Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 248 · 2015

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wdział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych
k.piasecki@ue.poznan.pl

O STOPIE ZWROTU OSZACOWANEJ PRZEZ INTUICYJNY ROZMYTY ZBIÓR PROBABILISTYCZNY[1]

Streszczenie: Rozważana jest stopa zwrotu, zdefiniowana jako rosnąca funkcja wartości przyszłej i malejąca funkcja wartości bieżącej. Niepewna wartość przyszła opisana jest za pomocą zmiennej losowej. Nieprecyzyjna wartość bieżąca jest reprezentowana przez intuicyjny zbiór rozmyty. Wtedy, zgodnie z uogólnioną zasadą rozszerzenia Zadeha, stopa zwrotu jest wyznaczona jako intuicyjny rozmyty zbiór probabilistyczny. Wyznaczona jest intuicyjna rozmyta oczekiwana stopa zwrotu oraz czterowymiarowy obraz ryzyka obarczającego tę stopę. W *Dodatku* zaprezentowano narzędzia formalne stosowane do opisu ryzyka.

Słowa kluczowe: stopa zwrotu, nieprecyzyjna wartość bieżąca, intuicyjny zbiór rozmyty.

Wprowadzenie

Podstawowym przedmiotem rozważań analizy kapitałowej jest stopa zwrotu, która jest wyznaczona za pomocą wartości bieżącej (PV) i przewidywanej wartości przyszłej (FV). PV to wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu.

Propozycja przedstawienia PV jako liczby rozmytej, jest już dobrze ugruntowaną ideą. Przekrojowy przegląd literatury poświęconej tej tematyce można znaleźć np. w [Piasecki, 2011a]. Tam też wykazano, że stopa zwrotu wyznaczona z zastosowaniem rozmytej PV i losowej FV jest opisana za pomocą probabi-

[1] Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/HS4/03543.

listycznego zbioru rozmytego [Hiroto, 1981]. Możliwości zastosowania opisanych w ten sposób stóp zwrotu do podejmowania decyzji inwestycyjnych opisano w [Piasecki, 2011a, 2011b, 2014].

W publikacji Piaseckiego [2013] przedstawiono przykład PV opisanej jako intuicyjny zbiór rozmyty. Głównym celem tego artykułu jest przedstawienie stopy zwrotu wyznaczonej z zastosowaniem intuicyjnej rozmytej PV i losowej FV. W pracy będą badane podstawowe właściwości tak przedstawianej stopy zwrotu.

1. Oszacowanie stopy zwrotu

Dla ustalonego horyzontu czasowego $t > 0$ inwestycji, każdy papier wartościowy jest określony za pomocą dwóch wartości:
- przewidywanej FV $V_t \in \mathbb{R}^+$,
- oszacowanej PV $V_0 \in \mathbb{R}^+$.

Podstawową charakterystyką informującą o korzyściach z posiadania tego instrumentu finansowego jest stopa zwrotu r_t dana za pomocą tożsamości

$$r_t = r(V_0, V_t). \tag{1.1}$$

W ogólnym przypadku funkcja $r: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją malejącą PV i funkcją rosnącą FV. Dzięki temu dla dowolnej wartości V_t możemy wyznaczyć funkcję odwrotną $r_0^{-1}(\cdot, V_t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

W klasycznym podejściu do problemu wyznaczenia stopy zwrotu wartość początkowa inwestycji jest identyfikowana z obserwowaną ceną rynkową $\check{C}$, co zapisujemy

$$V_0 = \check{C}\ . \tag{1.2}$$

Wartość przyszła inwestycji V_t jest obarczona ryzykiem niepewności co do przyszłego stanu rzeczy. Modelem formalnym tej niepewności jest przedstawianie FV jako zmiennej losowej $\tilde{V}_t: \Omega = \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Zbiór Ω jest zbiorem elementarnych stanów rynku finansowego. Jeżeli przy wyznaczaniu stopy zwrotu skorzystano z warunku (1.2), to wtedy także stopa zwrotu jest zmienną losową obarczoną ryzykiem niepewności. Zmienna losowa ta jest przedstawiona za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}_t(\omega) = r\left(\check{C}, \tilde{V}_t(\omega)\right). \tag{1.3}$$

