Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 248 · 2015

Stefan Grzesiak

Uniwersytet Szczeciński
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania
Instytut Ekonometrii i Statystyki
stegrz49@wneiz.pl

Robert Jóźwiak

Uniwersytet Szczeciński
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania
ub@jozwiak-berlin.com

INTERPOLACJA FUNKCJI TARYFOWEJ W OPTYMALIZACJI PODATKU DOCHODOWEGO OD OSÓB FIZYCZNYCH

Streszczenie: W artykule, który dotyczy wyboru sposobu optymalizacji podatku dochodowego od osób fizycznych dla warunków aktualnie istniejących w Polsce, zaprezentowano kilka możliwych podejść, różniących się między sobą sposobem rozwiązania, dokładnością obliczeń i stopniem skomplikowania. Podstawą przeprowadzonego badania było określenie funkcji taryfowej oraz jej interpolacja na podstawie wybranych metod: bazy jednomianowej, bazy Lagrange'a, bazy Newtona, funkcji sklejanych. Przedstawiono również procedurę zastosowania wymienionych metod oraz zalety i wady poszczególnych podejść, ilustrując je wynikami rozwiązań i wykresami. Dla porównania i oceny jakości zaprezentowanych rozwiązań użyto bezwzględnych i względnych odchyleń funkcji interpolacyjnych od polskiej funkcji taryfowej.

Słowa kluczowe: funkcja taryfowa, podatek dochodowy, interpolacja wielomianowa, funkcje sklejane.

Wprowadzenie

Kwestia optymalizacji wielkości podatku dochodowego budzi emocje w wielu krajach, w tym i w Polsce. Sygnałem tego są propozycje różnych rozwiązań m.in. polskiego Ministerstwa Finansów, aby jakiekolwiek zabiegi i działania w tym kierunku utrudnić, a najlepiej uniemożliwić. Podstawowym problemem dla władz państwowych jest rozstrzygnięcie, które ze stosowanych w praktyce zabiegów są legalne, a które naruszają przepisy prawa. Nie wnikając w tę materię, która budzi zainteresowanie głównie prawników, autorzy zamierzają przedstawić możliwości interpolacji funkcji taryfowej podatku od osób fizycznych. Przeprowadzenie interpolacji stanowi konieczny warunek umożliwiający zastosowanie procedur optymalizacyjnych opartych na metodach programowania matematycznego w celu określenia możliwie najkorzystniejszych kwot podatku.

Funkcja taryfowa podatku dochodowego od osób fizycznych na zasadach ogólnych według skali podatkowej została zdefiniowana w trzech przedziałach dochodowych. Fakt ten powoduje istnienie punktów nieróżniczkowalnych, co stanowi istotny mankament przy użyciu funkcji taryfowych do zadań optymalizacyjnych. Rozwiązywanie podatkowych problemów optymalizacyjnych za pomocą metod opartych na programowaniu matematycznym[1] wymusza konieczność eliminacji wszystkich punktów nieróżniczkowalnych. Nie chodzi tutaj jedynie o matematyczną poprawność modelu. Różniczkowalność funkcji taryfowej w pełnym przedziale dochodowym jest wymogiem stawianym przez większość programów komputerowych wspomagających rozwiązywanie problemów opartych na programowaniu matematycznym.

Ogólną postać podatkowej funkcji taryfowej składającej się z dwóch przedziałów liniowych oraz kwoty wolnej od podatku może zostać przedstawiona jako:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x < kw \\ a \cdot (x - kw) & \text{dla} \quad kw \leq x < g \\ b \cdot (x - g) + a(g - kw) & \text{dla} \quad x \geq g \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie

x – dochód podlegający opodatkowaniu
a – stawka podatkowa w pierwszym przedziale liniowym
b – stawka podatkowa w drugim przedziale liniowym
kw – dochód odpowiadający kwocie wolnej od podatku
g – dochód odpowiadający granicy między oboma przedziałami liniowymi

Wstawiając do formuły (1) wartości:

$$a = 0{,}18;\ b = 0{,}32;\ kw = 3.089;\ g = 85.528$$

uzyskujemy aktualną funkcję obciążenia podatkiem dochodowym od osób fizycznych w Polsce [Ustawa o podatku dochodowym, art. 27 ust. 1, 1991]:

$$S_{PL}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 3.089 \\ 0{,}18 \cdot x - 556{,}02 & \text{dla} \quad 3.089 < x \geq 85.528 \\ 0.32 \cdot (x - 85.528) + 14.839{,}02 & \text{dla} \quad x > 85.528 \end{cases}, \tag{2}$$

[1] Typowy problem stanowi wybór miejsca i formy opodatkowania w układzie transgranicznym, zob. [Grzesiak S. i Jóźwiak R., 2010].

gdzie
x – dochód podlegający opodatkowaniu

W celu umożliwienia rozwiązywania podatkowych zadań optymalizacyjnych w układzie międzynarodowym, koniecznym jest dla celów porównawczych przedstawienie formuły (1) w walucie obcej, co prowadzi do ogólnej postaci parametrycznej:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x < kw \cdot E \\ a \cdot (x - kw \cdot E) & \text{dla} \quad kw \cdot E \leq x < g \cdot E, \\ b \cdot (x - g \cdot E) + a(g - kw) \cdot E & \text{dla} \quad x \geq g \cdot E \end{cases} \tag{3}$$

gdzie
x – dochód podlegający opodatkowaniu w walucie obcej
E – kurs złotówki

Funcja podatku dochodowego od osób fizycznych wyrażona w EURO[2] przyjmuje postać:

$$S_{PL}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 738{,}27 \\ -132{,}889 + 0{,}18x & 738{,}27 \leq x < 20.441{,}2 \\ 3.546.53 + 0{,}32(-20.441{,}2 + x) & x \geq 20.441{,}2 \end{cases} \tag{4}$$

