



Rafał Buła

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Finansów i Ubezpieczeń
Katedra Inwestycji i Nieruchomości
rafal.bula@ue.katowice.pl

WERYFIKACJA JAKOŚCI PROGNOZ ZMIENNOŚCI WYKORZYSTYWANYCH W MODELU RISKMETRICS™

Streszczenie: Artykuł jest poświęcony problematyce prognozowania zmienności z wykorzystaniem wykładniczo ważonych średnich ruchomych. W pierwszej kolejności omówiono wybrane modele zmienności stóp zwrotu oraz podkreślono praktyczne znaczenie EWMA wykorzystywanych w modelu Riskmetrics™. Następnie przedstawiono wyniki badań empirycznych wskazujących na potencjalne korzyści wynikające z zastosowania omawianej metodyki.

Słowa kluczowe: zmienność, EWMA, Riskmetrics™.

Wprowadzenie

Wśród kluczowych problemów związanych nieodłącznie z podejmowaniem inwestycji na rynku finansowym jednym z najistotniejszych jest kwestia oceny poziomu ich ryzykowności. Mimo rozmaitych ułomności do najczęściej wykorzystywanych mierników w procesie kwantyfikacji ryzyka inwestycji finansowych należą wariancja oraz odchylenie standardowe stopy zwrotu. Konieczność modyfikacji klasycznego modelu Samuelsona–Osborne’a wykorzystującego multiplikatywny ruch Browna stała się jednak wraz z upływem czasu oczywista.

Dlatego też nie rezygnując z dotychczasowych, uznawanych za dogodne z ekonomicznego punktu widzenia mierników, starano się zmienić odpowiednie założenia modelowe, tak by w większym stopniu odzwierciedlały rzeczywiste fluktuacje na rynkach finansowych (modele ARCH, GARCH i wariacje). Jedną

z najmniej skomplikowanych, a jednocześnie często używanych w praktyce jest konstrukcja wykorzystywana w ramach metodyki RiskmetricsTM (służącej docelowo prognozowaniu wartości zagrożonej¹), zakładająca modelowanie i prognozowanie zmienności w czasie za pomocą wykładniczo ważonych średnich ruchomych. Powstaje jednak pytanie, na ile stosowanie owej metodyki jest uzasadnione poprawą jakości uzyskiwanych oszacowań. Celem niniejszego artykułu jest zatem dokonanie oceny, czy prognozy zmienności (wariancji) dokonywane za pomocą wykładniczo ważonych średnich ruchomych umożliwiają trafniejsze przewidywanie jej poziomu, niż w sytuacji wykorzystania równych wag. Z tego też względu w niniejszym artykule analizie zostaną poddane oszacowania zmienności dla wybranych spółek notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A., uzyskiwane w sposób tradycyjny oraz z wykorzystaniem opisanej metodyki. Wszelkie obliczenia autor prowadził z wykorzystaniem pakietu MS Excel oraz języka Visual Basic for Applications.

1. Wybrane modele zmienności stóp zwrotu

Zwiększone zainteresowanie problematyką modelowania zmienności szeregów czasowych, wynikające z zauważonych niedostatków klasycznego geometrycznego ruchu Browna zaowocowało, począwszy od lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku, powstaniem ogromnej liczby różnorodnych modeli. W pierwszej kolejności należy wspomnieć o wykorzystanym przez Engle'a (pierwotnie w odniesieniu do inflacji w Wielkiej Brytanii) modelu ARCH(q) (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) [Engle, 1982, s. 988-989; Ganczarek-Gamrot, 2013, s. 59-60]:

$$\varepsilon_t | \mathcal{Y}_{t-1} \sim N(0, h_t),$$
$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

przy czym \mathcal{Y}_t oznacza zasób informacji dostępny w chwili t , h_t warunkową wariancję, a $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$) są parametrami. W modelu tym (przy założeniu, że dla co najmniej jednego opóźnienia $\alpha_i > 0$) przeszłe realizacje składnika losowego oddziałują na bieżący poziom jego warunkowej wariancji. Jeśli przyjąć, że procesem tym może być modelowana stopa zwrotu, wówczas gwałtowne fluktuacje cen sprawiają, że warunkowa wariancja wzrasta, a zatem ma

