Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 295 · 2016

Joanna Utkin

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
jutkin@sgh.waw.pl

MIARA I ODWZOROWANIE RYZYKA *FORWARD* NA RYNKU SKOŃCZONYM

Streszczenie: Praca dotyczy konstrukcji odwzorowania ryzyka *forward* w modelu rynku skończonego określonego na strukturze drzewa. Odwzorowanie ryzyka *forward* jest zdefiniowane dla danej warunkowej wypukłej miary ryzyka, spełniającej warunek kalibracji. Odwzorowanie to nie jest niezmiennicze względem dopłat, lecz jest podaddytywne. W różnych modelach rynków skończonych, wskazane zostały pewne warunkowe miary ryzyka, generujące odwzorowania ryzyka *forward*.

Słowa kluczowe: warunkowa miara ryzyka, warunek kalibracji.

Wprowadzenie

Zastosowania statycznej miary ryzyka do modelu wielookresowego zainspirowały dwa nurty badań. W odniesieniu do modeli rynku kapitałowego argument miary ryzyka jest interpretowany jako zdyskontowana wypłata końcowa. Wiadomo, że po nałożeniu na miarę ryzyka warunku kalibracji, można otrzymać z niej odpowiednią miarę ryzyka *forward*, której argumentem jest wypłata końcowa. Drugi nurt dotyczy aktualizacji z upływem czasu pierwotnej miary ryzyka. Dla danej uniwersalnej miary ryzyka, można wówczas zdefiniować odpowiednie warunkowe miary ryzyka w przedziałach czasu o późniejszych początkach. Statyczna i warunkowa miara ryzyka mają ten sam argument.

Powstaje naturalne pytanie o połączenie obu nurtów, czyli o możliwość oraz konsekwencje eliminacji czynnika dyskontującego z argumentu jakiegoś odpowiednika warunkowej miary ryzyka. Należy zauważyć, iż czynnik dyskontujący, występujący w argumencie zarówno statycznej, jak warunkowej miary ryzyka dotyczy całego, a nie skróconego przedziału czasu. Z tego powodu ewentualny pomysł tworzenia miary ryzyka *forward* na podstawie warunkowej miary ryzyka i wcześniej wspomnianego warunku kalibracji, dotyczącego skróconego przedziału czasu, nie prowadziłby do uwzględnienia czynnika zawartego w zmiennej. Stąd pomysł odwołania się do uogólnionego warunku kalibracji.

W niniejszej pracy, na skończonym rynku zupełnym, pozbawionym możliwości arbitrażu, dla warunkowej miary ryzyka, spełniającej uogólniony warunek kalibracji zdefiniowane jest odwzorowanie ryzyka *forward*, którego argumentem jest wypłata końcowa. Odwzorowanie to nie jest warunkowo niezmiennicze względem translacji, natomiast charakteryzuje się podaddytywnością względem dopłat. W modelu rynku o losowych stopach procentowych wskazany został przykład miary ryzyka, generującej odwzorowanie ryzyka *forward*, oparte na wycenie bezarbitrażowej. W modelu rynku o deterministycznych stopach procentowych wykazane jest, iż każda warunkowa koherentna miara ryzyka generuje odpowiednie odwzorowanie ryzyka *forward*.

1. Model rynku i warunkowa miara ryzyka

Rozważamy model rynku kapitałowego, na którym transakcje odbywają się w chwilach $t \in \{0,\ldots,T\}$, przy czym w chwili T, rynek przyjmuje jeden z N stanów końcowych. Na zbiorze stanów końcowych dana jest funkcja prawdopodobieństwa rzeczywistego P. Struktura informacyjna modelu jest określona za pomocą schematu drzewa (niezrekombinowanego). Zmienne losowe traktujemy jako wektory z przestrzeni R^N. Przez $K(t)$ oznaczamy liczbę rozgałęzień w chwili t. Przez I_t oznaczamy podział zbioru stanów końcowych na podzbiory tych stanów, które można osiągnąć na koniec, jeśli wychodzi się z rozgałęzień schematu drzewa w chwili t. Stąd $CardI_t = K(t)$. Wtedy w rozpatrywanym modelu T-okresowym, w chwili t występuje ciąg $K(t)$ podmodeli T-t-okresowych, rozpoczynających się w kolejnych rozgałęzieniach drzewa w chwili t, kończących się na odpowiednich elementach I_t. Podmodele te wyposażone są w funkcje prawdopodobieństwa rzeczywistego, będące warunkowymi rozkładami otrzymanymi z P.