Nieróżniczkowalność polskiej podatkowej funkcji taryfowej na zasadach ogólnych występuje w punktach stanowiących granice jej poszczególnych przedziałów, bowiem dla odpowiadających im dochodów nie istnieje jednoznacznie określona granica ilorazu różnicowego. Warunkiem różniczkowalności na granicach przedziałów jest równość odpowiednich lewo- i prawostronnych krańcowych stawek podatkowych [Hoffmann, 2008, s. 148]:

$$\lim_{\Delta e \to 0} \frac{f_l(x_0 + \Delta e) - f_l(x_0)}{\Delta e} = \lim_{\Delta e \to 0} \frac{f_r(x_0 + \Delta e) - f_r(x_0)}{\Delta e}, \tag{5}$$

gdzie $f_l(x)$ oraz $f_r(x)$ określają odpowiednio funkcję poprzedzającą punkt graniczny bądź po nim bezpośrednio następującą. Wyniki obliczeń krańcowych stawek dla punktów $P_1(738{,}271;0)$ oraz $P_2(20441{,}20;3546{,}53)$ można przedstawić w następującym zestawieniu:

⇨ $f_{l1}`(738{,}271) = 0$ oraz $f_{r1}`(738{,}271) = 0{,}18$, (6)

⇨ $f_{l2}`(20.441{,}20) = 0{,}18$ oraz $f_{r2}`(20.441{,}20) = 0{,}32$, (7)

Jak wynika z powyższego zestawienia, dla granic poszczególnych przedziałów dochodowych funkcji obciążenia podatkowego w Polsce nie są spełnione równości odpowiadających sobie granic ilorazów różnicowych, co powoduje

[2] W pracy zastosowano kurs: 1 € = 0,248 PLN.

nieróżniczkowalność funkcji w tych punktach. Ten problem można wyeliminować poprzez użycie funkcji możliwie silnie przybliżonej do funkcji obciążenia podatkowego, która spełnia warunek różniczkowalności w pełnym spektrum dochodowym (funkcja interpolacyjna). Tego typu funkcje można wygenerować za pomocą interpolacji wielomianowej. Proces interpolacji można przeprowadzić przy pomocy klasycznych metod interpolacji (na podstawie bazy jednomianowej, bazy Lagrange lub bazy Newtona), jak również przy użyciu interpolacji splajnowej.

Podstawą interpolacji wielomianowej jest stwierdzenie, że dla danych n + 1 punktów parami różnych od siebie istnieje dokładnie jeden wielomian o stopniu nie większym od n, który interpoluje te punkty. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia funkcji e(x), która przebiega przez n + 1 określonych węzłów. Rzędne węzłów (x_i dla i = 0,..., n) odpowiadają wartościom dochodu do opodatkowania, natomiast odpowiadające im odcięte (s_i, i = 0,..., n) wartościom obciążenia podatkowego.

Rozwiązanie na podstawie bazy jednomianowej

Szukana funkcja wielomianowa wyznaczona została przy użyciu bazy jednomianowej z wielomianów postaci $\{1, x^1, x^2, ..., x^n\}$. Dla n + 1 różnych parami węzłów o rzędnych x_i oraz odciętych s_i szukany jest wielomian:

$$e(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i, \quad a_i \in R, \tag{8}$$

przy czym dla poszukiwanych współczynników a_i oraz dla wartości odciętych S_i musi być spełniona następująca równość:

$$S_i = e(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot (x_i)^j, \quad i = 0,...,n \tag{9}$$

Zależność ta prowadzi do układu n + 1 równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^1 \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest wektor **a**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s} \tag{11}$$

Mnożąc wektor **a** przez wektor $\mathbf{x}^T = (1, x^1, x^2, ..., x^n)$ uzyskujemy poszukiwaną funkcję wielomianową:

$$e(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{12}$$

W celu interpolacji funkcji taryfowej zostały wybrane węzły pokrywające pełny przedział dochodów, istotny z punktu widzenia zadań optymalizacyjnych:

$$P(x_0;s_0) = (500;\ 0)$$
$$P(x_1;s_1) = (15.000;\ 2.567,11)$$
$$P(x_2;s_2) = (25.000;\ 5.005,31)$$
$$P(x_3;s_3) = (80.000;\ 22.605,30)$$
$$P(x_4;s_4) = (200.000;\ 61.005,30)$$

Uzyskany w ten sposób układ równań przyjmuje postać:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{s}, \tag{13}$$

gdzie macierz **M**

$$\mathbf{M} = \left\{\begin{matrix} 1 & 500 & 250000 & 125000000 & 62500000000 \\ 1 & 15000 & 225000000 & 3375000000000 & 50625000000000000 \\ 1 & 25000 & 625000000 & 15625000000000 & 390625000000000000 \\ 1 & 80000 & 6400000000 & 512000000000000 & 40960000000000000000 \\ 1 & 200000 & 40000000000 & 8000000000000000 & 1600000000000000000000 \end{matrix}\right\} \tag{14}$$

Rozwiązanie równania stanowi wektor **a**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s} \tag{15}$$

Mnożąc wektor **a** przez wektor **z** ($\mathbf{z}^T$=1,x,x^2,x^3,x^4), otrzymujemy szukaną funkcję interpolacyjną:

$$e(x) = -63,42154259719198 + 0,12497108200904175 \cdot x + 0,0000037577498058643 01 \cdot x^2 + 2,75199716994037 \cdot 10^{-11} \cdot x^3 + 6,620267906340445 \cdot 10^{-17} \cdot x^4 \tag{16}$$

