



**Paweł Prenzena**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Ekonomii  
Katedra Metod Statystyczno-Matematycznych w Ekonomii  
pawel.prenzena@edu.uekat.pl

**ANALIZA POWIĄZAŃ MIĘDZY INDEKSAMI  
GIELDY FRANCUSKIEJ, HOLENDERSKIEJ  
I BELGIJSKIEJ Z WYKORZYSTANIEM  
MODELU KOREKTY BŁĘDEM**

**Streszczenie:** Celem artykułu jest ocena stopnia powiązań między indeksami CAC40, AEX i BEL20 oraz odpowiedź na pytanie, w jakim stopniu sytuacja na danym rynku wpływa na rozwój zdarzeń na rynku z nim powiązanym. W badaniu wykorzystano model korekty błędem, który dostarcza informacji zarówno o zależnościach krótkookresowych między analizowanymi zmiennymi, jak i równowadze długookresowej. W części teoretycznej artykułu przedstawiono podstawowe założenia teorii kointegracji, a także wybrane testy pierwiastków jednostkowych oraz stacjonarności. Wyniki analizy empirycznej potwierdziły, że pomiędzy rozpatrywanymi parami indeksów giełdowych występują istotne zależności oraz istnieje mechanizm powracania do stanu długookresowej równowagi.

**Słowa kluczowe:** indeksy giełdowe, kointegracja, model korekty błędem.

**Wprowadzenie**

Globalizacja oraz narastająca integracja gospodarek narodowych powodują, że współczesne rynki finansowe odznaczają się bardzo szybkim przepływem informacji – sytuacja na jednym rynku wywiera wpływ na zdarzenia na rynkach innych państw, zarówno tych sąsiadujących, jak i oddalonych od siebie o tysiące kilometrów. Sieć powiązań między gospodarkami narodowymi znajduje odzwierciedlenie w istotnej korelacji między wieloma indeksami giełdowymi, co w przypadku nagłego załamania na jednym z rynków wpływa na przenoszenie zdarzeń szokowych na rynki z nim powiązane. Sytuacja ta powoduje, że ważną

kwestią staje się odpowiedź na pytanie, w jakim stopniu zależności między konkretnymi rynkami wpływają na kształtowanie się wybranych indeksów giełdowych. Możliwości wyjaśnienia tego problemu stwarza analiza kointegracji i model korekty błędem, którym poświęcony został niniejszy artykuł. Celem badania jest analiza powiązań pomiędzy indeksami reprezentującymi giełdę francuską (CAC40), holenderską (AEX) i belgijską (BEL20). Giełdy te funkcjonują w ramach wspólnej platformy handlu giełdowego, stworzonej 22 sierpnia 2000 r., o nazwie Euronext (należy do niej również giełda portugalska), a transakcje na wszystkich giełdach, wchodzących w jej skład zawierane są w godzinach 9:00-17:30. W badaniu wykorzystano dzienne notowania zamknięcia wymienionych indeksów giełdowych z okresu 2 czerwca 2014 r. do 29 maja 2015 r., a wszystkie niezbędne obliczenia przeprowadzono w programie Gretl. Na potrzeby analizy powiązań indeksów giełdowych skonstruowano trzy modele:

- model 1: wpływ zamknięcia giełdy francuskiej na zamknięcie giełdy holenderskiej (CAC40 → AEX),
- model 2: wpływ zamknięcia giełdy francuskiej na zamknięcie giełdy belgijskiej (CAC40 → BEL20);
- model 3: wpływ zamknięcia giełdy holenderskiej na zamknięcie giełdy belgijskiej (AEX → BEL20).

Wyniki badania potwierdziły, że pomiędzy analizowanymi indeksami giełdowymi występują istotne zależności przyczynowo-skutkowe. Najmocniej powiązane ze sobą okazały się indeksy AEX oraz BEL20.

## 1. Wybrane metody analizy zależności szeregów czasowych

Jedną z metod analizy zależności szeregów czasowych jest analiza kointegracji. Została ona wprowadzona do literatury przez R. Engla i C. Grangera w 1987 r., za co w roku 2003 zostali uhonorowani Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii. O procesach ekonomicznych mówimy, że są skointegrowane, gdy można pomiędzy nimi zaobserwować pewną długookresową zależność, niezależną od czasu. Wartości, które zaburzają tę zależność stanowią natomiast krótkookresowe odchylenia od stanu równowagi. Dwa procesy  $X_t$  i  $Y_t$  są skointegrowane rzędu  $d$ ,  $b$  tzn.  $X_t, Y_t \sim CI(d, b)$ ,  $d \geq b > 0$  jeżeli:

- 1) są one zintegrowane tego samego rzędu  $d$ ,
- 2) istnieje kombinacja liniowa tych procesów  $u_t = \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t$ , która jest zintegrowana rzędu  $d - b$ .  $u_t = E(x_t) = E(x_{t-k}) = \mu$ .

Wektor  $[\alpha_1 \alpha_2]$  nazywa się wektorem kointegrującym [Osińska, 2006, s. 185].

Podjmując tematykę analizy kointegracji, należy wspomnieć o podstawowych własnościach, charakteryzujących szereg stacjonarny. Szereg jest stacjonarny w węższym sensie wówczas, gdy łączny rozkład zmiennych losowych jest stały, co oznacza konieczność stałości w czasie wszystkich momentów zwykłych i centralnych. W badaniach ekonomicznych wystarczy jednak zazwyczaj, aby szereg był stacjonarny w szerszym sensie, co niesie ze sobą konieczność spełnienia następujących warunków [Kusideł, 2000, s. 18]:

$$1) \text{ stałej w czasie średniej procesu: } E(x_t) = E(x_{t-k}) = \mu \quad (1)$$

$$2) \text{ stałej w czasie wariancji: } E[(x_t - \mu)^2] = E[(x_{t-k} - \mu)^2] = \sigma^2 \quad (2)$$

3) niezależnej od czasu, a wyłącznie od okresu (interwału)  $-s$ , kowariancji:

$$E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)] = E[(x_{t-s} - \mu)(x_{t-k-s} - \mu)] = \gamma_s. \quad (3)$$