¹ Na temat wartości zagrożonej piszą m.in. [Jorion, 2007; Pera, 2008].

miejsce często obserwowane grupowanie zmienności (*volatility clustering*). W modelu ARCH bieżący poziom warunkowej wariancji jest uzależniony od jej historycznych wartości jedynie pośrednio, poprzez realizacje składnika losowego. Problem ten uwzględnia model uogólniony GARCH(p,q) (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) zaproponowany przez T. Bollersleva [1986, s. 308-309] postaci:

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j},$$

gdzie:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

$$\beta_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

W ujęciu twórców modelu innowacje mają warunkowy rozkład gaussowski². W odniesieniu do finansowych szeregów czasowych przyjmuje się także, że składnik czysto losowy ma warunkowy rozkład cechujący się leptokurtozą jak rozkład Studenta-Gosseta czy uogólniony rozkład błędu.

Najprostszym i chyba najczęściej wykorzystywanym jest model GARCH(1,1):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

Klasa modeli pokrewnych jest w chwili obecnej bardzo liczna, ponieważ „Ekonometrycy bez opamiętania tworzyli kolejne warianty modelu GARCH, z których większość stanowi jedynie marginalnie ulepszony model wyjściowy” [Jorion, 2007, s. 224]³. Poszukując modelu uproszczonego zauważono, że prognozy uzyskiwane za pomocą modeli GARCH są zbliżone do prognoz otrzymywanych z wykorzystaniem wykładniczo ważonych średnich ruchomych

² Choć np. już Bollerslev [1986, s. 309, przyp. 1] odnotowuje, że nie ma przeszkód dla wykorzystania innych rozkładów.

³ Trzeba zauważyć, że słowa P. Joriona należy w opinii autora interpretować nie w odniesieniu do wartości poznawczej wzmiankowanych modeli, lecz ekonomicznej zasadności ich wykorzystania. Niewątpliwie rozbudowane modele GARCH dominują nad relatywnie prostymi modelami w sensie precyzji dostarczanych prognoz. Tym niemniej nasuwa się tu analogia z koncepcją efektywności informacyjnej rynku kapitałowego. W pierwotnym sformułowaniu owej idei akcentowano konieczność uwzględnienia przez uczestników rynku wszelkich dostępnych informacji. Obecnie podkreśla się fakt, że marginalne korzyści wynikające z pozyskania dodatkowych informacji muszą przekraczać marginalny koszt ich zdobycia i wykorzystania. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku modeli zmienności – z punktu widzenia uczestników rynku precyzyjniejsze metody prognozowania są mało użyteczne, jeśli ich użycie nie generuje korzyści przekraczających koszty stosowania.

[J.P. Morgan & Reuters, 1995, s. 89-90], które w rzeczywistości są szczególnym przypadkiem modelu IGARCH (tj. gdzie $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$), przy czym $p = q = 1$, zaś $\alpha_0 = 0$. W modelu tym wykorzystuje się zatem tylko jeden parametr, λ :

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2,$$

co w odniesieniu do stóp zwrotu można zapisać jako:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2,$$

przy czym $r_t \sim IID(0, \sigma_t^2)$. Model ten dla okresów krótkich wykazuje zbieżność z modelem GARCH, dla długich różnią się one jednak istotnie [Geweke, 1986].

