Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 295 · 2016

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych,
k.piasecki@ue.poznan.pl

ROZMYTA WARTOŚĆ BIEŻĄCA – PRÓBA UJĘCIA AKSJOMATYCZNEGO*

Streszczenie: Przedmiotem rozważań jest wartość bieżąca, określona jako zdyskontowana użyteczność przepływów finansowych. Zakładamy tutaj dodatkowo, że: 1 użyteczność bieżącej płatności jest równa jej wartości nominalnej; 2 użyteczność jest nieparzystą funkcją wartości nominalnej płatności. Taka definicja aksjomatyczna wartości bieżącej jest uogólniona do przypadku, w którym wartość bieżąca jest równa liczbie rozmytej. Addytywność wartości bieżącej, efekt dywersyfikacji ryzyka i pierwsze prawo Gossena także były rozważane.

Słowa kluczowe: użyteczność zdyskontowana, wartość bieżąca, liczba rozmyta, pierwsze prawo Gossena, zasada dywersyfikacji, addytywność wartości bieżącej.

Wprowadzenie

Podstawowym przedmiotem rozważań arytmetyki finansowej jest dynamiczna ocena wartości pieniądza, wyznaczana za pomocą pojęć „wartości bieżącej" i „wartości przyszłej". Wartością bieżącą (w skrócie PV) nazywamy wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu. Wartością przyszłą (w skrócie FV) nazywamy wartość przyszłego ekwiwalentu bieżącej płatności.

Punktem wyjścia do rozwoju arytmetyki finansowej była teoria procentu [zob. Chrzan, 2001]. Dalszy rozwój arytmetyki finansowej zaowocował sformułowaniem przez L. Peccatiego [1972] aksjomatycznych podstaw arytmetyki fi-

* Projekt został sfinansowany ze środków przyznanych przez Narodowe Centrum Nauki na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/HS4/03543.

nansowej. Postępy tej teorii pozwoliły na usystematyzowanie i uproszczenie zbioru procedur obliczeniowych arytmetyki finansowej. Jednym z elementów teorii Peccatiego jest aksjomatyczna definicja PV. K. Piasecki [2012] zaproponował uogólnienie tej definicji do aksjomatycznej definicji PV, określonej jako funkcja użyteczności. Pozwoliła w wierny sposób odzwierciedlić istotę PV, rozumianej jako wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu.

Z drugiej strony PV zaczęła być postrzegana jako nieprecyzyjna ocena wartości teraźniejszego ekwiwalentu płatności. Wskazywano tutaj na zróżnicowane przesłanki braku precyzji w określeniu PV. Odzwierciedleniem tych poglądów było zdefiniowanie rozmytej PV jako zdyskontowanej rozmytej prognozy wartości przyszłego przepływu finansowego [Ward, 1985]. Koncepcja zastosowania liczb rozmytych w arytmetyce finansowej wywodzi się od I.J. Buckley'a [1987]. Definicję Peccatiego do przypadku rozmytego uogólnił M.L. Calzi [1990]. T.L. Ward [1985] definiuje rozmytą PV jako zdyskontowaną rozmytą prognozę przyszłego przepływu finansowego. Definicja Warda została uogólniona [Greenhut i in., 1995] do przypadku nieprecyzyjnie oszacowanego odroczenia. J.N. Sheen [2005] uogólnia definicję Warda do przypadku rozmytej stopy nominalnej. I.J. Buckley [1987], I. Gutierrez [1989], D. Kuchta [2000] i C. Lesage [2001] rozważają problemy związane z zastosowaniem rozmytej arytmetyki do wyznaczania rozmytej PV. X. Huang [2007] uogólnia definicję Warda do przypadku, gdy przyszły przepływ finansowy jest dany jako rozmyta zmienna losowa. Bardziej ogólna definicja rozmytej PV jest proponowana przez C.-T. Tsao [2005], zakładającego, iż przyszły przepływ finansowy jest określony jako rozmyty zbiór probabilistyczny.