Do badania kointegracji szeregów czasowych możliwe jest wykorzystywanie testów DF i ADF, czyli narzędzi stosowanych do testowania stopnia integracji danych szeregów. W analizie kointegracji testy te wykorzystywane są dla szeregu reszt z równania kointegrującego:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \dots + \alpha_k X_{kt} + u_t \quad (4)$$

Test Dickeya-Fullera stosuje się w przypadku braku autokorelacji w składniku resztowym  $\varepsilon_t$ . Załóżmy, że model szeregu czasowego wyraża się następującym wzorem:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

Przyjmijmy, że  $\rho = 1 + \delta$ , wówczas równanie (5) można zapisać jako:

$$y_t = (1 + \delta)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

Równanie (6) jest równoważne z następującym zapisem:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7)$$

Hipotezy testu DF przyjmują następującą postać:

$$H_0 : \delta = 0$$

$$H_1 : \delta < 0$$

Przyjęcie hipotezy zerowej będzie oznaczać, że proces jest zintegrowany rzędu pierwszego  $Y_t \sim I(1)$ , czyli niestacjonarny, natomiast hipoteza alternatywna jest jednoznaczna z założeniem, że proces jest stacjonarny  $Y_t \sim I(0)$ .

Statystyka DF, sprawdzająca powyższe hipotezy, wyraża się następującym wzorem:

$$DF = \frac{\hat{\delta}}{S(\hat{\delta})} \quad (8)$$

gdzie:

$\hat{\delta}$  – ocena parametru z równania (7), oszacowanego za pomocą KMNK,  
 $S(\hat{\delta})$  – średni błąd szacunku parametru  $\delta$ .

Jeżeli wartość statystyki DF jest mniejsza od dolnej wartości krytycznej, odczytanej z tablic testu DF, wówczas odrzucamy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej: proces  $Y_t$  jest zintegrowany rzędu 0, czyli stacjonarny – procedura kończy się. W przypadku, gdy wartość statystyki DF jest większa od górnej wartości krytycznej, wówczas brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, co oznacza, że proces jest zintegrowany co najmniej rzędu 1 – należy badać wyższe stopnie zintegrowania. W sytuacji, gdy wartość statystyki DF znajduje się między dolną i górną wartością krytyczną, to test nie rozstrzyga o stacjonarności procesu. Zmienne niestacjonarne można zazwyczaj sprowadzić do stacjonarnych dzięki zastosowaniu filtru różnicowego [Welfe, 2009, s. 360]. W przypadku badania stacjonarności pierwszych różnic szeregu test DF stosowany jest dla następującego równania:

$$\Delta^2 y_t = \delta \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej jest jednoznaczny z założeniem, iż  $Y_t \sim I(2)$ , co oznacza, że proces różnicowania należy kontynuować i badać wyższe stopnie zintegrowania. Przyjęcie hipotezy alternatywnej oznacza natomiast, że szereg pierwszych różnic jest stacjonarny, czyli  $Y_t \sim I(1)$ .

W przypadku występowania autokorelacji w składniku resztowym  $\varepsilon_t$  do badania stopnia integracji szeregów czasowych stosuje się rozszerzony test Dickeya-Fullera (ADF). Sygnałem świadczącym o występowaniu autokorelacji jest niska wartość statystyki Durбина-Watsona w równaniu (7). W rozszerzonym teście Dickeya-Fullera oblicza się statystykę ADF podobnie jak statystykę DF, inną formę ma natomiast równanie podlegające testowaniu, które przyjmuje następującą postać:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (10)$$

gdzie  $k$  – liczba opóźnień, która umożliwia wyeliminowanie autokorelacji (do wyznaczenia optymalnej liczby opóźnień  $k$  możliwe jest stosowanie różnych kryteriów – do najpopularniejszych należą kryterium informacyjne Akaike’a (AIC), Bayesowskie kryterium Schwarz’a (BIC) czy kryterium informacyjne Hannana-Quinna (HQ). Wybór liczby opóźnień polega na wyznaczeniu wartości danego kryterium dla wersji modelu o 1, 2, ...,  $k$  opóźnieniach i wyborze tej liczby opóźnień, która minimalizuje wartość kryterium, jednocześnie eliminując autokorelację ze składnika losowego [Wójcik, 2014, s. 117]).

W testach pierwiastków jednostkowych przyjęcie hipotezy zerowej oznacza, że badany szereg jest zintegrowany w stopniu  $d$ , natomiast hipoteza alternatywna jest jednoznaczna z założeniem, iż występuje zintegrowanie stopnia  $d - 1$ .

Inaczej skonstruowany jest zespół hipotez w teście KPSS, który również umożliwia badanie stopnia integracji szeregów czasowych. W teście tym hipoteza zerowa zakłada stacjonarność analizowanego szeregu czasowego wobec hipotezy alternatywnej, mówiącej o stacjonarności szeregu pierwszych różnic. W przypadku testu KPSS szereg czasowy wyrażony jest jako suma trendu deterministycznego, procesu błędzenia losowego oraz składnika losowego. Wyróżniamy dwie wersje testu KPSS – z trendem oraz bez trendu [Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, Shin, 1992, s. 162]. Statystyka testu wyraża się następującym wzorem:

$$\hat{\eta} = T^{-2} \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}_e^2} \quad (11)$$

gdzie:

$$S_t = \sum_{i=1}^t e_i, t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = T^{-1} \sum_{i=1}^T e_i^2 + 2T^{-1} \sum_{j=1}^k w(j, k) \sum_{t=j+1}^T e_t e_{t-j} \quad (13)$$

$S_t$  – sumy częściowe reszt

$e_t$  – reszty regresji  $y_t$  względem trendu liniowego lub względem stałej

$\hat{\sigma}_e^2$  – estymator wariancji długookresowej

$w(j, k)$  – wagi wyznaczone za pomocą funkcji gęstości Bartletta

$$w(j, k) = 1 - \frac{j}{k+1} \quad (14)$$

Jeśli dwa szeregi czasowe  $x_t$  i  $y_t$  są skointegrowane, to występuje między nimi relacja długookresowa. Ponadto za pomocą modelu korekty błędem (ECM) może być opisana dynamika krótkookresowa między tymi szeregami. Fakt ten jest znany jako fundamentalne twierdzenie Grangera, dotyczące reprezentacji (*Granger representation theorem*) [Maddala, 2006, s. 632].