Problematyczny pozostaje jednak dobór parametru λ . W modelu Riskmetrics™ przyjęto, że dla prognoz dziennych wynosi on 0,94, zaś dla miesięcznych – 0,97. Dobór takowy, jakkolwiek dokonany na podstawie analizy danych historycznych, może budzić wątpliwości. Po pierwsze, być może lepsze rezultaty można zyskać posiłkując się parametrami zróżnicowanymi w populacji analizowanych instrumentów. Po drugie, celowe może być dopuszczenie zmienności w czasie owego parametru, tak by jego poziom odzwierciedlał także najnowsze notowania. Ponadto, nie jest przesądzone, czy uzyskiwane prognozy będą istotnie lepsze od otrzymywanych za pomocą równomiernie ważonych średnich ruchomych, albowiem dla danych miesięcznych istnieją badania sugerujące posilkowanie się raczej klasycznym, uaktualnianym w czasie odchyleniem standardowym niż oszacowaniami pochodzącymi z modelu GARCH(1,1) [Figlewski, 1994]. Jednocześnie wskazuje się na zalety modeli wariancji warunkowej w ocenie poziomu ryzyka rynkowego [Jędrusik i in., 2007]. W kolejnym punkcie zostaną przedstawione wyniki badań empirycznych poświęconych owym problemom.

2. Procedura badawcza

W artykule poddano badaniu wybrane spółki notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. Postanowiono posilkować się dziennymi logarytmicznymi stopami zwrotu, tak by obserwacje, na podstawie których dokonuje się optymalizacji współczynnika ważącego, były odpowiednio liczne⁴. Jako że notowania dzienne są dostępne począwszy od października 1994 r., badaniu poddano spółki notowane w okresie 1.01.1995 – 29.02.2016, tj. 18 pod-

⁴ Autor w czasie prowadzenia badania nie dysponował danymi wysokiej częstotliwości.

miotów. Spośród nich wyłączono spółkę MSX Resources S.A. ze względu na fakt, że w międzyczasie miało miejsce zawieszenie notowań akcji spółki, co skutkowało zmniejszeniem liczby dostępnych obserwacji.

Ze względu na czasochłonność obliczeń w przypadku metody wykładniczo ważonych średnich ruchomych optymalne wartości współczynnika ważącego obliczano każdorazowo na podstawie danych historycznych dostępnych pierwszego dnia miesiąca, w którym miały miejsce notowania giełdowe. Wybór optymalnego poziomu owej wielkości był dokonywany w drodze minimalizacji pierwiastka średniokwadratowego błędu wygasłych prognoz wariancji dla jednego dnia handlowego, obliczanego w myśl wzoru:

$$RMSE_T = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\sigma_{t,P}^2 - r_t^2)^2},$$

gdzie $\sigma_{t,P}^2$ oznacza prognozowany poziom wariancji w dniu t , zaś T – liczbę prognoz wygasłych [Welfe, 2003, s. 235]. Na podstawie tak oszacowanego współczynnika dokonywano prognozy na kolejny dzień handlowy. Następnie prognozowano poziom wariancji dla pozostałych dni w miesiącu, uwzględniając napływające informacje, jednak z wykorzystaniem pierwotnie uzyskanej wartości współczynnika ważącego.

Analogicznych prognoz dokonywano posiłkując się także uśrednioną wielkością współczynnika λ oszacowanego w danym okresie, wykorzystując następującą procedurę:

1. Należy obliczyć wartość pierwiastka średniokwadratowego błędu prognoz wygasłych τ_i dla i -tej spółki.
2. W kolejnym kroku kalkuluje się wagi postaci $\phi_i = \frac{1/\tau_i}{\sum_{k=1}^n 1/\tau_k}$, n – liczba spółek

wykorzystywanych w analizie.

3. Optymalny poziom współczynnika wygładzającego uzyskuje się jako średnią ważoną $\sum_{i=1}^n \phi_i \hat{\lambda}_i$, gdzie $\hat{\lambda}_i$ oznacza otrzymane uprzednio oszacowanie współ-

czynnika dla i -tej spółki [J.P. Morgan & Reuters, 1995, s. 99-100].