Rozwiązanie na podstawie bazy Lagrange´a

Analogicznie określamy szukaną funkcję interpolacyjną dla n + 1 węzłów o współrzędnych (x_i,s_i), gdzie i = 0,..., n. Przyjmuje ona postać:

$$e(x) = \sum_{i=0}^{n} S_i \cdot L_i(x), \tag{17}$$

gdzie

$$L_i^n(x) = \prod_{j=0;j\neq i}^{n} \frac{x-x_i}{x_i-x_j} \tag{18}$$

Opierając się na tych samych węzłach, które wykorzystane zostały w przypadku baz monomialnych, uzyskujemy za pomocą formuły (18) następujące wielomiany Lagrange´a:

$s_0 \cdot L_0$ = 0·[(x-15.000)/(500-15.000)]·[(x-25.000)/(500-25.000)]·
[(x-80.000)/(2.000-80.000)]·[(x-200.000)/(500-200.000)] = 0

$s_1 \cdot L_1$ = 2.567,11·[(x-500)/(15.000-500)]·[(x-25.000)/(15.000-25.000)]·
[(x-80.000)/(15.000-80.000)]·[(x-200.000)/(15.000-200.000)]·

$$s_2 \cdot L_2 = 5.005,31 \cdot [(x-500)/(25.000-500)] \cdot [(x-15.000)/(25.000-15.000)] \cdot [(x-80.000)/(25.000-80.000)] \cdot [(x-200.000)/(25.000-200.000)]$$

$$s_3 \cdot L_3 = 22.602,30 \cdot [(x-500)/(80.000-500)] \cdot [(x-15.000)/(80.000-15.000)] \cdot [(x-25.000)/(80.000-25.000)] \cdot [(x-200.000)/(80.000-200.000)] \cdot$$

$$s_4 \cdot L_4 = 61.005,30 \cdot [(x-500)/(200.000-500)] \cdot [(x-15.000)/(200.000-15.000)] \cdot [(x-25.000)/(200.000-25.000)] \cdot [(x-80.000)/(200.000-80.000)] \cdot$$

Zsumowanie powyższych wielomianów daje szukaną funkcję interpolacyjną zgodnie z oczekiwaniami odpowiadająca funkcji (18):

$$e(x) = s_0 \cdot L_0 + s_1 \cdot L_1 + s_2 \cdot L_2 + s_3 \cdot L_3 + s_4 \cdot L_4 + s_5 \cdot L_5 + s_6 \cdot L_6 = -\,63,42154259719198 + 0,12497108200904175 \cdot x + 0,000003757749805864301 \cdot x^2 + 2,75199716994037 \cdot 10^{-11} \cdot x^3 + 6,620267906340445 \cdot 10^{-17} \cdot x^4 \qquad (19)$$

Rozwiązanie na podstawie bazy Newtona

Dla $n + 1$ węzłów poszukiwana funkcja interpolacyjna ma postać:

$$e(x) = a_0 \cdot w_0(x) + a_1 \cdot w_1(x) + \ldots + a_n \cdot w_n(x), \qquad (20)$$

gdzie

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 0 \\ (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n - 1) & \text{dla } 1 \le i < n \end{cases} \qquad (21)$$

Wartości parametrów a_i wyznaczano przez przyrównanie wartości funkcji interpolacyjnej do wartości funkcji taryfowej dla wybranych węzłów:

$$e(x_i) = s(x_i) \qquad \text{dla } 0 \le i \le n \qquad (22)$$

Równość powyższa prowadzi do układu równań, który dla wybranych wyżej węzłów przyjmuje postać:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{s} \qquad (23)$$

Macierz **M** składa się z następujących wierszy:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 48 \cdot 10^3 & 192 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 98 \cdot 10^3 & 882 \cdot 10^7 & 4.410 \cdot 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 148 \cdot 10^3 & 2.072 \cdot 10^7 & 20.720 \cdot 10^{11} & 103.600 \cdot 10^{15} & 0 & 0 \\ 1 & 218 \cdot 10^3 & 4.578 \cdot 10^7 & 77.826 \cdot 10^{11} & 933.912 \cdot 10^{15} & 6.537.384 \cdot 10^{19} & 0 \\ 1 & 278 \cdot 10^3 & 7.506 \cdot 10^7 & 172.638 \cdot 10^{11} & 3.107.484 \cdot 10^{15} & 40.397.292 \cdot 10^{19} & 242.383.752 \cdot 10^{11} \end{array} \qquad (24)$$

Po prawej stronie równania macierzowego (23) znajduje się wektor **s**, którego współrzędne odpowiadają wartościom funkcji obciążenia podatkowego dla poszczególnych węzłów:

$$S^T = (0 \quad 333,15 \quad 13.732,10 \quad 36.217 \quad 58.722 \quad 90.229 \quad 118.161) \qquad (25)$$