Odmienne podejście zostało zaprezentowane przez K. Piaseckiego [2011a, 2011b, 2014b, gdzie nieprecyzyjnie oszacowaną PV zdefiniowano jako liczbę rozmytą zależną od bieżącej ceny rynkowej aktywa finansowego.

W niniejszej pracy przedstawiona została próba nowego sformułowania definicji aksjomatycznej rozmytej PV. Został wykorzystany fakt uogólnienia definicji PV [Piasecki, 2012] oraz doświadczenia zebrane przez autora w trakcie badań. Ostatecznym celem, do jakiego zmierza tok rozumowania prowadzonego w niniejszym artykule, jest sformułowanie nowej aksjomatycznej definicji rozmytej PV.

Równolegle z rozważaniami poświęconymi teorio-finansowym aspektom nowej definicji PV, prowadzony będzie wywód matematyczny. Dla lepszej percepcji treści teorio-finansowych, całość czystego wywodu matematycznego została wyodrębniona i przeniesiona do Dodatku umieszczonego po Podsumowaniu.

1. Wartość bieżąca – ujęcie aksjomatyczne

Każdą dostępną w określonym momencie czasu płatność możemy opisać jako strumień finansowy.

Niech będzie dany zbiór momentów czasowych $\Theta \subseteq [0, +\infty[$. W szczególnym przypadku może to być zbiór momentów kapitalizacji lub nieujemna półprosta czasu. Każdy strumień finansowy jest opisany przez parę $(t, C) \in \Phi = \Theta \times \mathbb{R}$, gdzie $t \in \Theta$ oznacza moment przepływu strumienia, natomiast $C \in \mathbb{R}$ opisuje wartość nominalną tego przepływu. Zbiór Φ nazywamy zbiorem płatności. Dodatkowo za pomocą symbolu $\Phi^+ = \Theta \times \mathbb{R}^+$ oznaczamy zbiór wszystkich należności. Zbiór wszystkich zobowiązań oznaczamy następująco $\Phi^- = \Theta \times \mathbb{R}^-$.

Proces aprecjacji kapitału powoduje to, że wraz z upływem czasu wzrasta wartości ekwiwalentu należności. W uniwersalny sposób mechanizmy tego wzrostu można opisać na drodze rozwinięcia aksjomatycznej teorii arytmetyki finansowej. Dla dowolnego $\Theta \subseteq [0, +\infty[$ Peccati [1972] zdefiniował FV jako funkcję $FV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$, spełniającą określone aksjomaty [Piasecki, 2007]. Następnie, dla ustalonej FV Peccati zdefiniował PV jako funkcję $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$, jednoznacznie wyznaczoną za pomocą tożsamości:

$$FV\big(t, PV(t, C)\big) = C \tag{1}$$

Zdefiniowana w powyższy sposób PV spełniała warunki:

$$\forall_{C \in \mathbb{R}}: PV(0, C) = C \tag{2}$$

$$\forall_{(t,C) \in \Phi^+} \forall_{\Delta t > 0}: PV(t + \Delta t, C) < PV(t, C) \tag{3}$$

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2) \in \Phi}: PV(t, C_1) + PV(t, C_2) = PV(t, C_1 + C_2) \tag{4}$$

Można pokazać [Peccati, 1972; Piasecki, 2007], że jeśli ustalona PV spełnia warunki (2), (3) i (4), to wtedy jednoznacznie wyznaczona przez tożsamość (1) FV spełnia warunki określone przez aksjomaty sformułowane przez Peccatiego. Oznacza to, że aksjomatyczna teoria Peccatiego może być równoważnie rozwinięta w oparciu o pojęcie PV, zdefiniowane jako dowolna funkcja $PV: \Theta \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, spełniająca warunki (2), (3) i (4). W ten sposób została stworzona spójna teoria arytmetyki finansowej. Aktualny stan wiedzy na temat konsekwencji takiego aksjomatycznego podejścia do pojęcia „wartości przyszłej" jest przedstawiona w publikacjach K. Piaseckiego [2007] oraz J. Janssena i innych [2009].