W praktyce analizy rynków finansowych przyjęto sposób opisywania ryzyka niepewności za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu, danego za pomocą dystrybuanty $F_r: \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$. Należy tutaj założyć, że ryzyko niepewności obarczającej stopy zwrotu charakteryzować będzie istniejąca wariancja σ^2 tego rozkładu. Warunkowa dystrybuanta $F(\cdot\,|\check{C}): \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0;1]$ rozkładu prawdopodobieństwa FV jest dana przez tożsamość

$$F(x|\check{C}) = F_r\left(r(\check{C}, x)\right). \tag{1.4}$$

Jak wykazano w [Piasecki, 2013], PV może być obarczone ryzykiem nieprecyzji i ryzykiem nierozstrzygalności. Wtedy oszacowanie PV jest przedstawione jako intuicyjny zbiór rozmyty:

$$V = \{(x, \mu_V(x), \nu_V(x)) : x \in \mathbb{R}^+\}. \tag{1.5}$$

Stopa zwrotu jest obarczona splotem ryzyka niepewności obarczającego FV oraz ryzyka nieprecyzji i nierozstrzygalności obarczających PV. Taka stopa zwrotu jest intuicyjnym rozmytym zbiorem probabilistycznym [Zhang, Jia, Jiang, 2009]. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, dla każdych $\omega\epsilon\Omega$ funkcja przynależności $\rho(\cdot\,|\omega): \mathbb{R} \to [0;1]$ i funkcja wykluczenia $\varphi(\cdot\,|\omega): \mathbb{R} \to [0;1]$ tego zbioru są określone za pomocą zależności:

$$\begin{aligned}\rho(r|\omega) &= \max\left\{\mu_V(y): y\epsilon\mathbb{R}^+, r = r\left(y, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right\} = \\ &= \mu_V\left(r_0^{-1}\left(r, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right),\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\varphi(r|\omega) &= \min\left\{\nu_V(y): y\epsilon\mathbb{R}^+, r = r\left(y, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right\} = \\ &= \gamma_V\left(r_0^{-1}\left(r, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Dla tak opisanej stopy zwrotu oczekiwana stopa zwrotu jest intuicyjnym zbiorem rozmytym:

$$R = \left\{\left(x, \rho_R(x|\check{C}), \varphi_R(x|\check{C})\right) : x \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1.8}$$

co zapisujemy $R \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ i gdzie funkcje przynależności oraz wykluczenia są określone przez tożsamości

$$\rho(r|\check{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_V\left(r_0^{-1}(r, y)\right) dF_V(y|\check{C})\,, \tag{1.9}$$

$$\varphi(r|\check{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_V\left(r_0^{-1}(r, y)\right) dF_V(y|\check{C})\,. \tag{1.10}$$

W powyższym modelu szczególną uwagę zwraca fakt uzależnienia oczekiwanej stopy zwrotu od obserwowanej ceny rynkowej $\check{C}$. Odpowiada to praktyce podejmowania decyzji inwestycyjnych. Stąd właściwość tę możemy traktować jako pewną wartość dodaną proponowanego modelu. Tak sformułowany obraz oczekiwanej stopy zwrotu może odgrywać w analizach finansowych rynków rolę identyczną z odgrywaną tam przez oczekiwaną stopę zwrotu opisaną przez liczbę rzeczywistą. Z drugiej strony, dzięki zastosowaniu intuicyjnego rozmytego zbioru jako modelu wartości oczekiwanej stopy zwrotu, uzyskujemy znacznie bogatszy obraz ryzyka obarczającego stopę zwrotu.

2. Czterowymiarowy obraz ryzyka

W klasycznych teoriach rynku finansowego stopa zwrotu jest obarczona ryzykiem niepewności, które jest odzwierciedleniem braku wiedzy inwestora o przyszłych stanach rynku finansowego. Brak tej wiedzy powoduje brak pewności u inwestora co do przyszłych zysków lub strat. W naszym modelu ryzyko niepewności oceniać będziemy za pomocą wariancji σ^2 rozkładu stopy zwrotu danego za pomocą dystrybuanty $F_r\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$.