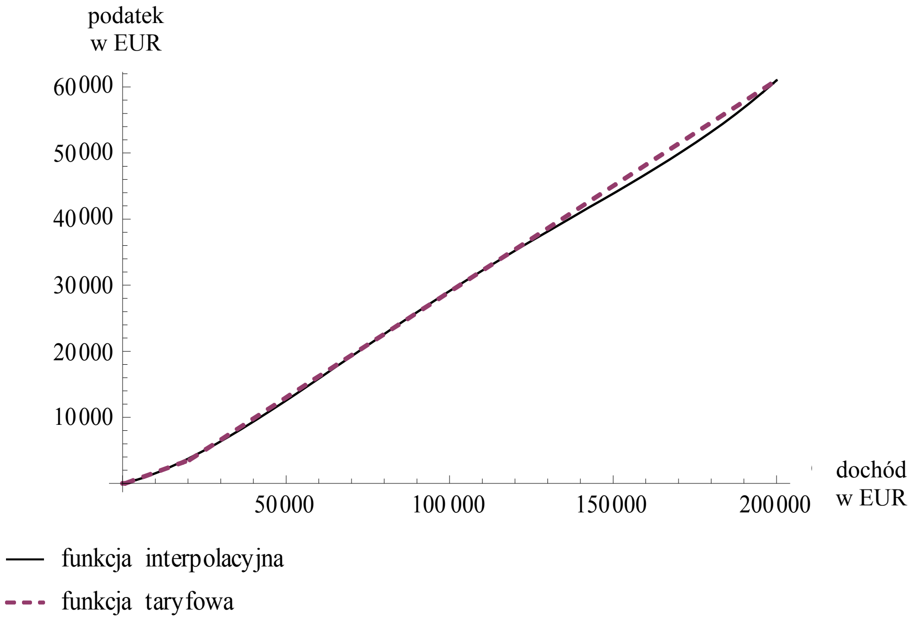
Rozwiązaniem układu równań (23) jest wektor $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s}$, który przemnożony przez ośmioelementowy wektor **w**, w postaci:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T = (&(1),\\ &(x-2000),\\ &((x-2000)(x-10000)),\\ &((x-2000)(x-10000)(x-50000)),\\ &((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)),\\ &((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)(x-150000)),\\ &((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)(x-150000)(x-220000)),\\ &((x-2000)(x-10000)(x-50000)(x-100000)(x-150000)(x-220000)(x-80000))),\end{aligned} \tag{26}$$

daje nam szukaną funkcję interpolacyjną e(x):

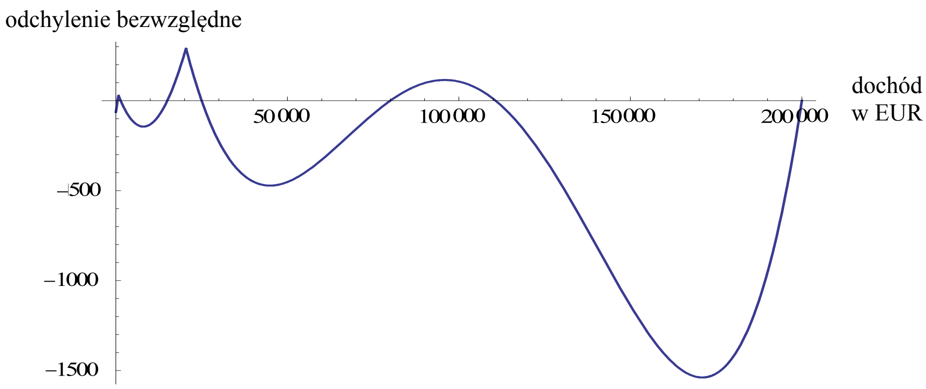
$$\begin{gathered} e(x) = (\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} = 141{,}959 - 0{,}0963265x + 0{,}00001297356x^2 - \\ - 1{,}51859 \cdot 10^{-10} x^3 + 9{,}23513 \cdot 10^{-16} x^4 - 2{,}77637 \cdot 10^{-21} x^5 + 3{,}24409 \cdot 10^{-27} x^6 \end{gathered} \tag{27}$$

Przy pomocy trzech przedstawionych wyżej metod uzyskano identyczną funkcję interpolacyjną e(x). Każda z wykorzystanych metod posiada pewne zalety. Metoda generująca funkcję interpolacyjną na bazie Newtona umożliwia proste dołączanie dodatkowych węzłów bez potrzeby ponownego przeliczania całego systemu. Stanowi to istotną zaletę pozwalającą na elastyczne stosowanie funkcji interpolacyjnej w zależności od określonego jej zastosowania. Metoda oparta na bazie jednomianowej charakteryzuje się z kolei dużą przejrzystością. Dla dużej liczby parametrów jest ona jednak mało efektywna. Zaletą interpolacji przy użyciu bazy Lagrange´a jest łatwość jej implementacji, chcąc jednak rozszerzyć funkcję o dodatkowy węzeł, konieczne jest powtórzenie całego procesu obliczeniowego.



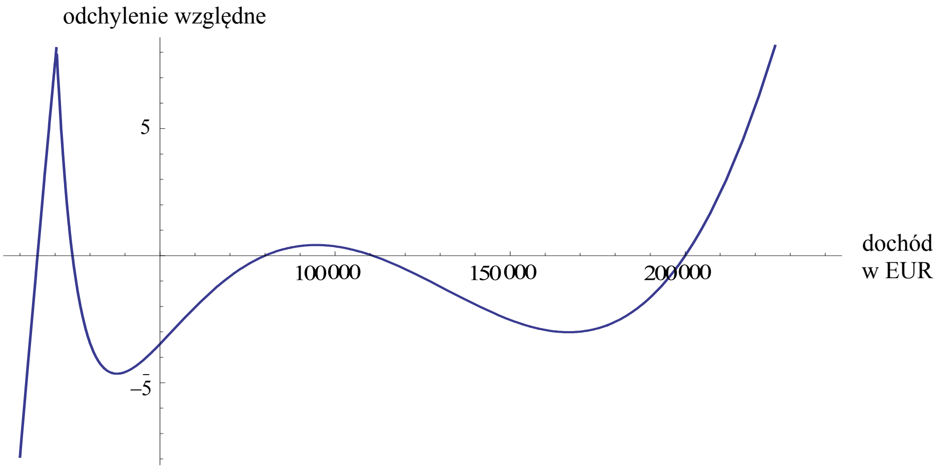
Rys. 1. Porównanie funkcji taryfowej według skali z funkcją interpolacyjną opartą na bazie jednomianowej

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 2. Odchylenie bezwzględne funkcji interpolacyjnej opartej na bazie jednomianowej od funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 3. Odchylenie względne funkcji interpolacyjnej opartej na bazie jednomianowej od polskiej funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.

