadzamy dodatkowe zmienne $x_{i,0,k}$. Przyjmujemy przy tym, że $c_{i,0,k} = 0, r_{i,0,k} = 1$ dla $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$ i $f_{0,k}(x_0^k) \equiv 0$ dla $k = 1, \dots, p$. Wówczas zadanie przyjmuje następującą postać:

$$\min\left\{f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{p} f_{j,k}(x_j^k)\right\}$$

p.w.

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}^k x_{ij}^k = x_j^k,\ j = 0, \dots, n,\ k = 1, \dots,\ p,$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}^k = a_i^k,\ i = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots,\ p,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$x_j^k \geq 0,\ 0 = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots,\ p.$$

Warunki KKT dla tego zadania mogą zostać zapisane w następującej postaci $(i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, p)$:

$$c_{ij}^k + r_{ij}^k f'_{j,k}\left(x_j^k\right) \geq u_i, x_{ij}^k = 0,$$

$$c_{ij}^k + r_{ij}^k f'_{j,k}\left(x_j^k\right) = u_i, x_{ij}^k > 0.$$

Poniższy algorytm jest zbieżny do punktu KKT. Dowód zostanie pominięty, gdyż jest analogiczny do dowodów zamieszczonych w pracach [Anholcer, 2012; Anholcer, 2015].

Algorytm 1: Algorytm dla stochastycznego uogólnionego wieloasortymentowego zagadnienia transportowego.

1. *Inicjalizacja*. Wyznacz rozwiązanie początkowe zgodnie ze wzorem:

$$x_{ij}^k = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$x_{i,0}^k = a_i^k, i = 1, \dots, m.$$

Wyznacz sumy przywozów do poszczególnych odbiorców:

$$x_j^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i^k, j = 0, \\ 0, j \neq 0. \end{cases}$$

Wyznacz początkowe wartości pochodnych cząstkowych:

$$h_{ij}^k = c_{ij}^k + r_{ij}^k f'_{j,k}(0), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p,$$

$$h_{i,0,k} = 0, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p.$$

Przejdź do kroku 2.

2. *Sprawdzanie optymalności*. Dla każdej pary i, k wyznacz:

$$v_i^k = \min\{h_{ij}^k | j = 0, \dots, n\},$$

$$w_i^k = max\{h_{ij}^k | j = 0, \dots, n, x_{ijk} > 0\},$$

$$w_i = \max\{w_i^k | k = 1, \dots, p\}.$$

Niech $k^\star(i)$ będzie indeksem k, dla którego $w_i^{k^\star(i)} = w_i$. Niech $j^{\star\star}(i)$ będzie indeksem j, dla którego $h_{ij}^{k^\star(i)} = v_i^{k^\star(i)}$ i niech $j^\star(i)$ będzie indeksem j, dla którego $h_{ij}^{k^\star(i)} - v_i^{k^\star(i)} = w_i$ Oblicz

$$\alpha = \max\{w_i | i = 1, \dots, m\}.$$

Niech $i^\star$ będzie indeksem i, dla którego $w_i = \alpha$. Jeżeli $\alpha < \varepsilon$, to STOP. Otrzymane rozwiązanie zadowalająco blisko optimum. W przeciwnym przypadku przyjmij $j^{\star\star} = j^{\star\star}(i^\star)$, $j^\star = j^\star(i^\star)$, $k^\star = k^\star(i^\star)$. Przejdź do kroku 3.

3. *Zmiana rozwiązania*.
Niech

$$\delta^-(\lambda) = f'_{j^\star k^\star}(x_{j^\star}^{k^\star}) - f'_{j^\star k^\star}(x_{j^\star}^{k^\star} - \lambda),$$

$$\delta^+(\lambda) = f'_{j^{\star\star} k^\star}(x_{j^{\star\star}}^{k^\star} + \lambda) - f'_{j^{\star\star} k^\star}(x_{j^{\star\star}}^{k^\star}).$$

Niech $\lambda^\star$ będzie rozwiązaniem równania

$$r_{i^\star j^\star}^{k^\star}\delta^-(\lambda) + r_{i^\star j^{\star\star}}^{k^\star}\delta^+(\lambda) = w_{i^\star}.$$