Postępowanie takie nie wyjaśniło jednak zjawiska wzrastania wartości pieniądza. Wyjaśnienie takie uzyskano, wykazując, że PV dowolnego strumienia finansowego jest identyczna z jego użytecznością [Piasecki, 2012]. Stwierdzenie to w pełni wyjaśnia istotę pojęcia „wartości bieżącej". Dzięki temu uzyskano bardziej ogólną definicję PV, która została zdefiniowana jako funkcja $PV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki (2), (3) i:

$$\forall_{(t,C)\in\Phi}\forall_{\Delta C>0}\colon PV(t,C) < PV(t,C+\Delta C) \tag{5}$$

$$\forall_{(t,C)\in\Phi}\colon PV(t,-C) = -PV(t,C) \tag{6}$$

Spełnienie warunków (3) i (5) oznacza, że PV jest szczególnym przypadkiem zdyskontowanej użyteczności. Dodatkowo, tak zdefiniowana PV spełnia warunki:

$$\forall_{t\in\Theta}\colon PV(t,0) = 0 \tag{7}$$

$$\forall_{(t,C)\in\Phi^-}\forall_{\Delta t>0}\colon PV(t,C) < PV(t+\Delta t,C) \tag{8}$$

K. Piasecki [2015] dobrze uzasadnia, na gruncie ekonomii, przykład takiej PV, która spełnia warunki (2), (3), (5) i (6) i równocześnie nie spełnia warunku (4). Oznacza to, że z punktu widzenia ekonomii zaproponowane uogólnienie definicji PV jest istotne. Piasecki [2012] pokazuje też, że pojęcie PV w ujęciu Peccatiego można uogólnić do przypadku, gdy jest uwzględniany dodatkowo efekt dywersyfikacji inwestycji:

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2)\in\Phi}\colon PV(t,C_1) + PV(t,C_2) \geq PV(t,C_1 + C_2) \tag{9}$$

Wartość bieżąca $PV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wtedy jako dowolną funkcję spełniającą warunki (2), (3), (5), (6) i (9). Tak rozumiane pojęcie PV możemy z kolei uogólnić, gdy dodatkowo uwzględniane jest pierwsze prawo Gossena:

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2)\in\Phi^+}\forall_{\alpha\in[0;1]}\colon \alpha \cdot PV(t,C_1) + (1-\alpha)PV(t,C_2) \leq PV(t,\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2) \tag{10}$$

informujące o malejącej marginalnej użyteczności bogactwa. Wartość bieżącą $PV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wtedy jako dowolną funkcję, spełniającą warunki (2), (3), (5), (6) i (10).

2. Rozmyta wartość bieżąca

Wykazanie, że PV danego strumienia finansowego jest identyczna z użytecznością tego strumienia, dowodzi możliwości subiektywnego podejścia do PV. Subiektywne oceny zawsze zależą od czynników behawioralnych. W swej istocie stany środowiska behawioralnego są definiowane nieprecyzyjnie. Z tej przyczyny konieczne było ujawnienie braku precyzji w oszacowaniu PV. Efektywnym narzędziem opisu nieprecyzji jest teoria zbiorów rozmytych.

Propozycja przedstawienia wartości bieżącej jako liczby rozmytej jest już dobrze ugruntowaną ideą, co wykazano we wprowadzeniu przy opisie problemu badawczego. W ogólnym przypadku możemy przyjąć, iż wartość bieżąca może być oszacowana przy pomocy liczby rozmytej. Do opisu tego oszacowania wykorzystamy pojęcia przedstawione w Dodatku, umieszczonym na końcu artykułu.

Rozważamy przestrzeń finansową (Φ, PV), gdzie $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną ustaloną funkcją spełniającą warunki (2), (3), (5) i (6). Funkcja ta strumieniowi finansowemu $(t, C) \in \Phi$ przypisuje jego dokładną normatywną PV (w skrócie TPV[1]). Wtedy przybliżona PV może być przedstawiona jako liczba rozmyta $\tilde{\mathcal{R}}(PV(t, C)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