Model z mechanizmem korekty błędem składa się z równania długookresowego w postaci:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \dots + \alpha_k x_{kt} + u_t \quad (15)$$

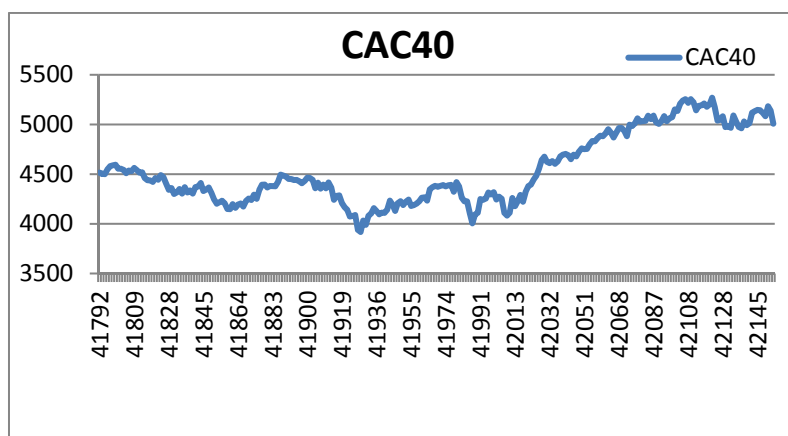
oraz równania krótkookresowego dla przyrostów badanych zmiennych, które można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \gamma (y_t - \alpha_0 - \alpha_1 x_t)_{t-1} + \eta_t = \\ &= \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \gamma u_{t-1} + \eta_t = \\ &= \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \gamma ECM_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \quad (16)$$

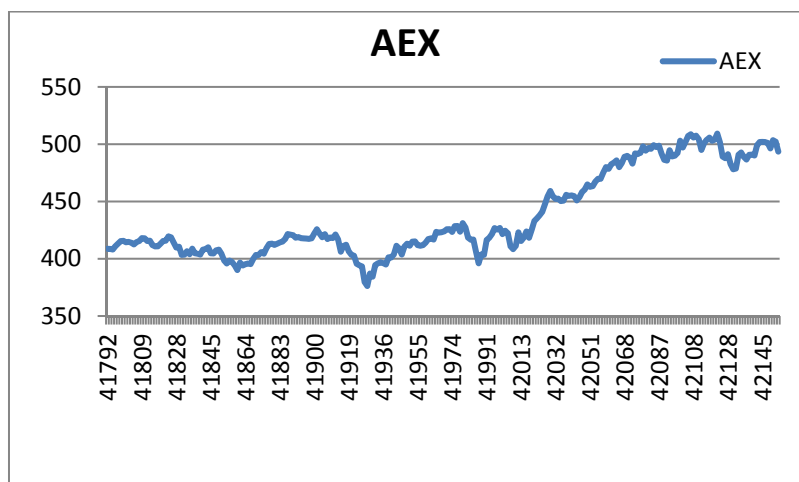
Wyrażenie w nawiasie w powyższym równaniu reprezentuje stan równowagi długookresowej i nazywane jest mechanizmem korekty błędem (ECM – *error correction mechanism*). Parametr  $\gamma$  opisuje szybkość dostosowywania się zmiennej  $y_t$  do stanu równowagi, natomiast parametr  $\beta_1$  dotyczy dynamiki krótkookresowej. W interpretacji modelu kluczowy jest znak parametru  $\gamma$ . Parametr ten powinien być ujemny, ponieważ tylko w takiej sytuacji będzie funkcjonował mechanizm dochodzenia do poziomu równowagi z okresu na okres.

## 2. Badanie empiryczne – analiza powiązań indeksów CAC40, AEX i BEL20

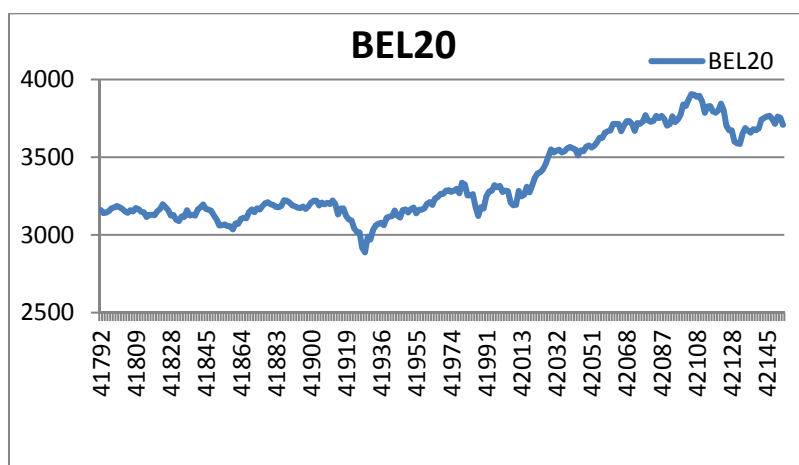
Przedmiotem badania jest analiza powiązań między giełdami francuską, holenderską i belgijską, które reprezentowane są przez indeksy giełdowe CAC40, AEX oraz BEL20. W badaniu wykorzystano dzienne notowania zamknięcia wymienionych indeksów giełdowych z okresu 2 czerwca 2014 r. do 29 maja 2015 r. Wykresy przedstawiające notowania indeksów CAC40, AEX oraz BEL20 zostały zaprezentowane na rys. 1, 2 oraz 3.



Rys. 1. Notowania indeksu CAC40 w okresie 2.06.2014-29.05.2015



Rys. 2. Notowania indeksu AEX w okresie 2.06.2014-29.05.2015



Rys. 3. Notowania indeksu BEL20 w okresie 2.06.2014-29.05.2015

W pierwszym kroku dokonano analizy stopnia integracji szeregów czasowych reprezentujących indeksy CAC40, AEX i BEL20.