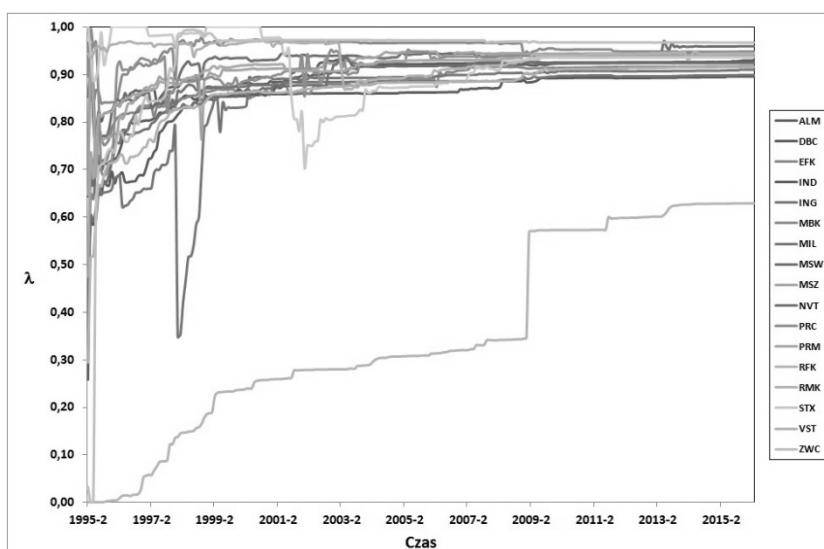
Ponadto prognozowano poziom wariancji wykorzystując historyczny poziom tej wielkości dla okresów o zróżnicowanych długościach. Jako graniczną długość przyjęto 70, albowiem w tym przypadku w modelu EWMA dla parametru $\lambda = 0,94$ waga ostatniej usuwanej obserwacji jest równa sumie wag przypisanych obserwacjom 70-tej i dalszym, jeśli model zapisać następująco:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)[r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \dots].$$

W badaniu przyjęto, że wariancje historyczne są obliczane względem średniej historycznej, potencjalne korzyści wynikające z estymacji względem zera występują bowiem dopiero dla bardzo długich okresów⁵ [Figlewski, 1994, s. 19-20]. Posiłowano się zatem prognozami sporządzanymi na podstawie 1, 5, 10, 20, ..., 70 obserwacji. Rezultaty zostały przedstawione w kolejnym punkcie.

3. Wyniki badań

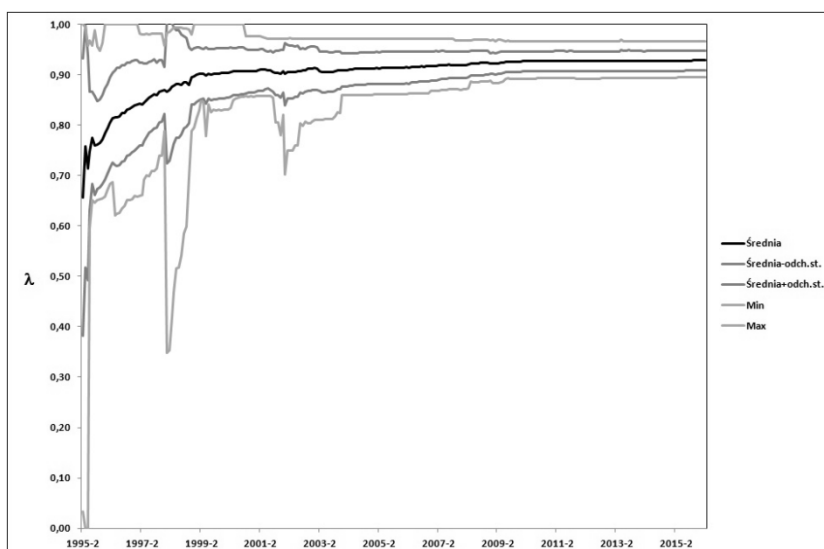
W pierwszej kolejności dokonano oszacowania optymalnych wartości współczynnika wygładzania dla poszczególnych spółek w kolejnych okresach. Rezultaty zostały przedstawione na poniższych rysunkach.