W ten sposób, inwestor, oceniając przybliżenia PV poszczególnych strumieni finansowych określa rodzinę $\Xi = \{\mu(\cdot\,|t, C): (t, C) \in \Phi\} \subset [0; 1]^{\mathbb{R}}$ funkcji przynależności liczb rozmytych. Zgodnie z definicją liczby rozmytej [Dubois, Prade, 1979], każda funkcja przynależności $\mu(\cdot\,|t, C): \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$ spełnia warunki:

$$\mu(PV(t, C)|t, C) = 1 \tag{11}$$

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}: x \leq y \leq z \Rightarrow \mu(y|t, C) \geq \min\{\mu(x|t, C), \mu(z|t, C)\} \tag{12}$$

Zmierzając do zastąpienia dokładnej normatywnej oceny $PV(t, C)$ przez jej przybliżenia, na rodzinę Ξ funkcji przynależności nakładamy warunki, będące uogólnieniem do przypadku rozmytego warunków (2), (3), (5) i (6), zastosowanych w aksjomatycznej definicji PV.

Warunek (2) zapisujemy w równoważny sposób następująco:

$$\forall_{C\in\mathbb{R}}: \mu(x|0, C) = \begin{cases} 1 & x = C \\ 0 & x \neq C \end{cases} \tag{13}$$

Korzystając z zasady rozszerzenia Zadeha, warunek (6) uogólniamy do warunku:

$$\forall_{(t,C)\in\Phi}: \mu(x|t, -C) = \mu(-x|t, C) \tag{14}$$

Odmiennie ma się rzecz z warunkami (3) i (5) określającymi PV jako zdyskontowaną użyteczność. Każdy z tych warunków możemy zastąpić odpowiednio przez warunki:

$$\forall_{(t,C)\in\Phi^+}\forall_{\Delta t>0}: \tilde{\mathcal{R}}(PV(t + \Delta t, C)) \prec \tilde{\mathcal{R}}(PV(t, C)) \tag{15}$$

$$\forall_{(t,C)\in\Phi}\forall_{\Delta C>0}: \tilde{\mathcal{R}}(PV(t, C)) \prec \tilde{\mathcal{R}}(PV(t, C + \Delta C)) \tag{16}$$

Każda z zastosowanych powyżej relacji jest relacją rozmytą. W tej sytuacji wartość logiczną zdań (15) i (16) można ocenić jedynie w ujęciu logik wielowartościowych. Oznacza to konieczność uwzględnienia tego przy formułowaniu rozszerzeń warunków (3) i (5) do przypadku rozmytego. Pomocna będzie funkcja przynależności $\nu_{\prec}: [\mathcal{F}(\mathbb{R})]^2 \rightarrow [0,1]$ relacji zastosowanej w warunkach (15) i (16).

Możemy oczekiwać, że wraz ze wzrostem wartości przyrostu Δt nie będzie malał stopień spełnienia nierówności (15). Oznacza to, że funkcja $f_t: \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0; 1]$ dana za pomocą tożsamości:

$$f_t(\Delta t) = \nu_{\prec}\left(\tilde{\mathcal{R}}(PV(t + \Delta t, C)), \tilde{\mathcal{R}}(PV(t, C))\right) \tag{17}$$

[1] Ang. *Theoretical Present Value*.

jest dla każdej należności $(t, C) \in \Phi^+$ funkcją niemalejącą. Zgodnie z (28), warunek ten jest równoważny warunkowi:

[A] *Dla każdej należności* $(t, C) \in \Phi^+$ *funkcja* $g_t\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0; 1]$ *dana za pomocą tożsamości*

$$g_t(\Delta t) = \sup\{\min\{\mu(x|t + \Delta t, C), \mu(x|t, C)\}: x \in \mathbb{R}\} \tag{18}$$

jest funkcją nierosnącą.

W przypadku nierozmytych ocen PV warunek [A] redukuje się do warunku (3). Wszystko to powoduje, że warunek [A] będzie w dalszych rozważaniach odgrywał rolę rozszerzenia warunku (3) do przypadku rozmytego.