W poprzednim rozdziale zaproponowano model oczekiwanej stopy zwrotu uwzględniający wpływ bieżącej ceny rynkowej. W ten sposób podniesiono wartość poznawczą opisu instrumentu finansowego. Przyrost użyteczności tego opisu ma jednak swoją cenę. Jest nią ujawnienie ryzyka nieprecyzji i ryzyka nierozstrzygalności obarczających rozważany instrument.

Ryzyko nieprecyzji związane z nieprecyzyjnością informacji wykorzystywanej przy podejmowaniu decyzji. Wielu badaczy przedmiotu w obrazie nieprecyzji informacji wyróżnia nieostrość oraz wieloznaczność informacji[2]. Wieloznaczność informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia rekomendowanej alternatywy spomiędzy wielu rozważanych. Nieostrość informacji można sformułować jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją a jej zaprzeczeniem.

Zatem na ryzyko nieprecyzji składa się ryzyko niejednoznaczności i nieostrości. Powstaje pytanie, czy z punktu widzenia potrzeb procesów inwestycyjnych są to ryzyka istotne.

Inwestor część odpowiedzialności za podejmowane przez siebie inwestycje przerzuca na doradców lub na stosowane narzędzia analityczne. Z tego powodu inwestor w znakomitej części ogranicza swoje wybory decyzji inwestycyjnych do alternatyw rekomendowanych przez doradców lub stosowane instrumentarium analityczne. W ten sposób inwestor minimalizuje ryzyko osobistej odpowiedzialności za podjętą decyzję finansową [zob. Piasecki, 1990].

Wzrost ryzyka wieloznaczności oznacza, że będzie się powiększać ilość alternatywnych rekomendacji inwestycyjnych. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych alternatyw takiej decyzji finansowej, która *ex post* zostanie obarczona odpowiedzialnością za utracone szanse.

---

[2] Zobacz na przykład [Klir, 1993].

Właściwym narzędziem pomiaru ryzyka wieloznaczności jest zaproponowana przez de Luca i Terminiego [1979] miara energii. Dla naszych dalszych celów aplikacyjnych wystarczającym jest określenie miary energii jako znormalizowanej miary danej za pomocą tożsamości (A.12). Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwaną stopę zwrotu $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą miary energii $d(R)$ zdefiniowanej następująco:

$$d(R) = \mathscr{m}(R), \tag{2.1}$$

gdzie znormalizowana miara $\mathscr{m}(\cdot)$ jest dana przez tożsamość (A.12).

Wzrost ryzyka nieostrości oznacza zacieranie się granic wyróżniających rekomendowane alternatywy inwestycyjne. Powoduje to, że wzrastają szanse wyboru alternatywy nierekomendowanej. W ten sposób wzrost ryzyka niewyrazistości wpływa na przyrost istotnego ryzyka osobistej odpowiedzialności inwestora.

Właściwym narzędziem do pomiaru nieostrości informacji reprezentowanej przez zbiór rozmyty jest miara entropii [zob. więcej Bierdosian, Xie, 1984] zaproponowana przez de Luca i Terminiego [1972]. Kacprzyk i Szmidt [2001] miary te uogólnili do przypadku informacji reprezentowanych przez intuicyjne zbiory rozmyte.

W literaturze przedmiotu znajdujemy szereg propozycji miar entropii zbiorów rozmytych. Propozycje te podzielić można z grubsza na dwie grupy. W pierwszej z nich znajdujemy te miary entropii, w których definicjach skorzystano ze znajomości przebiegu zmienności pewnych specyficznych funkcji. Jedynym uzasadnieniem wprowadzenia tych miar entropii było spełnianie przez nie warunków aksjomatycznej definicji miary entropii [de Luca, Termini, 1979].