Rys. 1. Oszacowane optymalne współczynniki wygładzania dla poszczególnych spółek

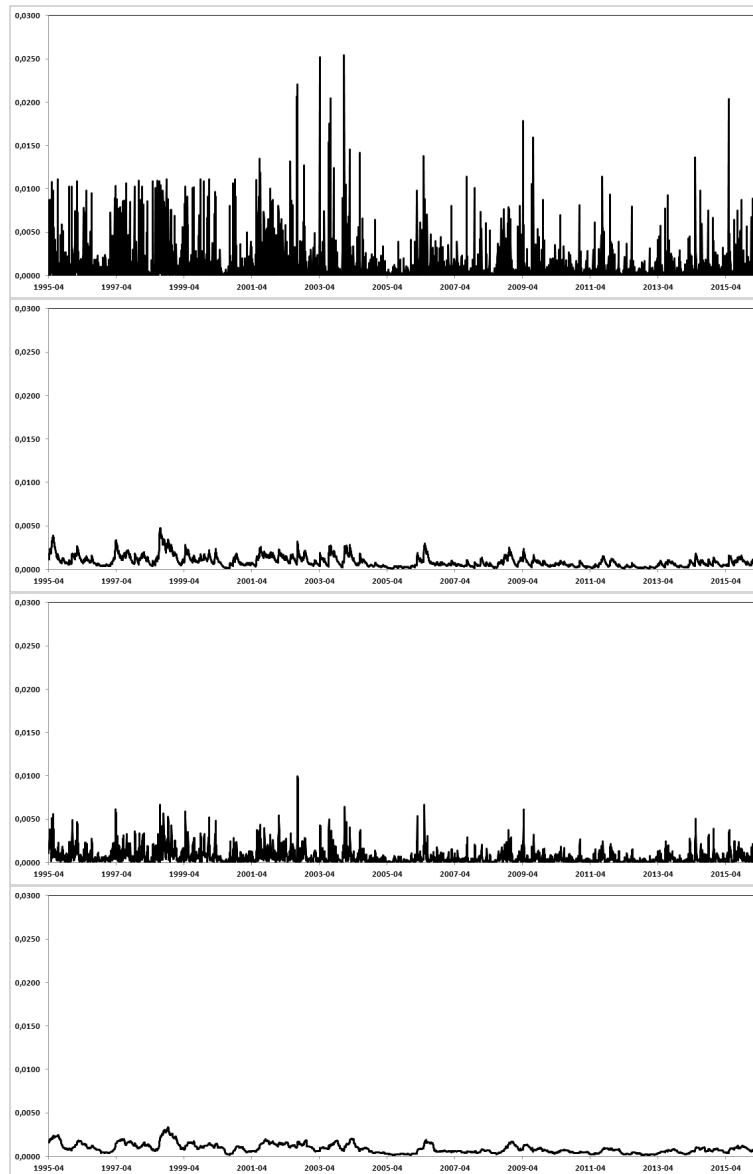
Można zauważyć, że wraz z wydłużaniem się szeregów czasowych na podstawie których dokonywano optymalizacji, oszacowane współczynniki wykazują tendencję zbiegania do zbliżonych wartości. Wyjątkiem jest tu spółka Rafako S.A., dlatego też na kolejnym wykresie obrazującym syntetycznie zachowanie oszacowań została ona pominięta.

⁵ Wyjątkiem jest tu oczywiście prognoza na podstawie pojedynczej obserwacji.



Rys. 2. Wartość średnia wraz z typowym przedziałem zmienności oraz wartościami minimalną i maksymalną dla oszacowanych optymalnych współczynników wygładzania (z pominięciem spółki Rafako S.A.)