Możemy też oczekiwać, że wraz ze wzrostem wartości przyrostu Δt nie będzie malał stopień spełnienia nierówności (15). Oznacza to, że funkcja $f_C\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0; 1]$ dana za pomocą tożsamości:

$$f_C(\Delta C) = \nu_< \left(\tilde{\mathcal{R}}\big(PV(t, C)\big), \tilde{\mathcal{R}}\big(PV(t, C + \Delta C)\big)\right) \tag{19}$$

jest dla każdej płatności $(t, C) \in \Phi$ funkcją niemalejącą. Zgodnie z (28), warunek ten jest równoważny warunkowi:

[B] *Dla każdej płatności* $(t, C) \in \Phi$ *funkcja* $g_C\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0; 1]$ *dana za pomocą tożsamości*

$$g_C(\Delta C) = \sup\{\min\{\mu(x|t, C), \mu(x|t, C + \Delta C)\}: x \in \mathbb{R}\} \tag{20}$$

jest funkcją nierosnącą.

W przypadku nierozmytych ocen PV warunek [B] redukuje się do warunku (5). Wszystko to powoduje, że warunek [B] będzie w dalszych rozważaniach odgrywał rolę rozszerzenia warunku (5) do przypadku rozmytego.

W ten sposób zostaje wprowadzona szacunkowa wartość bieżąca (EPV[2]) zdefiniowana jako funkcja $\widetilde{PV}\colon \Phi \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ określona za pomocą tożsamości:

$$\widetilde{PV}(t, C) = \tilde{\mathcal{R}}\big(PV(t, C)\big) \tag{21}$$

gdzie liczba rozmyta $\tilde{\mathcal{R}}\big(PV(t, C)\big)$ jest reprezentowana przez swą funkcję przynależności $\mu(\cdot\, |t, C)\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$, spełniającą warunki (13), (14), [A] i [B].

Powyżej sformułowana definicja EPV może odgrywać rolę aksjomatycznej definicji rozmytej PV. Przemawiają za tym wszystkie rozważania przeprowadzone w tym rozdziale. Za przyjęciem definicji EPV, jako aksjomatycznej definicji rozmytej PV, przemawia też to, iż wszystkie PV zdefiniowane jako liczby trapezoidalne lub liczby trójkątne [Buckley, 1987; Gutierrez, 1989; Kuchta, 2000; Lesage, 2001] oraz behawioralna PV [Piasecki, 2011a, 2011b, 2014b] są szczególnymi przypadkami EPV.

---

[2] Ang. *Estimated Present Value.*

Dowolna dokładna PV może spełniać dodatkowo warunki (4), (9) lub (10). Każdy z tych warunków możemy przenieść do aksjomatycznej definicji EPV, zakładając dodatkowo, że wybrany warunek jest spełniany przez TPV $PV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ wyznaczającą EPV.

Podsumowanie

Przedstawiona powyżej aksjomatyczna definicja rozmytej EPV może stanowić punkt wyjścia do zbudowania ogólnej teorii rynków finansowych, obarczonych ryzykiem nieprecyzji[3]. Dodatkowe zastosowanie w tych teoriach założeń przyjętych w aksjomatycznej definicji PV, pozwoli na uściślenie tez zawartych w tych teoriach oraz na wyprowadzenie nowych wniosków. Wszystko to umożliwi zaproponowanie i zbadanie nowych strategii inwestycyjnych.

Z drugiej strony, K. Piasecki [2013] przedstawia przykład zastosowań teorii rozmytych zbiorów intuicyjnych do opisu EPV. Propozycja ta wymaga dalszych starannych studiów teoretycznych, których istotnym elementem będzie zbudowanie aksjomatyczno-dedukcyjnej teorii EPV, przedstawianej jako rozmyty zbiór intuicyjny. Zaproponowana tutaj aksjomatyczna definicja rozmytej EPV może zostać wtedy rozszerzona do przypadku EPV, ocenianej jako intuicyjny rozmyty zbiór liczb rzeczywistych.

Reasumując, zaproponowana w tym artykule aksjomatyczna definicja rozmytej EPV stanowi istotny przyczynek do rozwoju formalnej teorii rynków finansowych.

Dodatek

Za pomocą symbolu $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ oznaczamy rodzinę wszystkich rozmytych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{X}$. Każdy podzbiór rozmyty $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ jest opisany za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_A\colon \mathbb{X} \to [0; 1]$.