Jeżeli $\lambda^\star > x_{i^\star j^\star}^{k^\star}$, podstaw

$$\lambda^\star := x_{i^\star j^\star}^{k^\star}.$$

Zmień rozwiązanie zgodnie ze wzorami:

$$x_{i^\star j^\star}^{k^\star} := x_{i^\star j^\star}^{k^\star} - \lambda^\star,$$

$$x_{i^\star j^{\star\star}}^{k^\star} := x_{i^\star j^{\star\star}}^{k^\star} + \lambda^\star,$$

$$x_{j^\star}^{k^\star} := x_{j^\star}^{k^\star} - r_{i^\star j^\star}^{k^\star}\lambda^\star,$$

$$x_{j^{\star\star}}^{k^\star} := x_{j^{\star\star}}^{k^\star} + r_{i^\star j^{\star\star}}^{k^\star}\lambda^\star.$$

Podstaw

$$h_{ij^\star}^k := h_{ij^\star}^k - r_{ij^\star}^k\delta^-(\lambda^\star), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$$

oraz

$$h_{ij^{\star\star}}^k := h_{ij^{\star\star}}^k + r_{ij^{\star\star}}^k\delta^+(\lambda^\star), i = 1, \dots, m, h = 1, \dots, p.$$

Wróć do kroku 2.

3. Eksperymenty obliczeniowe

W celu zbadania sprawności algorytmu, rozwiązano pewną liczbę losowo wygenerowanych zadań testowych. Rozpatrywano dwa typy rozkładów popytu: jednostajny $U(0,u)$ i wykładniczy $Exp(\lambda)$, przy czym u i λ losowano jednostajnie z przedziałów odpowiednio $[15,20)$ i $[0{,}5, 0{,}6)$. Jednostkowe koszty transportu były losowane jednostajnie z przedziału $[2,4)$, koszty nadmiaru z przedziału $[1,2)$, koszty niedoboru z przedziału $[5,10)$, współczynniki redukcji z przedziału $[0{,}8, 0{,}9)$, a wielkości podaży z przedziału $[10,20)$. W przypadku zadań z rozkładem jednostajnym, optymalna długość kroku wyznaczana była w sposób dokładny (równanie pozwalające wyznaczyć długość kroku jest wówczas równaniem kwadratowym), zaś w przypadku rozkładu wykładniczego – za pomocą jednowymiarowej metody Newtona. Algorytm został zaimplementowany w Java SE i uruchomiony na PC z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-2670 QM CPU @2.20 GHz. Wybrano i rozwiązano po 1000 losowo wygenerowanych zadań o rozmiarach: $(m,n,p) = (10, 10{,}5), (10, 20{,}5), (100, 100{,}10), (100, 200{,}10)$, czyli łącznie 8000 zadań. Czasy rozwiązywania w milisekundach (AVG – średni, DEV – odchylenie standardowe, MIN – najkrótszy, MAX – najdłuższy) przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki eksperymentów (czasy rozwiązywania w milisekundach)

Typ zadania	$U(0, u)$ 10×5×10	$U(0, u)$ 10×5×20	$U(0, u)$ 100×10×100	$U(0, u)$ 100×10×200	$Exp(\lambda)$ 10×5×10	$Exp(\lambda)$ 10×5×20	$Exp(\lambda)$ 100×10×100	$Exp(\lambda)$ 100×10×200
AVG	0,678	3,902	2667,133	37344,552	9,593	32,014	18171,425	84271,195
DEV	1,793	11,923	2678,549	24206,693	40,401	190,844	19747,728	61027,151
MIN	0,068	0,423	291,907	4218,134	0,513	2,322	1546,08	12394,305
MAX	30,387	154,461	22816,568	191395,155	861,289	5019,121	167272,196	475414,130

Źródło: Opracowanie własne.

Jak widać, algorytm szybko (w czasie co najwyżej kilku minut) rozwiązuje zadania o stosunkowo dużych rozmiarach. W przypadku najmniejszych testowanych zadań czas rozwiązywania jest rzędu kilku milisekund.

Podsumowanie

W pracy omówiono stochastyczne uogólnione wieloasortymentowe zagadnienie rozdziału z ciągłym rozkładem popytu i przedstawiono efektywny algorytm jego rozwiązywania. Warto zauważyć, że działanie zaprezentowanego algorytmu nie jest równoważne p-krotnemu uruchomieniu metody wyrównań dla SGTP, opisanej w [Anholcer, 2012; Anholcer, 2015]. Wprawdzie ustalenie wartości k sprawia, że problem przyjmuje właśnie tę formę, więc rozwiązanie optymalne (dokładne) problemu SGMTP jest sumą rozwiązań optymalnych (dokładnych) p problemów typu SGTP. Jednak ze względu na to, że każdy z powyższych problemów rozwiązywany jest tylko z pewną dokładnością, zastosowanie przedstawionej wyżej metody pozwala osiągnąć szybszą zbieżność.