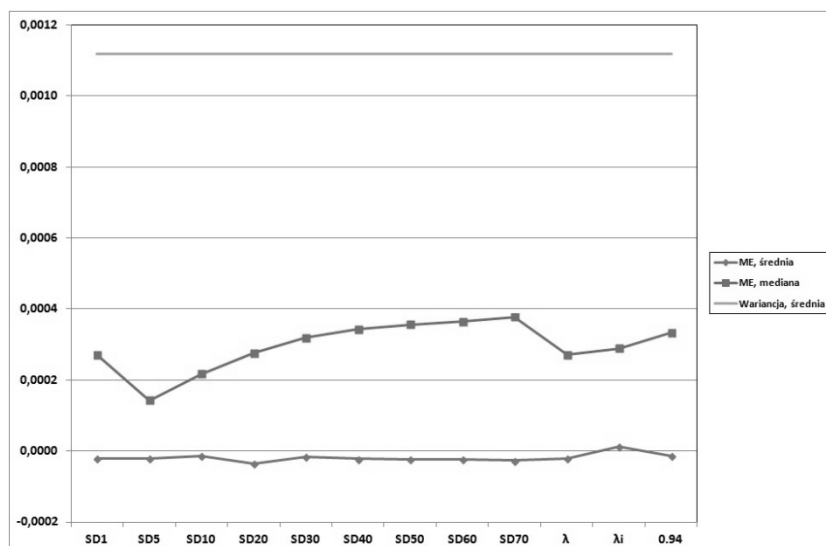
Przeciętnie rzecz ujmując, poziom współczynnika wygładzania jest niższy niż zalecany w modelu RiskmetricsTM na poziomie 0,94. Prognozowane wariacje powinny zatem w większym stopniu odzwierciedlać najnowsze informacje. Na poniższych wykresach zilustrowano kształtowanie się zmienności rzeczywistej, prognozowanej z wykorzystaniem współczynnika wygładzania na poziomie 0,94 oraz prognozowanej za pomocą klasycznej wariacji dla okresu estymacji o długości 5 i 70 dni handlowych.



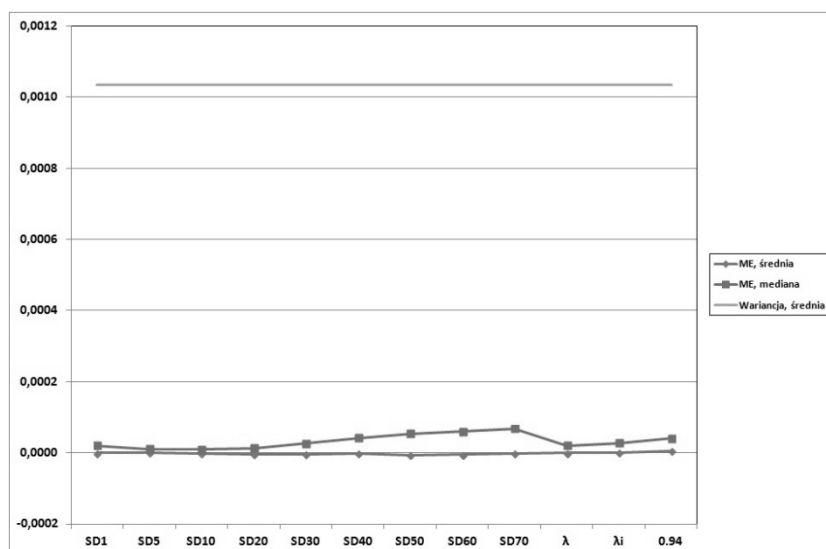
Rys. 3. Zmienność: rzeczywista oraz prognozowana z wykorzystaniem: metody EWMA dla współczynnika wygładzania 0,94 oraz klasycznej wariancji dla okresu estymacji odpowiednio o 5 i 70 obserwacjach dla spółki Alma Market S.A.

Jak można zauważyć, niezależnie od metody prognozowania zmienności, zauważalna jest relatywnie niewielka zdolność zastosowanych metod do prognozowania nieoczekiwanych wzrostów zmienności. Następnie obliczono błędy przeciętne (bezwzględne i procentowe) oraz pierwiastki błędów średniokwadra-

towych (bezwzględnych i procentowych) w kolejnych okresach. Następnie określono ich wartości średnie oraz mediany w czasie, a uśrednione dla poszczególnych metod prognozowania przedstawiono na wykresach.