Zgodnie z wynikami zaprezentowanymi na rys. 4. wartość statystyki  $DF = 0,552$  okazała się większa od górnej wartości krytycznej testu na poziomie istotności równym 5% ( $DF_{0,05} = -1,959$ , dla  $n = 250$ ) co oznacza, że szereg CAC40 jest zintegrowany co najmniej rzędu 1, należy więc badać wyższe stopnie zintegrowania.

```

Model 2: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)
Zmienna zależna: d_CAC40

      współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
CAC40_1   0,000385113     0,000697632     0,5520     0,5814

Średn. aryt. zm. zależnej   1,944664   Odch. stand. zm. zależnej   50,52686
Suma kwadratów reszt       643525,5   Błąd standardowy reszt     50,53387
Wsp. determ. R-kwadrat     0,001208   Skorygowany R-kwadrat      0,001208
F(1, 252)                   0,304737   Wartość p dla testu F     0,581417
Logarytm wiarygodności    -1350,919   Kryt. inform. Akaike'a    2703,839
Kryt. bayes. Schwarza     2707,372   Kryt. Hannana-Quinna     2705,260
Autokorel. reszt - rho1   -0,068785   Stat. Durbina-Watsona    2,106506

```

Rys. 4. Test DF dla szeregu CAC40

Dla szeregu pierwszych przyrostów CAC40 wartość statystyki  $DF = -16,71$  jest mniejsza od dolnej wartości krytycznej, co oznacza że szereg pierwszych różnic jest stacjonarny – wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5.

```

Model 3: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/04-2015/05/29 (N = 252)
Zmienna zależna: d_d_CAC40

      współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
d_CAC40_1   -1,06654     0,0638176     -16,71     1,18e-042 ***

Średn. aryt. zm. zależnej   -0,467222   Odch. stand. zm. zależnej   73,47438
Suma kwadratów reszt       641376,6   Błąd standardowy reszt     50,54983
Wsp. determ. R-kwadrat     0,526685   Skorygowany R-kwadrat      0,526685
F(1, 251)                   279,3026   Wartość p dla testu F     1,18e-42
Logarytm wiarygodności    -1345,657   Kryt. inform. Akaike'a    2693,315
Kryt. bayes. Schwarza     2696,844   Kryt. Hannana-Quinna     2694,735
Autokorel. reszt - rho1   -0,006182   Stat. Durbina-Watsona    1,984460

```

Rys. 5. Test DF dla pierwszych przyrostów szeregu CAC40

Do badania stopnia integracji zastosowano test Dickeya-Fullera. Nie było potrzeby wykorzystywania rozszerzonego testu Dickeya-Fullera i stosowania opóźnień, ponieważ nie wystąpiła istotna autokorelacja składnika losowego. Świadczy o tym wartość statystyki Durbina-Watsona, która jest bliska 2 (wartości krytyczne z tablic rozkładu DW dla  $\alpha = 0,05$ ,  $n = 250$ ,  $k = 1$  wynoszą odpowiednio  $d_L = 1,7847$  oraz  $d_U = 1,8008$ ).

Stacjonarność szeregu CAC40 została również zweryfikowana z wykorzystaniem testu KPSS. Zgodnie z wynikami zaprezentowanymi na rys. 6 dla szeregu CAC40 statystyka testu KPSS = 15,5734 jest większa od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności, co oznacza, że zmienna CAC40 nie jest stacjonarna.



```

Równanie regresji testu KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin)
Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/02-2015/05/29 (N = 254)
Zmienna zależna: CAC40

-----
      współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
const      4542,23          22,1769          204,8       3,89e-283 ***

Odporna estymacja wariancji (robust): 124429
Suma kwadratów dla skumulowanych reszt: 1,25018e+011

Hipoteza zerowa: proces stacjonarny; test KPSS dla zmiennej CAC40 (bez trendu)

Parametr rzędu opóźnienia (lag truncation) = 0
Statystyka testu = 15,5734

      10%      5%      2,5%      1%
Krytyczna wart.: 0,347  0,463  0,574  0,739

```

Rys. 6. Test KPSS dla szeregu CAC40

Następnie poddano analizie stacjonarność pierwszych przyrostów szeregu CAC40. W związku z tym, że dla pierwszych przyrostów statystyka testu KPSS = 0,1908 jest mniejsza od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności (co przedstawia rys. 7), można stwierdzić, iż pierwsze przyrosty szeregu CAC40 są stacjonarne, a szereg notowań indeksu giełdowego CAC40 jest zintegrowany rzędu 1. Test KPSS potwierdził tym samym wyniki dotyczące analizy stopnia integracji szeregu, uzyskane z wykorzystaniem testu Dickeya-Fullera.

```

Równanie regresji testu KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin)
Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)
Zmienna zależna: d_CAC40

-----
      współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
const      1,94466          3,17660          0,6122      0,5410

Odporna estymacja wariancji (robust): 2542,87
Suma kwadratów dla skumulowanych reszt: 3,10504e+007

Hipoteza zerowa: proces stacjonarny; test KPSS dla zmiennej d_CAC40 (bez trendu)

Parametr rzędu opóźnienia (lag truncation) = 0
Statystyka testu = 0,190766

      10%      5%      2,5%      1%
Krytyczna wart.: 0,347  0,463  0,574  0,739