Porównanie funkcji e(x) potwierdza stosunkowo dokładne odwzorowanie wyjściowej funkcji taryfowej przez wyprowadzoną funkcję interpolacyjną.

Jakość danej funkcji interpolacyjnej określana jest przez krzywe bezwzględnego oraz względnego jej odchylenia od funkcji pierwotnej.

Z przedstawionych wyżej rysunków wynika, iż wyznaczona funkcja interpolacyjna względnie dobrze przybliża funkcję taryfową w obszarze między pierwszym a ostatnim węzłem. Maksymalne odchylenie bezwzględne dla dochodów mniejszych od 200 000 (ostatni węzeł interpolacyjny) wynosi ok. 1500, co odpowiada mniej więcej czteroprocentowemu odchyleniu względnemu.

Poza obszarem dochodowym ograniczonym pierwszym i ostatnim węzłem odchylenia od pierwotnej funkcji taryfowej są tak duże, że jakiekolwiek zastosowanie funkcji interpolacyjnej dla dochodów leżących powyżej ostatniego węzła nie jest możliwe.

Sytuację zmienić może zagęszczenie węzłów. Wprowadzenie dodatkowego węzła zdecydowanie polepsza jakość interpolacji w obszarach dochodowych, które leżą w jego otoczeniu, powodując równocześnie silne wzmocnienie odchyleń w przedziałach odpowiadającym bardzo wysokim dochodom.

Interpolacja funkcjami sklejanymi

W celu uniknięcia efektu silnych odchyleń leżących za granicą ostatniego i przed granicą pierwszego węzła, istnieje możliwość zastosowania interpolacji splajnami (funkcjami sklejanymi). Polega ona na wprowadzeniu funkcji wielomianowych łączących dwa wierzchołki „obejmujące" dane miejsce nieróżniczkowalne.

Jak już wykazano, funkcja obciążenia podatkowego w Polsce jest nieróżniczkowalna jedynie w punktach stanowiących granice poszczególnych przedziałów dochodowych. W związku z tym można się ograniczyć tylko do punktów odpowiadających granicom przedziałów:

$$P_1\,(x_1;s_1) = (738{,}271;0)$$

$$P_2\,(x_2;s_2) = (20441{,}20;3546{,}53)$$

Zadanie polega na znalezieniu dla każdego węzła x_i odpowiedniej funkcji wielomianowej

$$e_i(x,x_d,x_g),\ \text{gdzie}\quad x_d < x_i < x_g, \tag{28}$$

która w punktach x_d oraz x_g „wtapia się" w funkcję taryfową w ten sposób, że funkcja całkowita jest w tych punktach ciągła i dwukrotnie różniczkowalna.

Punkty x_d oraz x_g muszą zostać tak dobrane, aby odchylenie funkcji wielomianowej $e_i(x,x_{di},x_{gi})$ od funkcji taryfowej s(x) dla danego węzła $P_i(x_i,s_i)$ było minimalne. Warunek ten można formalnie przedstawić jako:

$$\min_{x_{\mathrm{di}},x_{\mathrm{gi}}}\left[\left(\int_{x_{\mathrm{di}}}^{x_{\mathrm{gi}}}\left[S_{PL}(x)-e_i\left(x,x_{\mathrm{di}},x_{\mathrm{gi}}\right)\right]dx\right)^2\right]. \tag{29}$$

Warunek (29) opiera się na minimalizacji powierzchni zawartej pomiędzy funkcją faktycznego obciążenia podatkowego $S_{PL}(x)$ oraz szukaną funkcją splinową e_i. Ze względu na przedziałową definiowalność funkcji obciążenia podatkowego $S_{DE}(x)$ korzystniejsza z punktu widzenia zastosowania oprogramowania obliczeniowego[3] jest następująca forma zadania minimalizującego [Schanz, 2006]:

$$\min_{x_{\mathrm{di}},x_{\mathrm{gi}}}[(\int_{x_{\mathrm{di}}}^{x_i}s_{i-}(x)\,dx+\int_{x_i}^{x_{\mathrm{gi}}}s_{i+}(x)\,dx-\int_{x_{\mathrm{di}}}^{x_{\mathrm{gi}}}e_i(x)\,dx)^2] \tag{30}$$

Funkcje $s_{i-}(x)$ oraz $s_{i+}(x)$ odpowiadają elementowi funkcji obciążenia bezpośrednio poprzedzającemu węzeł $P_i(x_i, s_i)$ oraz elementowi po nim następującemu. Zadanie minimalizacyjne (30) musi zostać wykonane dla wszystkich nieróżniczkowalnych węzłów $P_i(x_i, s_i)$.

Aby spełnione były warunki ciągłości oraz dwukrotnej różniczkowalności, szukana funkcja wielomianowa $e_i(x)$ musi być funkcją przynajmniej stopnia piątego [Davies , 2001].

[3] W pracy obliczenia wykonano przy pomocy oprogramowania Mathematica 9.0.