Drugą grupą miar entropii są miary zdefiniowane na podstawie pewnych intuicyjnych przesłanek. Przesłanki te wynikają z przekonania, że miara entropii powinna być funkcją odległości pomiędzy pewnymi zbiorami. Poszczególne propozycje miary entropii różniły się wskazaniem pary porównywanych zbiorów. Autorzy, omawiając swoje propozycje określenia miary entropii, przedstawiali przesłanki uzasadniające merytorycznie dokonany wybór pary porównywanych zbiorów.

Kaufmann [1975] zaproponował, aby jako miernik entropii zbioru rozmytego przyjąć jego zbieżność do najbardziej podobnego zbioru klasycznego. Czogała, Gottwald i Pedrycz [1981] eksponują przesłankę mówiącą, że niewyraźne określenie przynależności elementów do zbioru rozmytego powoduje niespełnianie prawa wyłączonego środka. Wynika z tego ich propozycja, aby miarę entropii zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ rozumieć jako odległość zbioru $A \cap A^C$ od zbioru pustego $\emptyset$. Wychodząc z tych samych przesłanek co powyżej, miarę entropii zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ można rozumieć jako odległość zbioru $A \cup A^C$ od przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Innym ujęciem miar entropowych jest ujęcie zaproponowane przez Yagera [1979]. Jego zdaniem miara entropii zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ powinna być oceną rozróżnialności pomiędzy zbiorem A i jego dopełnieniem A^C. Oczywistą przesłanką tak rozumianego pojęcia miary entropii jest fakt, że im zbiór rozmyty jest mniej wyraziście określony, tym bardziej jest podobny do swego dopełnienia. Zatem miara entropii powinna być malejącą funkcją odległości pomiędzy zbiorami rozmytymi A i A^C. Po prostych przekształceniach łatwo można wykazać, że przy przyjętych w *Dodatku* założeniach, wszystkie zdefiniowane powyżej miary entropii są identyczne [Piasecki, 1990].

Pełnej syntezy tych postulatów dokonał Kosko [1991], który stwierdził, że entropia informacji, reprezentowanej przez podzbiór rozmyty $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, powinna maleć wraz ze wzrostem podobieństwa zbioru $A \cap A^C$ do zbioru pustego $\emptyset$ i zmniejszaniem się podobieństwa zbioru $A \cup A^C$ do przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Oba te postulaty stanowiły przesłanki do sformułowania kolejnej propozycji miary entropii. Ze względu na dobre syntetyczne uzasadnienie oraz uniwersalizm, zaproponowana przez Kosko miara entropii jest w tej chwili powszechnie stosowana. Poszczególne jej implementacje różnią się jedynie zastosowanym rodzajem miary energii zbiorów rozmytych. Różnice te wynikają na ogół z koniecznego dostosowania miary do właściwości przestrzeni, z której pochodziły oceniane zbiory rozmyte. Miarę entropii Kosko łatwo można uogólnić do przypadku informacji reprezentowanych przez intuicyjne zbiory rozmyte. Dzięki temu miarę tę wykorzystamy do oceny ryzyka nieostrości obarczającej oczekiwaną stopę zwrotu $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$. Ryzyko to można ocenić za pomocą miary entropii $e(R)$ określonej za pomocą tożsamości:

$$e(A) = \frac{m(A \cap A^C)}{m(A \cup A^C)}. \tag{2.2}$$

Nierozstrzygalność informacji interpretuje się jako brak możliwości pełnej wiedzy o zarekomendowaniu lub odrzuceniu poszczególnych alternatyw. Z tej przyczyny nierozstrzygalność może być identyfikowana z niepewnością w ujęciu Knighta [1921].

Wzrost ryzyka nierozstrzygalności oznacza spadek odpowiedzialności za dokonany wybór, jaką inwestor może przenieść na doradcę lub stosowany aparat analityczny. W ten sposób automatycznie wzrasta osobista odpowiedzialność inwestora za podjętą decyzję.