Dowolny podzbiór $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentuje nieprecyzyjne oszacowanie, które może posłużyć do uporządkowania obiektów reprezentowanych przez te oszacowania. Na wstępie określimy relacje porządku na zbiorze wszystkich nieprecyzyjnych oszacowań $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Jedyną przesłanką, jaką będziemy się tutaj kierować, będzie zasada rozszerzenia Zadeha. W sytuacji, gdy porównywane osza-

[3] Przykłady takich teorii sformułowanych dla przypadku EPV danego jako dowolna liczba rozmyta, można znaleźć w: [Piasecki 2011b, 2011c, 2014a].

cowania są zbiorami rozmytymi na prostej rzeczywistej, należy to uporządkowanie wyznaczyć jako rozmyty preporządek [Orlovsky, 1978].

Weźmy pod uwagę oszacowania $\tilde{A}, \tilde{B} \epsilon \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentowane odpowiednio przez swe funkcje przynależności $\mu_A, \mu_B \epsilon [0,1]^{\mathbb{R}}$. Rozmyta relacja preporządku $\preccurlyeq$ jest zdefiniowana za pomocą równoważności:

$\tilde{A} \preccurlyeq \tilde{B} \Leftrightarrow$ *„Oszacowanie $\tilde{A}$ jest mniejsze lub równe od oszacowania* $\tilde{\mathrm{B}}$*”* (22)

Relacja $\preccurlyeq$ jest opisana przez funkcję przynależności $\nu_{\preccurlyeq}: [\mathcal{F}(\mathbb{R})]^2 \to [0,1]$ daną za pomocą tożsamości:

$$\nu_{\preccurlyeq}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}: x \leq y\} \tag{23}$$

Rozmyta relacja ostrego porządku $\prec$ jest zdefiniowana za pomocą równoważności:

$\tilde{A} \prec \tilde{B} \Leftrightarrow$ *„Oszacowanie $\tilde{A}$ jest mniejsze od oszacowania* $\tilde{\mathrm{B}}$*”* (24)

Relacja ostrego porządku $\prec$ jest określona przez funkcję przynależności $\nu_{\prec}: [\mathcal{F}(\mathbb{R})]^2 \to [0,1]$ daną za pomocą tożsamości:

$$\nu_{\prec}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \min\{\nu_{Q\preccurlyeq}(\tilde{A}, \tilde{B}), 1 - \nu_{\preccurlyeq}(\tilde{B}, \tilde{A})\} \tag{25}$$

Wartość $\nu_{\prec}(\tilde{A}, \tilde{B})$ interpretujemy jako wartość logiczną zdania: $\tilde{A} \prec \tilde{B}$. Wartość tę nazywamy stopniem spełnienia relacji.

Dowolna liczba $l \epsilon \mathbb{R}$ może być w przybliżeniu oszacowana przy pomocy liczby rozmytej $\tilde{\mathcal{R}}(l)$, będącej szczególnym przypadkiem nieprecyzyjnego oszacowania. Zgodnie z definicją podaną przez J. Duboisa i H. Prade'a [1979], liczba rozmyta $\tilde{\mathcal{R}}(l)$ jest zdefiniowana za pomocą swej funkcji przynależności $\mu(\cdot\,|l): \mathbb{R} \to [0;1]$ spełniającej warunki:

$$\mu(l|l) = 1 \tag{26}$$

$$\forall_{x,y,z \epsilon \mathbb{R}}: x \leq y \leq z \Rightarrow \mu(y|l) \geq \min\{\mu(x|l), \mu(z|l)\} \tag{27}$$

Zauważmy, że jeśli $k < l$, to wtedy z (26) mamy:

$$1 \geq \sup\{\min\{\mu(x|k), \mu(y|l)\}: x \leq y\} \geq \min\{\mu(k|k), \mu(l|l)\} = 1$$

Z drugiej strony, dzięki (27) mamy:

$$\sup\{\min\{\mu(x|l), \mu(y|k)\}: x \leq y\} = \sup\{\min\{\mu(x|l), \mu(x|k)\}: x \in \mathbb{R}\}$$

Dzięki temu możemy zapisać:

$$\nu_{\prec}\left(\tilde{\mathcal{R}}(k), \tilde{\mathcal{R}}(l)\right) = 1 - \sup\{\min\{\mu(x|l), \mu(x|k)\}: x \in \mathbb{R}\} \tag{28}$$

Literatura

Buckley I.J. (1987), *The Fuzzy Mathematics of Finance*, "Fuzzy Sets and Systems", No. 21.