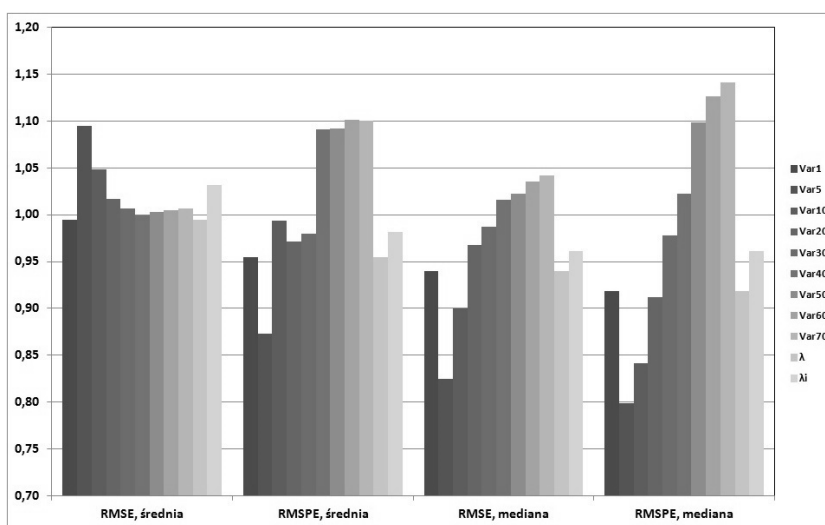
Rys. 4. Przeciętne średnie i mediany błędów dla prognoz jednodniowych



Rys. 5. Przeciętne średnie i mediany błędów dla prognoz miesięcznych

Jakkolwiek przeciętnie rzecz ujmując średni błąd wydaje się być zbliżony do zera, to jednak na podstawie median można stwierdzić, że odpowiedni rozkład jest skośny lewostronnie. W większości przypadków zmienność jest przeszacowywana (choć nie są to rozbieżności silne), jednak w pozostałych występuje jej istotne zaniżanie⁶. Skala tego zjawiska jest relatywnie najmniejsza w przypadku prognozowania zmienności z wykorzystaniem ruchomej pięciodniowej wariancji.

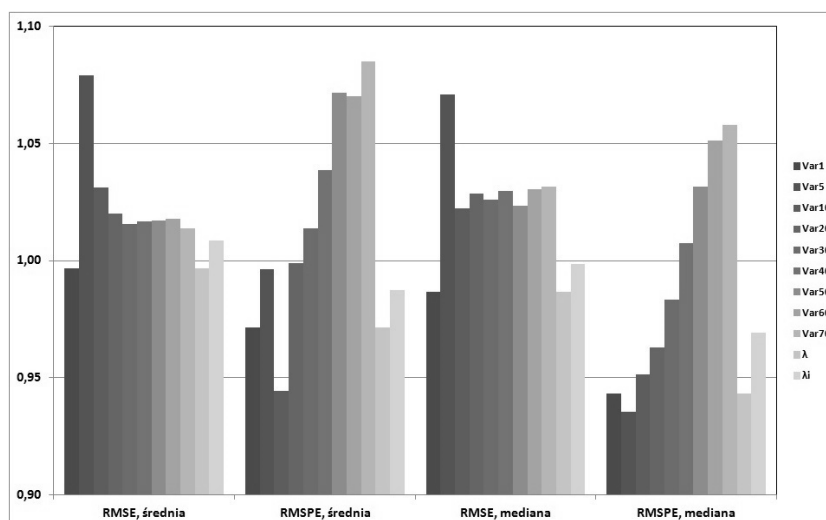
Analizom poddano także poziom pierwiastka błędów średniokwadratowych. Dla ułatwienia za przypadek wyjściowy uznano prognozowanie zgodne z zaleceniami sformułowanymi dla modelu RiskmetricsTM, a uzyskane rezultaty odpowiednio przeskalowano. W syntetyczny sposób zostały one przedstawione poniżej.



Rys. 6. Przeciętne średnie i mediany bezwzględnego i procentowego pierwiastka błędów średniokwadratowych dla prognoz jednodniowych

Analizując przedstawione wielkości należy mieć na względzie, że w przypadku błędów procentowych konieczne było wyeliminowanie prognoz, dla których rzeczywisty poziom stopy zwrotu wyniósł zero. Tym niemniej ze względu na relatywnie niewielkie poziomy rzeczywistych wariancji błędy procentowe przyjmowały bardzo zróżnicowane wartości, konieczne jest zatem interpretowanie owych rezultatów z należytą ostrożnością.