```

Rys. 7. Test KPSS dla pierwszych przyrostów szeregu CAC40

W analogiczny sposób przeprowadzono badanie stacjonarności szeregów AEX i BEL20. Dla szeregu AEX nie została odrzucona hipoteza zerowa o jego niestacjonarności, ponieważ wartość statystyki DF = 1,188 okazała się większa od górnej wartości krytycznej testu, co przedstawia rys. 8.

```

Model 4: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)
Zmienna zależna: d_AEX
-----
                współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
AEX_1           0,000736668       0,000620132       1,188        0,2360

Średn.aryt.zm.zależnej  0,335138   Odch.stand.zm.zależnej  4,327024
Suma kwadratów reszt   4720,214   Błąd standardowy reszt  4,327934
Wsp. determ. R-kwadrat  0,005569   Skorygowany R-kwadrat   0,005569
F(1, 252)              1,411155   Wartość p dla testu F   0,235983
Logarytm wiarygodności -729,1583   Kryt. inform. Akaike'a  1460,317
Kryt. bayes. Schwarz   1463,850   Kryt. Hannana-Quinna    1461,738
Autokorel.reszt - rho1  0,005860   Stat. Durbina-Watsona   1,971086

```

Rys. 8. Test DF dla szeregu AEX

W przypadku pierwszych przyrostów szeregu AEX wartość statystyki DF = -15,51 jest mniejsza od dolnej wartości krytycznej (rys. 9), dzięki czemu możliwe było odrzucenie hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej, świadczącej o stacjonarności pierwszych przyrostów szeregu. Oznacza to, że szereg AEX jest zintegrowany w stopniu 1.

```

Model 5: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/04-2015/05/29 (N = 252)
Zmienna zależna: d_d_AEX
-----
                współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
d_AEX_1         -0,987073       0,0636210       -15,51       1,60e-038 ***

Średn.aryt.zm.zależnej -0,033810   Odch.stand.zm.zależnej  6,085992
Suma kwadratów reszt   4745,840   Błąd standardowy reszt  4,348302
Wsp. determ. R-kwadrat  0,489538   Skorygowany R-kwadrat   0,489538
F(1, 251)              240,7117   Wartość p dla testu F   1,60e-38
Logarytm wiarygodności -727,4574   Kryt. inform. Akaike'a  1456,915
Kryt. bayes. Schwarz   1460,444   Kryt. Hannana-Quinna    1458,335
Autokorel.reszt - rho1  0,001494   Stat. Durbina-Watsona   1,981183

```

Rys. 9. Test DF dla pierwszych przyrostów szeregu AEX

Weryfikacja stacjonarności szeregu AEX z wykorzystaniem testu KPSS potwierdziła wyniki uzyskane w teście Dickeya-Fullera. Dla szeregu AEX statystyka testu KPSS = 20,3546 jest większa od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności (rys. 10), co oznacza, że zmienna AEX nie jest stacjonarna.

```

Równanie regresji testu KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin)
Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/02-2015/05/29 (N = 254)
Zmienna zależna: AEX

-----
współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
const          437,403           2,35087      186,1        1,19e-272 ***

Odporna estymacja wariancji (robust): 1398,23
Suma kwadratów dla skumulowanych reszt: 1,83615e+009

Hipoteza zerowa: proces stacjonarny; test KPSS dla zmiennej AEX (bez trendu)

Parametr rzędu opóźnienia (lag truncation) = 0
Statystyka testu = 20,3546

          10%      5%      2,5%      1%
Krytyczna wart.: 0,347  0,463  0,574  0,739

```

Rys. 10. Test KPSS dla szeregu AEX

W przypadku pierwszych przyrostów szeregu AEX statystyka testu KPSS = 0,1322 jest mniejsza od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności (rys. 11), co pozwala stwierdzić, że pierwsze przyrosty szeregu AEX są stacjonarne, a szereg notowań indeksu giełdowego AEX jest zintegrowany rzędu 1.

```

Równanie regresji testu KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin)
Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)
Zmienna zależna: d_AEX

-----
współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
const          0,335138          0,272038      1,232        0,2191

Odporna estymacja wariancji (robust): 18,6491
Suma kwadratów dla skumulowanych reszt: 157768

Hipoteza zerowa: proces stacjonarny; test KPSS dla zmiennej d_AEX (bez trendu)

Parametr rzędu opóźnienia (lag truncation) = 0
Statystyka testu = 0,132166

          10%      5%      2,5%      1%
Krytyczna wart.: 0,347  0,463  0,574  0,739

```

Rys. 11. Test KPSS dla pierwszych przyrostów szeregu AEX

Ostatni analizowany szereg BEL20 reprezentuje notowania giełdy belgijskiej. Analiza stacjonarności szeregu z wykorzystaniem testu DF wykazała, że szereg BEL20 nie jest stacjonarny, gdyż statystyka DF = 1,091 jest większa od górnej wartości krytycznej (rys. 12), stacjonarne okazały się natomiast pierwsze przyrosty (rys. 13), dla których statystyka DF = -15,35

```

Model 6: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)
Zmienna zależna: d_BEL20

      współczynnik  błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
-----
BEL20_1  0,000616729    0,000565206    1,091    0,2762

Średn.aryt.zm.zależnej  2,166403  Odch.stand.zm.zależnej  30,24431
Suma kwadratów reszt  230606,8  Błąd standardowy reszt  30,25073
Wsp. determ. R-kwadrat  0,004702  Skorygowany R-kwadrat  0,004702
F(1, 252)  1,190629  Wartość p dla testu F  0,276245
Logarytm wiarygodności -1221,099  Kryt. inform. Akaike'a  2444,198
Kryt. bayes. Schwarz  2447,732  Kryt. Hannana-Quinna  2445,620
Autokorel.reszt - rho1  0,021804  Stat. Durbina-Watsona  1,945401

```

Rys. 12. Test DF dla szeregu BEL20

```

Model 7: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/04-2015/05/29 (N = 252)
Zmienna zależna: d_d_BEL20

      współczynnik  błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
-----
d_BEL20_1  -0,972350    0,0633283    -15,35    5,75e-038 ***

Średn.aryt.zm.zależnej -0,107063  Odch.stand.zm.zależnej  42,26384
Suma kwadratów reszt  231197,5  Błąd standardowy reszt  30,34972
Wsp. determ. R-kwadrat  0,484334  Skorygowany R-kwadrat  0,484334
F(1, 251)  235,7489  Wartość p dla testu F  5,75e-38
Logarytm wiarygodności -1217,094  Kryt. inform. Akaike'a  2436,188
Kryt. bayes. Schwarz  2439,717  Kryt. Hannana-Quinna  2437,608
Autokorel.reszt - rho1  0,001585  Stat. Durbina-Watsona  1,988191