Współczynniki tej funkcji określa następujący układ równań:

– funkcja musi przebiegać przez punkty xd oraz xg

$$S_{DE}(x_d) = a_0 + a_1 \cdot x_d + a_2 \cdot x_d^2 + a_3 \cdot x_d^3 + a_4 \cdot x_d^4 + a_5 \cdot x_d^5$$
$$S_{DE}(x_g) = a_0 + a_1 \cdot x_g + a_2 \cdot x_g^2 + a_3 \cdot x_g^3 + a_4 \cdot x_g^4 + a_5 \cdot x_g^5 \qquad (31)$$

– funkcja musi być w punktach x_d oraz x_g różniczkowalna

$$S_{DE}'(x_d) = a_1 + 2a_2 \cdot x_d + 3a_3 \cdot x_d^2 + 4a_4 \cdot x_d^3 + 5a_5 \cdot x_d^4$$
$$S_{DE}'(x_g) = a_1 + 2a_2 \cdot x_g + 3a_3 \cdot x_g^2 + 4a_4 \cdot x_g^3 + 5a_5 \cdot x_g^4 \qquad (32)$$

– funkcja musi być dwukrotnie różniczkowalna w punktach x_d oraz x_g

$$S_{DE}''(x_d) = 2a_2 + 6a_3 \cdot x_d + 12a_4 \cdot x_d^2 + 20a_5 \cdot x_d^3$$
$$S_{DE}''(x_g) = 2a_2 + 6a_3 \cdot x_g + 12a_4 \cdot x_g^2 + 20a_5 \cdot x_g^3 \qquad (33)$$

Zapis macierzowy powyższego układu równań ma postać:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a_i} = \mathbf{s_i}, \qquad (34)$$

gdzie macierz M

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_d & x_d^2 & x_d^3 & x_d^4 & x_d^5 \\ 1 & x_g & x_g^2 & x_g^3 & x_g^4 & x_g^5 \\ 0 & 1 & 2x_d & 3x_d^2 & 4x_d^3 & 5x_d^4 \\ 0 & 1 & 2x_g & 3x_g^2 & 4x_g^3 & 5x_g^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_d & 12x_d^2 & 20x_d^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_g & 12x_g^2 & 20x_g^3 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Należy zatem dla danego nieróżniczkowalnego punktu P_i wyznaczyć wektor $\mathbf{a_i}$

$$\mathbf{a_i} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s_i} \qquad (36)$$

a następnie w celu wyznaczenia funkcji $e_i(x,x_{di},x_{gi})$ przemnożyć wektor $\mathbf{a_i}$ przez wektor $\mathbf{x}$, gdzie

$$\mathbf{x}^T = (1 \;\; x \;\; x^2 \;\; x^3 \;\; x^4 \;\; x^5) \qquad (37)$$

Dla punktu P_1 współrzędnym wektora s odpowiadają wartości funkcji taryfowej oraz wartości jej pochodnych pierwszego i drugiego stopnia w punktach x_d oraz x_g:

$$s(x_{d1}) = 0,\ s(x_{g1}) = 0{,}18x - 556{,}02,\ s'(x_{d1}) = 0,\ s'(x_{g1}) = 0{,}18,$$
$$s''(x_{d1}) = 0,\ s''(x_{g1}) = 0$$

Rozwiązując równanie macierzowe:

$$\mathbf{a_1} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s_1}, \qquad (38)$$

wyznaczamy wektor a_1, który pomnożony przez wektor $x^T = (1 \ \ x \ \ x^2 \ \ x^3 \ \ x^4 \ \ x^5)$ daje nam funkcję $e_1(x,x_{d1},x_{g1})$:

$$e_1(x,x_{d1},x_{g1}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a_1} \tag{39}$$

Wartości x_{d1} oraz x_{g1} możemy wyznaczyć, rozwiązując zadanie minimalizacji:

$$\min_{x_{d1},x_{g1}} [(\int_{x_{d1}}^{738,27} s_{1-}(x)\,dx + \int_{738,27}^{x_{g1}} s_{1+}(x)\,dx - \int_{x_{d1}}^{x_{g1}} e_1(x)\,dx)^\wedge 2] \quad (40),$$

gdzie $s_{1-}(x) = 0$, $S_{1+}(x) = 0{,}18 \cdot x - 132{,}89$.

Obliczenia dla zadania (40) charakteryzują się jednak dużą niedokładnością, na którą wpływają przybliżenia dokonywane przez program obliczeniowy. Uzyskane w ten sposób wyniki są niezadowalające. W zastosowaniach odnoszących się do zagadnień optymalizacji opodatkowania wystarczający jest intuicyjny wybór wartości x_{d1} oraz x_{g1} tak, aby obejmowały one dany nieróżniczkowalny punkt. Prowadzi to do istotnego zmniejszenia nakładu obliczeniowego przy nieznacznym ubytku dokładności związanej z brakiem uzyskania optymalnego przebiegu funkcji sklejanej. Dla nieróżniczkowalnego punktu $P(x_{1;}s_1) = (8.004;0)$ zostały zatem intuicyjnie przyjęte następujące wartości:

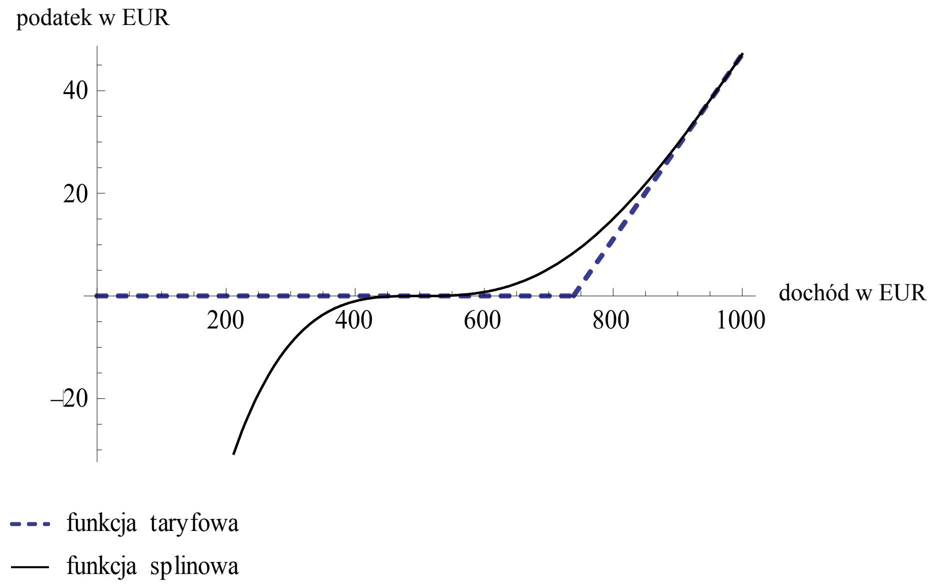
$$X_{d1} = 500, \qquad X_{g1} = 1000$$

Wstawiając powyższe wartości do równania funkcji $e_1(x,x_{d1},x_{g1})$, uzyskano szukaną funkcję sklejaną $e_1(x)$:

$$e_1(x) = -\,200{,}441 + 1{,}40664 \cdot x - 0{,}00367992 \cdot x^2 + \\ + 0{,}00000435544 \cdot x^3 - 2{,}23992 \cdot x^4 + 4{,}05312 \cdot x^5$$

Dla punktu $P_2 = (20.441{,}20;3.546{,}53)$ wektor $\mathbf{s_2}$ przyjmuje postać:

$$s(x_{d2}) = 0{,}18x - 132{,}889,\ s(x_{g2}) = 0{,}32(x-20441{,}20) + 3546{,}53$$
$$s'(x_{d2}) = 0{,}18,\ s'(x_{g2}) = 0{,}32,\ s''(x_{d2}) = 0,\ s''(x_{g2}) = 0 \tag{41}$$



Rys. 4. Splajan funkcji taryfowej dla nieróżniczkowalnego punktu x = 738,27

Źródło: Obliczenia własne.

Rozwiązaniem układu równań jest:

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{s_2} \tag{42}$$

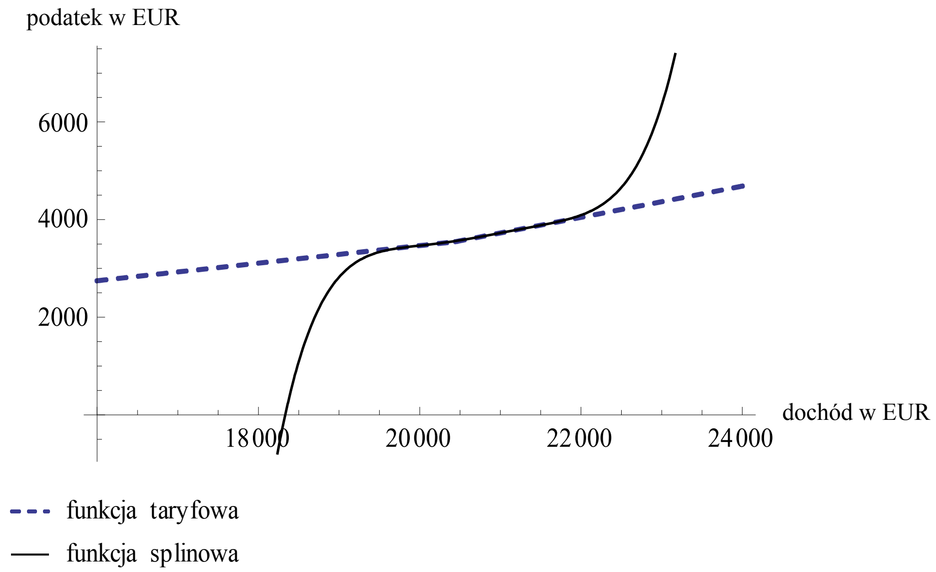
W celu wyznaczenia funkcji $e_i(x,x_d,x_g)$ mnożymy wektor **a** przez wektor **x**, gdzie

$$\mathbf{x}^T = (1\ \ x\ \ x^2\ \ x^3\ \ x^4\ \ x^5)$$

Dla $x_{d2} = 20.000$ oraz $x_{g2} = 21.000$ uzyskujemy funkcję interpolacyjną:

$$e_2(x) = -1{,}908549338890075 \cdot 10^8 + 45.987{,}8 \cdot x - 4{,}430601 \cdot x^2 + 0{,}00021334435 \cdot x^3 - 5{,}134525 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 4{,}941 \cdot 10^{-14} \cdot x^5$$

Uwzględniając obie funkcje sklejane, otrzymujemy funkcję interpolacyjną stanowiącą zmodyfikowaną funkcję taryfową:

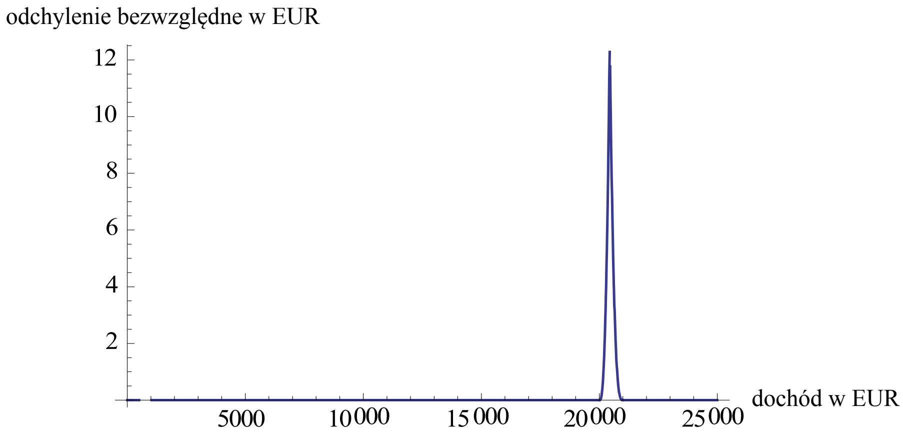


Rys. 5. Splajan funkcji taryfowej dla nieróżniczkowalnego punktu x = 20.441,20

Źródło: Obliczenia własne.