Literatura

Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. (1993), *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Anholcer M. (2005), *Zbieżność Metody wyrównań dla nieliniowych zadań alokacji* [w:] K. Piasecki, W. Sikora (red.), *Z prac Katedry Badań Operacyjnych*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", nr 64, s. 183-198.

Anholcer M. (2008a), *Analiza porównawcza wybranych algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji dóbr jednorodnych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Anholcer M. (2008b), *Porównanie działania wybranych algorytmów rozwiązywania nieliniowych zadań alokacji* [w:] R. Kopańska-Bródka (red.), *Metody i zastosowania badań operacyjnych '2007*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach", Katowice, s. 9-25.

Anholcer M. (2012), *Algorithm for Stochastic Generalized Transportation Problem*, Operations Research and Decisions Vol. 22, Number 4, pp. 9-20.

Anholcer M. (2013), *Stochastic Generalized Transportation Problem with Discrete Distribution of Demand*, Operations Research and Decisions Vol. 23 (2013), Number 4, pp. 9-19.

Anholcer M. (2015), *On the Nonlinear Generalized Transportation Problem with Convex Costs*, „Croatian Operational Research Review", accepted.

Anholcer M., Kawa A. (2012), *Optimization of Supply Chain via Reduction of Complaints Ratio*, „Lecture Notes in Computer Science", Volume 7327, pp. 622-628.

Balas E. (1966), *The Dual Method for the Generalized Transportation Problem*, „Management Science", Vol. 12, No. 7, Series A, Sciences, pp. 555-568.

Balas E., Ivanescu P.L. (1964), *On the Generalized Transportation Problem*, „Management Science", Vol. 11, No. 1, Series A, Sciences, pp. 188-202.

Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (1993), *Nonlinear Programing. Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons Inc., New York – Chichester – Brisbane – Toronto – Singapore.

Glover F., Klingman D., Napier A. (1972), *Basic Dual Feasible Solutions for a Class of Generalized Networks*, „Operations Research", Vol. 20, No. 1, pp. 126-136.

Goldberg A.V., Plotkin S.A., Tardos E. (1988), *Combinatorial Algorithms for the Generalized Circulation Problem*, SFCS'88 Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 432-443.

Lourie J.R. (1964), *Topology and Computation of the Generalized Transportation Problem*, „Management Science", Vol. 11, No. 1, Series A, Sciences, pp. 177-187.

Nagurney A., Yu M., Masoumi A.H., Nagurney L.S. (2013), *Networks Against Time. Supply Chain Analytics for Perishable Products*, Springer Briefs in Optimization, Springer.

Qi L. (1985), *Forest Iteration Method for Stochastic Transportation Problem*, „Mathematical Programming Study" 25, pp. 142-163.

Qi L. (1987), *The A-Forest Iteration Method for the Stochastic Generalized Transportation Problem*, „Mathematics of Operations Research", Vol. 12, No. 1, pp. 1-21.

Sikora W. (1993a), *Problem transportowy z losowym popytem odbiorców*, „Przegląd Statystyczny" XXXIX (3-4), ss. 351-364.

Sikora W. (1993b), *Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr*, „Zeszyty naukowe – seria II, Prace doktorskie i habilitacyjne", Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Sikora W., Runka H., Pyrzyński D. (1991), *Optymalizacja przepływów w sferze dystrybucji dóbr jednorodnych*, Grant no. H\12\209\90-2, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Wayne K.D. (2002), *A Polynomial Combinatorial Algorithm for Generalized Minimum Cost Flow*, „Mathematics of Operations Research", Vol. 27, No. 3, pp. 445-459.

ALGORITHM FOR STOCHASTIC GENERALIZED MULTICOMMODITY TRANSPORTATION PROBLEM

Summary: In the multicommodity transportation problem the goal is to optimize the transport of several (at least two) goods from suppliers to destination points. In the stochastic version of the problem the demands of customers for individual goods are random variables, and the goal is to minimize the total costs of transportation together with the expected additional costs, depending on the difference between the supply size and the particular realization of the demand. In the generalized version of the problem we assume, moreover, that the amount of transported goods change during the transportation process. The model of the problem and the solution method have been presented in the paper.

Keywords: Generalized Transportation Problem, Stochastic Transportation Problem, Multicommodity Transportation Problem, Equalization Method.