```

Rys. 13. Test DF dla pierwszych przyrostów szeregu BEL20

Stacjonarność pierwszych przyrostów szeregu BEL20 została również wykazana z wykorzystaniem testu KPSS. Szereg BEL20 jest niestacjonarny, ponieważ statystyka testu KPSS = 21,0651 jest większa od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności (rys. 14).

```

Równanie regresji testu KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin)
Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/02-2015/05/29 (N = 254)
Zmienna zależna: BEL20

      współczynnik  błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
-----
const  3355,87    16,6453    201,6    2,06e-281 ***

Odporna estymacja wariancji (robust): 70097,8
Suma kwadratów dla skumulowanych reszt: 9,52655e+010

Hipoteza zerowa: proces stacjonarny; test KPSS dla zmiennej BEL20 (bez trendu)

Parametr rzędu opóźnienia (lag truncation) = 0
Statystyka testu = 21,0651

      10%      5%      2,5%      1%
Krytyczna wart.: 0,347  0,463  0,574  0,739

```

Rys. 14. Test KPSS dla szeregu BEL20

W przypadku pierwszych przyrostów szeregu BEL20 statystyka testu KPSS = 0,1236 jest natomiast mniejsza od wartości krytycznych dla wszystkich poziomów istotności (rys. 15). Zaprezentowane wyniki wykazały, że pierwsze przyrosty szeregu BEL20 są stacjonarne, a szereg notowań indeksu giełdowego BEL20 jest zintegrowany rzędu 1.

Równanie regresji testu KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin)				
Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03–2015/05/29 (N = 253)				
Zmienna zależna: d_BEL20				
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
const	2,16640	1,90144	1,139	0,2556
Odporna estymacja wariancji (robust): 911,103				
Suma kwadratów dla skumulowanych reszt: 7,20616e+006				
Hipoteza zerowa: proces stacjonarny; test KPSS dla zmiennej d_BEL20 (bez trendu)				
Parametr rzędu opóźnienia (lag truncation) = 0				
Statystyka testu = 0,123565				
	10%	5%	2,5%	1%
Krytyczna wart.:	0,347	0,463	0,574	0,739

Rys. 15. Test KPSS dla pierwszych przyrostów szeregu BEL20

Podsumowując powyższe analizy dla szeregów CAC40, AEX oraz BEL20, można stwierdzić, że wszystkie szeregi są zintegrowane w tym samym stopniu – warunek wymagany dla budowy modelu korekty błędem został tym samym spełniony.

W dalszej kolejności konieczne jest wyznaczenie zależności długoterminowych dla rozpatrywanych modeli oraz sprawdzenie, czy reszty z poszczególnych równań kointegrujących są stacjonarne. Pierwsze równanie opisuje wpływ indeksu CAC40 na indeks AEX i ma następującą postać:

$$AEX = -27,0986 + 0,1023 \cdot CAC40 \quad (17)$$

Reszty z równania kointegrującego są stacjonarne, ponieważ statystyka testu DF = -2,639 jest mniejsza od dolnej wartości krytycznej testu na poziomie istotności równym 1% ( $DF_{0,01} = -2,607$ , dla  $n = 250$ ) – wyniki zaprezentowano na rys. 16.

Oznacza to, że szeregi AEX oraz CAC40 są skointegrowane, co pozwala na budowę modelu korekty błędem (rys. 17) dla tych zmiennych:

$$\Delta AEX_t = 0,1453 + 0,0915\Delta AEX_{t-1} + 0,0797\Delta CAC40_t + 0,0232ECM_{t-1} + u_t \quad (18)$$

W modelu przyjęto 1 opóźnienie dla przyrostu zmiennej AEX oraz przyrost zmiennej CAC40 bez opóźnień.

```

Model 9: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)
Zmienna zależna: d_res_AEX_CAC

```

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
res_AEX_CAC_1	-0,0350467	0,0132797	-2,639	0,0088 ***
Średn. aryt. zm. zależnej	0,136272	Odch. stand. zm. zależnej	2,105363	
Suma kwadratów reszt	1091,533	Błąd standardowy reszt	2,081220	
Wsp. determ. R-kwadrat	0,026895	Skorygowany R-kwadrat	0,026895	
F(1, 252)	6,964980	Wartość p dla testu F	0,008830	
Logarytm wiarygodności	-543,9279	Kryt. inform. Akaike'a	1089,856	
Kryt. bayes. Schwarz	1093,389	Kryt. Hannana-Quinna	1091,277	
Autokorel. reszt - rho1	-0,184143	Stat. Durbina-Watsona	2,340023	

Rys. 16. Badanie reszt pochodzących z równania kointegrującego – model 1

```

Model 10: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/04-2015/05/29 (N = 252)
Zmienna zależna: d_AEX

```

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
const	0,145341	0,106593	1,364	0,1740
d_AEX_1	0,0914792	0,0248375	3,683	0,0003 ***
d_CAC40	0,0796837	0,00212049	37,58	2,26e-104 ***
ECM_aex_cac_1	-0,0231587	0,0109591	-2,113	0,0356 **
Średn. aryt. zm. zależnej	0,337103	Odch. stand. zm. zależnej	4,335522	
Suma kwadratów reszt	703,2276	Błąd standardowy reszt	1,683923	
Wsp. determ. R-kwadrat	0,850947	Skorygowany R-kwadrat	0,849144	
F(3, 248)	471,9475	Wartość p dla testu F	3,6e-102	
Logarytm wiarygodności	-486,8802	Kryt. inform. Akaike'a	981,7604	
Kryt. bayes. Schwarz	995,8781	Kryt. Hannana-Quinna	987,4411	
Autokorel. reszt - rho1	-0,177466	Statystyka Durbina h	-3,058320	

Rys. 17. Model korekty błędem dla pierwszych przyrostów szeregu AEX (model 1)

W analizowanym modelu wszystkie parametry, z wyjątkiem wyrazu wolnego, okazały się istotne statystycznie. Parametr  $d\_AEX\_1$  informuje, że ostatnio zrealizowany przyrost wartości indeksu AEX ma wpływ na bieżący przyrost, który wynosi 0,0915 punktu. Parametr  $d\_CAC40$  informuje z kolei, że 1% wzrost wartości indeksu CAC40 spowoduje wzrost wartości indeksu AEX tego samego dnia o 0,0797 punktu, *ceteris paribus*. Parametr  $ECM\_aex\_cac\_1$  jest ujemny, co zapewnia dochodzenie do stanu równowagi, opisującego zależność indeksów giełd holenderskiej i francuskiej. Wartość parametru oznacza, że ok. 2,32% zmian odchyłek wartości szeregu AEX od długookresowej zależności z CAC40 jest redukowana w ciągu jednego dnia.