⁶ Błąd prognozy obliczano bowiem jako różnicę pomiędzy wartością prognozowaną a rzeczywistą.



Rys. 7. Przeciętne średnie i mediany bezwzględnego i procentowego pierwiastka błęd średniokwadratowego dla prognoz miesięcznych

Analiza uzyskanych wyników skłania do odrzucenia posilkowania się klasyczną ruchomą wariancją szacowaną dla najdłuższych wykorzystanych okresów – ze względu na wyższy poziom popełnianego błęd ich zastosowanie w prognozowaniu zmienności krótkoterminowej należy uznać za bezcelowe. W odniesieniu do okresów krótkich sporządzenie jednoznacznej rekomendacji jest problematyczne. Co prawda dla pierwiastka błęd średniokwadratowego wartość przeciętna jest większa niż dla metody wyjściowej, lecz z kolei mediana wskazywałaby na mniejszy poziom popełnianego błęd. W tej sytuacji posilkowanie się wykładniczo ważoną średnią ruchomą wydaje się uzasadnionym rozwiązaniem. Co więcej wykorzystanie współczynników wygładzających właściwych poszczególnym spółkom bądź zróżnicowanych w kolejnych okresach nie skutkuje istotną poprawą jakości otrzymywanych prognoz. Przedstawione wyniki badań wskazują zatem na zasadność wykorzystania oraz przydatność modelu EWMA w prognozowaniu krótkoterminowej zmienności stóp zwrotu.

Podsumowanie

W artykule zweryfikowano zasadność posilkowania się zaproponowanymi m.in. na potrzeby modelu RiskmetricsTM wykładniczo ważonymi prognozami wariancji, wykorzystując także prognozy uzyskane na podstawie zmiennych w czasie i populacji spółek współczynników wygładzania oraz klasycznej ruchomej wariancji. Otrzymane rezultaty wskazują na zasadność posilkowania się

jednolitą wartością współczynnika na poziomie 0,94. Jednocześnie zwiększanie liczby obserwacji, na podstawie których szacowana jest zmienność z wykorzystaniem metod klasycznych, prowadzi do pogorszenia jakości prognoz, zatem w prognozowaniu zmienności krótkoterminowej istotne jest przede wszystkim właściwe odzwierciedlenie najnowszych informacji zawartych w notowaniach, a w mniejszym – liczebność próby. Jednocześnie wskazane wydaje się przeprowadzenie dalszych badań, obejmujących także momenty centralne mieszane.

Literatura

- Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, „Journal of Econometrics”, No. 31.
- Engle R. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica”, No. 4.
- Figlewski S. (1994), *Forecasting Volatility Using Historical Data*, New York University, New York.
- Geweke J. (1986), *Comment*, „Econometric Reviews”, No. 5.
- Ganczarek-Gamrot A. (2013), *Metody stochastyczne w badaniach porównawczych wybranych rynków energii elektrycznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.
- Jędrusik S., Paliński A., Chmiel W., Kadłuczka P. (2007), *Testowanie wsteczne modeli wartości narażonej na stratę*, „Ekonomia Menedżerska”, nr 1.
- Jorion P. (2007), *Value at Risk*, McGraw-Hill, New York.
- J.P. Morgan & Reuters (1995), *Riskmetrics™ Technical Document*, New York.
- Pera K. (2008), *Koncepcja VaR (value at risk) w pomiarze ryzyka surowcowego projektu inwestycyjnego*, „Gospodarka Surowcami Mineralnymi”, t. 24.
- Welfe A. (2003), *Ekonometria*, PWE, Warszawa.

VERIFICATION OF ACCURACY OF RISKMETRICS™ VOLATILITY ESTIMATES

Summary: The article is devoted to the problem of volatility estimates accuracy. In the text ARCH and GARCH models are described as well as simple exponentially weighted moving averages. As a result of empirical investigations the usefulness of EWMA is underlined.

Keywords: volatility, EWMA, Riskmetrics™.