Właściwym narzędziem do pomiaru nierozstrzygalności informacji reprezentowanej przez intuicyjny zbiór rozmyty jest miara entropii zdefiniowana przez Burillo i Bustince [1996]. W tej pracy, dla podkreślenia faktu, że ta charakterystyka służy do pomiaru zjawiska odmiennego od zjawiska mierzonego przez miarę entropii de Luca i Terminiego [1972], dla funkcjonału spełniającego warunki narzucone przez Burillo i Bustince [1996] proponuje się odmienną nazwę miary ignorancji. Ryzyko nierozstrzygalności obarczające oczekiwaną stopę zwrotu R oceniać będziemy za pomocą miary ignorancji $k(R)$ zdefiniowanej w [Piasecki, 2015] za pomocą tożsamości

$$k(R) = \mathcal{m}(\diamond R) - \mathcal{m}(\square R)\,, \tag{2.3}$$

gdzie zbiory rozmyte $\square R$ i $\diamond R$ zostały zdefiniowane przez tożsamości (A.4) i (A.5).

Przeprowadzona w tym rozdziale dyskusja dowodzi, że wzrost ryzyka nieprecyzji lub ryzyka nierozstrzygnięcia istotnie pogarsza warunki inwestowania. Posługiwanie się czterowymiarowym obrazem ryzyka $\left(\sigma^2, d(R), e(R), k(R)\right)$ ułatwia równoczesne zarządzanie ryzykiem niepewności, nieprecyzji i nierozstrzygalności. Pożądanym tutaj działaniem jest minimalizacja każdej z czterech ocen ryzyka.

Powstaje natychmiast kolejne pytanie, czy takie poszerzenie oceny ryzyka jest celowe.

W [Piasecki, 2011a] pokazano, że ryzyko niepewności i nieprecyzji jest skorelowane ujemnie, natomiast w kolejnej publikacji [Piasecki, 2015] ukazano, że także ryzyko nieostrości i nierozstrzygalności może być skorelowane ujemnie. Oznacza to, że zawsze istnieje możliwość ograniczenia ryzyka niepewności prognozy poprzez odpowiednie obniżenie jakości informacji zawartej w tej prognozie. Jedynie kontrola wszystkich ocen jakości informacji zawartej w prognozie pozwoli na uniknięcie zaniżonych ocen ryzyka niepewności.

Po drugie, uwzględnienie ryzyka nieprecyzji i nierozstrzygalności pozwoli odrzucać te spośród wariantów inwestycyjnych, które co prawda są atrakcyjne z punktu widzenia klasycznej teorii Markowitza, ale niestety zebrane na ich temat informacje są niskiej jakości.

A. Dodatek

W celu nadania powyższym rozważaniom jednoznacznego charakteru, zostaną przedstawione tutaj wybrane podstawowe pojęcia teorii rozmytych zbiorów intuicyjnych. Ze względu na zakres tych rozważań opis intuicyjnych zbiorów rozmytych ograniczymy do przypadku podzbiorów przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Punktem odniesienia do tego opisu jest rodzina $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ wszystkich rozmytych przestrzeni $\mathbb{R}$. Każdy podzbiór rozmyty $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest opisany za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_A \in [0,1]^{\mathbb{R}}$. W ujęciu logik wielowartościowych, wartość $\mu_A(x)$ funkcji przynależności jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \in A$.

Atanassov [1985] zdefiniował pojęcie intuicyjnego zbioru rozmytego (w skrócie: IFS) A jako zbioru trójek uporządkowanych

$$A \ = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)\ ) : x \in \mathbb{R}\}, \tag{A.1}$$

gdzie funkcja wykluczenia $\nu_A \epsilon [0,1]^{\mathbb{R}}$ spełnia tożsamościowo warunek

$$\nu_A(x) \leq 1 - \mu_A(x). \tag{A.2}$$

W ujęciu logik wielowartościowych, wartość $\nu_A(x)$ funkcji wykluczenia jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \notin A$. Za pomocą symbolu $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ oznaczamy rodzinę wszystkich IFS przestrzeni $\mathbb{R}$.

Korzystając z określonych powyżej funkcji przynależności i wykluczenia, możemy teraz za pomocą tożsamości

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \tag{A.3}$$

określić funkcję nierozstrzygnięcia $\pi_A \in [0,1]^{\mathbb{X}}$. Wartość $\pi_A(x)$ określa stopień naszego niezdecydowania co do oceny wzajemnych relacji pomiędzy elementem $x \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$. Z tej przyczyny funkcja nierozstrzygnięcia π_A może być interpretowana jako obraz niepewności w ujęciu Knighta [1921].