Równanie kointegrujące dla modelu opisującego wpływ indeksu CAC40 na indeks BEL20 przedstawia się następująco:

$$BEL\ 20 = 144,221 + 0,7071 \cdot CAC\ 40 \quad (19)$$

Reszty z równania kointegrującego są stacjonarne, ponieważ statystyka testu DF = -2,129 jest mniejsza od wartości krytycznej testu na poziomie istotności równym 5% (DF<sub>0,05</sub> = -1,959, dla n = 250) – wyniki przedstawia rys. 18.

Model 12: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)				
Zmienna zależna: d_res_BEL_CAC				
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
res_BEL_CAC_1	-0,0241281	0,0113337	-2,129	0,0342 **
Średn. aryt. zm. zależnej	0,791401	Odch. stand. zm. zależnej	16,16708	
Suma kwadratów reszt	64858,37	Błąd standardowy reszt	16,04290	
Wsp. determ. R-kwadrat	0,017667	Skorygowany R-kwadrat	0,017667	
F(1, 252)	4,532127	Wartość p dla testu F	0,034234	
Logarytm wiarygodności	-1060,633	Kryt. inform. Akaike'a	2123,266	
Kryt. bayes. Schwarz	2126,799	Kryt. Hannana-Quinna	2124,687	
Autokorel. reszt - rho1	-0,076265	Stat. Durбина-Watsona	2,111493	

Rys. 18. Badanie reszt pochodzących z równania kointegrującego – model 2

Szeregi BEL20 oraz CAC40 są więc skointegrowane, co umożliwia budowę modelu korekty błędem (rys. 19) dla tych zmiennych:

$$\Delta BEL20_t = 0,9104 + 0,1093\Delta BEL20_{t-1} + 0,5439\Delta CAC40_t - 0,0156ECM_{t-1} + u_t \quad (20)$$

W modelu przyjęto 1 opóźnienie dla przyrostu zmiennej BEL20 oraz przyrost zmiennej CAC40 bez opóźnień.

Model 13: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/04-2015/05/29 (N = 252)				
Zmienna zależna: d_BEL20				
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
const	0,910409	0,838471	1,086	0,2786
d_BEL20_1	0,109286	0,0279667	3,908	0,0001 ***
d_CAC40	0,543890	0,0167699	32,43	3,45e-091 ***
ECM_bel_cac_1	-0,0155799	0,00956149	-1,629	0,1045
Średn. aryt. zm. zależnej	2,246349	Odch. stand. zm. zależnej	30,27770	
Suma kwadratów reszt	43572,74	Błąd standardowy reszt	13,25506	
Wsp. determ. R-kwadrat	0,810637	Skorygowany R-kwadrat	0,808346	
F(3, 248)	353,8843	Wartość p dla testu F	2,75e-89	
Logarytm wiarygodności	-1006,820	Kryt. inform. Akaike'a	2021,640	
Kryt. bayes. Schwarz	2035,758	Kryt. Hannana-Quinna	2027,321	
Autokorel. reszt - rho1	-0,073519	Statystyka Durбина h	-1,299251	
Wyłączając stałą, największa wartość p jest dla zmiennej 25 (ECM_bel_cac_1)				

Rys. 19. Model korekty błędem dla pierwszych przyrostów szeregu BEL20 (model 2)

Parametr  $d\_BEL20\_1$  informuje, że występuje przyrost indeksu BEL20 w stosunku do poprzedniego dnia o 0,1093 punktu. Wartość parametru  $d\_CAC40$  oznacza, że 1% wzrost wartości indeksu CAC40 spowoduje wzrost wartości indeksu BEL20 tego samego dnia o 0,5439 punktu. Parametr  $ECM\_aex\_cac\_1$  jest ujemny, co oznacza, że w przypadku indeksów BEL20 i CAC40 występuje między nimi mechanizm korekty błędem. Wartość  $p = 0,1045$  dla parametru  $ECM\_aex\_cac\_1$  nieznacznie przekracza jednak poziom istotności równy 10%, dlatego parametr ten nie jest istotny statystycznie. Przy założeniu dla parametru  $ECM\_aex\_cac\_1$  poziomu istotności wyższego niż 10%, co w praktyce badań ekonomicznych występuje jednak rzadko, można stwierdzić, że ok. 1,56% zmian odchyłał wartości indeksu BEL20 od długookresowej zależności z CAC40 jest zredukowana w ciągu jednego dnia.

Ostatni rozpatrywany w badaniu model dotyczy wpływu indeksu AEX na indeks BEL20. Równanie kointegrujące dla tego modelu ma następującą postać:

$$BEL20 = 288,885 + 7,0118 \cdot AEX \quad (21)$$

Reszty z równania kointegrującego są stacjonarne, ponieważ statystyka testu  $DF = -2,559$  jest mniejsza od wartości krytycznej testu na poziomie istotności równym 5% ( $DF_{0,05} = -1,959$ , dla  $n = 250$ ) – wyniki zaprezentowano na rys. 20.