Calzi M.L. (1990), *Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance*, "Fuzzy Sets and Systems", No. 35.

Chrzan P. (2001), *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*, Oikońomos, Katowice.

Dubois J., Prade H. (1979), *Fuzzy Real Algebra: Some Results*, "Fuzzy Sets and Systems", No. 2.

Greenhut J.G., Norman G., Temponi C. (1995), *Towards a Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition*, IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS.

Gutierrez I. (1989), *Fuzzy Numbers and Net Present Value*, "Scand. J. Mgmt", No. 5(2).

Huang X. (2007), *Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information*, "European Journal of Operational Research", No. 180(1).

Janssen J., Manca R., Volpe di Prignano E. (2009), *Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Models*, John Wiley&Sons, London.

Kuchta D. (2000), *Fuzzy Capital Budgeting*, "Fuzzy Sets and Systems", No. 111.

Lesage C. (2001), *Discounted Cash-flows Analysis. An Interactive Fuzzy Arithmetic Approach*, "European Journal of Economic and Social Systems", No. 15(2).

Orlovsky S.A. (1978), *Decision Making with a Fuzzy Preference Relation*, "Fuzzy Sets and Systems", No. 1.

Peccati L. (1972), *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell' attualizzazione*, Studium Parmense, Parma.

Piasecki K. (2007), *Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Piasecki K. (2011a), *Behavioural Present Value*, "SSRN Electronic Journal", No. 1, DOI:10.2139/ssrn.1729351.

Piasecki K. (2011b), *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.

Piasecki K. (2011c), *Effectiveness of Securities with Fuzzy Probabilistic Return*, "Operations Research and Decisions", No. 21.

Piasecki K. (2012), *Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory*, "Operations Research and Decisions", No. 22, DOI: 10.5277/ord120303.

Piasecki K. (2013), *Intuitionistic Assessment of Behavioural Present Value*, "Foliae Oeconomica Stetinensia", "Folia Oeconomica Stetinensia", No. 13(21)(2), DOI:10.2478/foli-2013-0021.

Piasecki K. (2014a), *On Imprecise Investment Recommendations*, "Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", No. 37(50), DOI:10.2478/slrg-2014-0024.

Piasecki K. (2014b), *Behawioralna wartość bieżąca – nowe podejście*, „Optimum Studia Ekonomiczne", nr 67.

Piasecki K. (2015), *Wartość bieżąca a pierwsze prawo Gossena – studium przypadku*, „Studia Oeconomica Posnaniensa", nr 3(2).

Piasecki K., Ronka-Chmielowiec W. (2011), *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.

Sheen J.N. (2005), *Fuzzy Financial Profitability Analyses of Demand Side Management Alternatives from Participant Perspective*, "Information Sciences", No. 169.

Tsao C.-T. (2005), *Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value for a Capital, Investment Choice Using Fuzzy Arithmetic*, "J. of Chin. Ins. of Industrial Engineers", No. 22(2).

Ward T.L. (1985), *Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis*, 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings.

FUZZY PRESENT VALUE – AN ATTEMPT TO AXIOMATIC APPROACH

Summary: The subject of considerations is the present value defined as the discounted utility of cash flow. We assume here also that: 1° the utility of current payment is equal to its nominal value; 2° the utility is odd function of payment nominal value. This axiomatic definition of present value is generalized to the case in which present value is equal to fuzzy number. Additivity of present value, diversification rule and The First Gossen's Law are also taken into account.

Keywords: temporal utility, present value, fuzzy number, the First Gossen's Law, diversification rule, additivity of present value.