Za Atanassovem [1993], dla dowolnego IFS $A \epsilon \mathcal{I}(\mathbb{R})$ określamy największy zbiór rozmyty $\Box A \subset A$ i najmniejszy zbiór rozmyty $\diamond A \supset A$. Mamy tutaj

$$\Box A \ = \{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\ ) : x \in \mathbb{X}\}, \tag{A.4}$$

$$\diamond A \ = \{(x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x)\ ) : x \in \mathbb{X}\}. \tag{A.5}$$

Rozważmy teraz dowolny zbiór rozmyty $\tilde{Z}$ opisany za pomocą swej funkcji przynależnosci $\mu_Z \in [0,1]^{\mathbb{R}}$. Taki zbiór rozmyty można identyfikować z IFS reprezentowanym przez zbiór trójek uporządkowanych

$$Z \ = \{(x, \mu_Z(x), 1 - \mu_Z(x)\ ) : x \in \mathbb{R}\}, \tag{A.6}$$

Funkcja nierozstrzygnięcia powyższego IFS spełnia tożsamościowo warunek

$$\pi_Z(x) = 0. \tag{A.7}$$

Wynika z tego, że stosowanie zbiorów rozmytych do tworzenia modeli obiektów realnych oznacza przyjęcie *implicite* silnego założenia głoszącego, że zawsze potrafimy rozstrzygnąć niepewność co do spełniania przez każdy stan elementarny stawianych mu wymagań. Jak wiemy jednak z potocznej obserwacji, na ogół tak nie jest i nasze rozstrzygnięcia są obarczane zauważalnym marginesem niezdecydowania. Oznacza to, że rozszerzenie klasy zbiorów rozmytych do klasy IFS w istotny sposób wzbogaca możliwości rzetelnego opisu nieprecyzji. Droga do uzyskania tego rozszerzenia jest dość łatwa, gdyż klasa IFS w chwili obecnej posiada już bogate i wszechstronne opracowanie teoretyczne [np. Atanassov, 1999].

Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ działania teoriomnogościowe i relacje pomiędzy IFS są zdefiniowane w następujący sposób:

$$A^C = \{(x, \nu_A(x), \mu_A(x)) : x \in \mathbb{X}\}, \tag{A.8}$$

$$A \cup B = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)) : x \in \mathbb{X}\}, \tag{A.9}$$

$$A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)) : x \in \mathbb{X}\}. \tag{A.10}$$

W przeprowadzonych rozważaniach podstawowym narzędziem pomiaru będzie miara zbioru rozmytego zaproponowana przez Khalili'ego [1979]. Miarę tę można uogólnić do przypadku dowolnego IFS. Wtedy miarą $A \epsilon \mathcal{I}(\mathbb{R})$ jest wartość

$$w(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x) dx \ . \tag{A.11}$$

Stosuje się ją do zdefiniowania unormowanej miary IFS określonej dla $A \epsilon \mathcal{I}(\mathbb{R})$ przez zależność:

$$m(A) = \frac{w(A)}{1 + w(A)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\int_{-y}^{y} \mu_A(x) dx}{1 + \int_{-y}^{y} \mu_A(x) dx}. \tag{A.12}$$

Dodatkowo znormalizowana miara IFS może nam posłużyć do wyznaczenia metryki na rodzinie $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. Zgodnie z sugestią zawartą w [Kaufmann, 1975] to odległość Hamminga dana dla dowolnej pary $A, B \epsilon \mathcal{I}(\mathbb{X})$ przez odległość

$$\delta(A, B) = m(A \cup B) - m(A \cap B). \tag{A.11}$$

Podsumowanie

Przeprowadzona w pracy dyskusja nad modelem stopy zwrotu stanowi kontynuację badań zainicjowanych w [Piasecki, 2011a] nad problematyką nieprecyzyjnej stopy zwrotu. Z punktu widzenia teorii finansów, nowym elementem w tej dyskusji stało się ryzyko nierozstrzygalności. Pomimo tej modernizacji, całą bogatą empiryczną wiedzę zebraną na temat obarczającego stopy zwrotu ryzyka niepewności można wykorzystać w zaproponowanym modelu. Jest to wysoce korzystna cecha zaproponowanego modelu, gdyż przybliża możliwość jego realnych zastosowań.