Model 15: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/03-2015/05/29 (N = 253)			
Zmienna zależna: d_res_BEL_AEX			
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta
res_BEL_AEX_1	-0,0529530	0,0206947	-2,559
			wartość p
			0,0111 **
Średn. aryt. zm. zależnej	-0,183525	Odch. stand. zm. zależnej	12,25722
Suma kwadratów reszt	36909,89	Błąd standardowy reszt	12,10239
Wsp. determ. R-kwadrat	0,025323	Skorygowany R-kwadrat	0,025323
F(1, 252)	6,547296	Wartość p dla testu F	0,011090
Logarytm wiarygodności	-989,3214	Kryt. inform. Akaike'a	1980,643
Kryt. bayes. Schwarza	1984,176	Kryt. Hannana-Quinna	1982,064
Autokorel. reszt - rho1	-0,024741	Stat. Durбина-Watsona	2,037318

Rys. 20. Badanie reszt pochodzących z równania kointegrującego – model 3

Szeregi BEL20 oraz AEX można uznać za skointegrowane, dzięki czemu możliwa jest budowa modelu korekty błędem (rys. 21) dla obydwu zmiennych:

$$\begin{aligned} \Delta BEL20_t = & 0,0329 + 0,0169\Delta BEL20_{t-1} + 6,4670\Delta AEX_t - \\ & - 0,0458ECM_{t-1} + u_t \end{aligned} \quad (22)$$

W modelu przyjęto 1 opóźnienie dla przyrostu zmiennej BEL20 oraz przyrost zmiennej AEX bez opóźnień.



```

Model 16: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 2014/06/04-2015/05/29 (N = 252)
Zmienna zależna: d_BEL20

-----
                współczynnik   błąd standardowy   t-Studenta   wartość p
-----
const           0,0329034         0,754994         0,04358     0,9653
d_BEL20_1       0,0169370         0,0251455        0,6736     0,5012
d_AEX           6,46699           0,175042         36,95      8,07e-103 ***
ECM_bel_aex_1  -0,0457998        0,0207345        -2,209     0,0281 **

Średn. aryt. zm. zależnej  2,246349   Odch. stand. zm. zależnej  30,27770
Suma kwadratów reszt      35190,54   Błąd standardowy reszt     11,91207
Wsp. determ. R-kwadrat    0,847065   Skorygowany R-kwadrat      0,845215
F(3, 248)                 457,8685   Wartość p dla testu F      8,8e-101
Logarytm wiarygodności   -979,8995   Kryt. inform. Akaike'a     1967,799
Kryt. bayes. Schwarza     1981,917   Kryt. Hannana-Quinna      1973,480
Autokorel. reszt - rho1 -0,033182   Statystyka Durbina h       -0,573151

Wyłączając stałą, największa wartość p jest dla zmiennej 5 (d_BEL20_1)

```

Rys. 21. Model korekty błędem dla pierwszych przyrostów szeregu BEL20 (model 3)

W przypadku modelu opisującego zależność między giełdą belgijską i holenderską istotnie statystycznie okazały się parametry  $d\_AEX$  oraz  $ECM\_bel\_aex\_1$ . Wartość parametru  $d\_AEX$  oznacza, że 1% wzrost wartości indeksu AEX spowoduje wzrost wartości indeksu BEL20 tego samego dnia o 6,4670 punktu, *ceteris paribus*. Parametr  $ECM\_bel\_aex\_1$  jest ujemny, co zapewnia dochodzenie do stanu równowagi, opisującego zależność między indeksami BEL20 i AEX. Wartość parametru oznacza, że indeks BEL20 dostosowuje się do długookresowej zależności z poprzedniego dnia w zakresie 4,58%. Podsumowując, na wartość indeksu BEL20 w danym dniu nie ma wpływu wartość tego indeksu w dniu poprzednim, natomiast istotny wpływ ma wartość indeksu AEX w tym samym dniu. Indeksy BEL20 oraz AEX są ze sobą silnie powiązane, a proces opisujący zależność między tymi indeksami trudno wytrącić z długookresowej równowagi.

## Podsumowanie

W artykule dokonano oceny powiązań indeksów giełdowych CAC40, AEX oraz BEL20 z wykorzystaniem analizy kointegracji oraz modelu korekty błędem. Model ten daje możliwość uchwycenia w jednym równaniu dynamiki krótkookresowej oraz równowagi długookresowej. Wyniki badania potwierdziły, że szeregi czasowe, reprezentujące rozpatrywane indeksy giełdowe są zintegrowane w tym samym stopniu, a reszty z równań kointegrujących wszystkich modeli są stacjonarne, co pozwoliło na budowę modelu korekty błędem dla poszczegól-

nych par indeksów giełdowych. We wszystkich modelach zaobserwowano mechanizm powracania do stanu długookresowej równowagi, a najsilniejsza zależność wystąpiła między indeksami BEL20 i AEX.

## Literatura

- Kusideł E. (2000), *Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowania* [w:] B. Suchecki (red.), *Dane panelowe i modelowanie wielowymiarowe w badaniach ekonomicznych*, t. 3, Absolwent, Łódź.
- Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root*, "Journal of Econometrics", No. (54).
- Maddala G.S. (2006), *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Osińska M. (2006), *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa.
- Welfe A. (2009), *Ekonometria: metody i ich zastosowania*, PWE, Warszawa.
- Wójcik A. (2014), *Modele wektorowo-autoregresyjne jako odpowiedź na krytykę strukturalnych wielorównaniowych modeli ekonometrycznych*, Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, nr 193.

## ANALYSIS OF LINKS BETWEEN FRENCH, DUTCH AND BELGIAN STOCK MARKET WITH THE USE OF ERROR CORRECTION MODEL

**Summary:** The article presents assessment of links between stock indices CAC40, AEX and BEL20 with the use of cointegration analysis and error correction model. This model enables us to capture in one equation short-term dynamics and long-term equilibrium. Research results confirmed, that time series representing examined stock indices are integrated in the same order and residuals from cointegration equations of all models are stationary. This fact enabled us to build error correction model for specific pairs of stock indices. Long-term equilibrium reversion mechanism was observed in all models and the strongest dependence appeared between BEL20 and AEX index.

**Keywords:** stock indices, cointegration, error correction model.