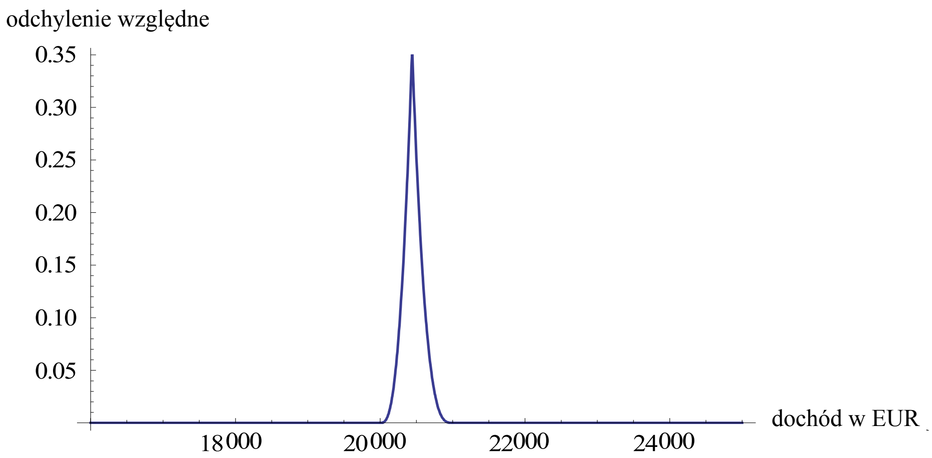
$$S_P(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 500 \\ e1(x) & 500 \leq x < 1.000 \\ -132{,}889 + 0{,}18x & 1.000 \leq x < 20.000 \\ e2(x) & 20.000 \leq x < 21.000 \\ 3546{,}53 + 0{,}32(-20441{,}20 + x) & x \geq 21.000 \end{cases} \tag{43}$$

Rysunki 6 i 7 przedstawiają bezwzględne oraz względne odchylenie funkcji zmodyfikowanej od pierwotnej funkcji taryfowej. Jak wynika z nich, zmodyfikowana funkcja taryfowa dobrze interpoluje polską funkcję taryfową. Najwyższe odchylenie bezwzględne występuje w pobliżu punktu P (20.441,20; 3.546,53) i wynosi 12 €, co odpowiada odchyleniu względnemu w wysokości około 0,35%.



Rys. 6. Odchylenie bezwzględne funkcji interpolacyjnej opartej na funkcjach sklejanych od funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 7. Odchylenie względne funkcji interpolacyjnej opartej na funkcjach sklejanych od funkcji taryfowej

Źródło: Obliczenia własne.

Podsumowanie

Przeprowadzone w artykule analizy wskazują na realnie istniejące sposoby i możliwości wyznaczenia najkorzystniejszej wysokości płaconego podatku poprzez wykorzystanie niezależnie czterech różnych podejść. Każde z nich posiada zarówno zalety, jak i wady. Funkcja interpolacyjna na bazie Newtona charakteryzuje się elastycznością poprzez możliwość prostego dołączania dodatkowych węzłów. Metoda oparta na bazie jednomianowej jest przejrzysta, ale mało efektywna dla większej ilości parametrów. Z kolei przy wykorzystaniu bazy Lagrange'a można ją stosunkowo łatwo implementować, trudności sprawia jednak konieczność rozbudowy funkcji o dodatkowy węzeł, wiąże się to bowiem z powtórzeniem obliczeń od początku.

Jakość interpolacji mierzona odchyleniem względnym w stosunku do funkcji taryfowej jest zadowalająca (w granicach 4%), natomiast problemy pojawiają się dla granicznych węzłów dochodów. Poza ich obszarem odchylenia od funkcji taryfowej są zbyt duże. Dla uniknięcia silnych odchyleń można jednak wykorzystać interpolacje funkcjami sklejanymi, co w końcowym efekcie pozwoliło na uzyskanie odchylenia względnego w granicach 0,35% .

Literatura

Davies P.J. (2001), *Interpolation and Approximation*, New York.

Grzesiak S., Jóźwiak R. (2010), *Wybór formy i miejsca opodatkowania firmy jako problem decyzyjny*, [w:] J. Hozer (red.), Miscellanea Mikroekonometrii, Szczecin, s. 271-283.

Hoffmann S. (2008), *Mathematische Grundlagen für Betriebswirte*, Berlin.

Schanz S. (2006), *Interpolationsverfahren am Beispiel der Interpolation der deutschen Einkommensteuertariffunktion 2006*, arqus Diskussionsbeiträge zur quantitativen Steuerlehre, Diskussionsbeitrag Nr. 20, s. 31.

Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych – tekst ujednolicony.

INTERPOLATION OF TARIFF FUNCTION
IN OPTIMISATION OF PERSONAL INCOME TAX

Summary: The article that refers to selection of technique of optimisation of personal income tax in Polish conditions. Several possible approaches have been presented. The differ with respect to solving method, accuracy and degree of complication. The basis of the research was to present the tariff function and its interpolation on the basis of the following methods: monomial basis, Lagrange basis, Newton basis, spline functions. Procedure of application of above mentioned methods was presented, as well as their advantages and disadvantages. For comparison and estimation of quality of presented solutions, absolute and relative deviations of interpolation functions from the Polish tariff function were used.

Keywords: tariff function, income tax, polynomial interpolation, spline functions.