Uzyskane tutaj wyniki stanowią podstawę do uogólnienia normatywnej teorii decyzji finansowych opisanej w [Piasecki, 2011a, 2011b, 2014].

Literatura

Atanassov K., Stoeva S. (1985), *Intuitionistic fuzzy sets*, [w:] J. Albrycht, H. Wiśniewski (red.), *Proceedings of Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, Poznań.

Atanassov K. (1993), *New variant of modal operators in intuitionistic fuzzy modal logic*, „BUSEFAL”, nr 54.

Atanassov K. (1999), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Biedrosian S.D., Xie W.X. (1984), *An information measure for fuzzy sets*, „IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics”, nr 14.

Burillo P., Bustince H. (1996), *Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems”, nr 78.

Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W. (1982), *On the concepts of measures of fuzziness and their applications in decision making*, 8th triennial World Congress IFAC, Kyoto.

Hiroto K. (1981), *Concepts of probabilistic sets*, „Fuzzy Sets and Systems”, nr 5.

Kaufmann A. (1975), *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, vol. I, Fundamental Theoretical Elements*, Academic Press, New York.

Khalili S. (1979), *Fuzzy measures and mappings*, „J. Math. Anal. Appl.”, nr 68.

Klir G.J. (1993), *Developments in uncertainty-based information*, [w:] M. Yovits (red.), *Advances in Computers 36*, Academic Press, San Diego.

Kosko B. (1986), *Fuzzy entropy and conditioning*, Inform Sciences, nr 40.

de Luca A., Termini S. (1972), *A definition of a non-probabilistic entropy in the settings of fuzzy set theory*, „Inform. and Control”, nr 20.

de Luca A., Termini S. (1979), *Entropy and energy measures of fuzzy sets*, „Advances in fuzzy set theory and applications”, nr 20.

Knight F.H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company, Boston.

Piasecki K. (1990), *Decyzje i wiarygodne prognozy*, Zeszyty Naukowe S.I, z. 106, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Piasecki K. (2011a), *Effectiveness of securities with fuzzy probabilistic return*, „Operations Research and Decisions”, nr 21(2).

Piasecki K. (2011b), *Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wyd. UE, Poznań. DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K. (2013), *Intuitionistic assessment of behavioural present value*, „Folia Oeconomica Stetinensia", nr 13(21)(2), DOI: 10.2478/foli-2013-0021.

Piasecki K. (2014), *On imprecise investment recommendations*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", nr 37(50). DOI: 10.2478/slrg-2014-0024.

Piasecki K. (2015), *Some remarks on axiomatic definition of entropy measure*, praca złożona do druku.

Szmidt E.J., Kacprzyk J. (2001), *Entropy for intuitionistic fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems", nr 118.

Yager R.R. (1979), *On the measure on fuzziness and negation, Part I, Membership in the unit interval*, School of Business Administration Rep. RRY 79-10-16., New Rochelle.

Zhang Q., Jia B., Jiang S. (2009), *Interval-valued intuitionistic fuzzy probabilistic set and some of its important properties*, Proceedings of the 1st International Conference on Information Science and Engineering ICISE2009, Guangzhou.

ON RETURN RATE ESTIMATED BY INTUITIONISTIC FUZZY PROBABILISTIC SET

Summary: The return rate is determined here by present value given as intuitionistic fuzzy subset and by anticipated future value given as a random variable. In this way using the Zadeh's extension principle, we obtain return rate described by an intuitionistic fuzzy probabilistic set. For this case expected return rate is calculated as an intuitionistic fuzzy subset in the real line. Four-dimensional risk image is introduced. In the Appendix we discuss formal tools which are applied for describing risk.

Keywords: return rate, imprecise present value, intuitionistic fuzzy set.