W przedziale czasu $\langle 0,T\rangle$ na rynku występuje $1+A$ pierwotnych papierów wartościowych: okresowo bezpieczne konto bankowe oraz A walorów ryzykownych, np. akcji. Ceny tych papierów wartościowych są dane na schemacie drzewa. Czynnik dyskontujący za okres $\langle 0,t\rangle$ oznaczamy przez D_t. Jest on równy $D_t = 1/((1+r_0)\ldots(1+r_{t-1}))$, gdzie $r_0,\ldots,r_{t-1}$ są losowymi stopami procentowymi dla kolejnych okresów jednostkowych, $D_0 = 1$. Zakładamy, ze rozważany rynek kapitałowy jest zupełny oraz pozbawiony możliwości arbitrażu. Twierdzenia dotyczące modeli skończonych orzekają, iż model rynku określony na schemacie drzewa jest pozbawiony możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy w żadnym podmodelu nie ma możliwości arbitrażu [Dana, Jeanblanc-Picque, 1998, s. 50] oraz że model rynku jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podmodel jest zupełny [Pliska 2005, s. 158]. Możemy poczynić następującą uwagę. W modelu występuje $1+A$ walorów pierwotnych, a ponieważ każdy 1-okresowy podmodel jest zupełny i pozbawiony możliwości arbitrażu, to liczba zdarzeń na koniec podmodelu wynosi $1+A$. W konsekwencji, w chwili t drzewo ma $K(t) = (1+A)^t$ rozgałęzień, zaś każdy element podziału I_t ma moc równą $(1+A)^{T-t}$.

Na rynku zupełnym i pozbawionym możliwości arbitrażu istnieje dokładnie jedna funkcja prawdopodobieństwa martyngalowego Q równoważna P, dla której ciąg zdyskontowanych wartości strategii replikującej wypłatę końcową jest Q-martyngałem. Wówczas, w każdej chwili $t\in\{0,\ldots,T\}$ jest jednoznacznie określona cena obligacji zerokuponowej $B_t(T)$, wypłacającej 1 w terminie T. Cena ta spełnia równanie:

$$D_t B_t(T) = E_Q(D_T|I_t) \tag{1}$$

Zakres zainteresowania autorów wiąże się z aktualizacją statycznej miary ryzyka ρ w wielookresowym przedziale czasu $\langle 0,T\rangle$. W rozszerzonym ujęciu teorii pomiaru ryzyka, obejmującym analizę warunkowych miar ryzyka, własności określające rodzaj miary ryzyka grupuje się w następujący sposób. Miarą ryzyka nazywa się funkcję $\rho : R^N \to R$, spełniającą warunki monotoniczności, niezmienniczości względem przesunięć oraz normalizacji [Utkin, 2010, s. 71]. Jeśli ponadto, funkcja ρ jest wypukła [Utkin, 2010, s. 158], to ρ jest wypukłą miarą ryzyka. Co więcej, jeśli funkcja ρ jest dodatnio jednorodna [Utkin, 2010, s. 71], to ρ jest koherentną miarą ryzyka. Aby miara ryzyka ρ kwalifikowała się do aktualizacji w chwilach pośrednich, wystarczy założyć, że formuła określająca jej wartości nie zależy od wymiaru dziedziny. Możemy wówczas mówić, że ρ jest uniwersalną miarą ryzyka.

Jeśli $T \geq 2$, to na podstawie danej uniwersalnej miary ryzyka $\rho : R^N \to R$, przyporządkowującej wektorom losowych kwot $X\in R^N$ skalary $\rho(X)$, to w chwili $t\in\{0,\ldots,T-1\}$ możemy zdefiniować odwzorowanie $\rho_t : R^N \to R^{K(t)}$, którego współrzędne mają w kolejnych T-t-okresowych podmodelach wartości określone za pomocą takiej samej formuły jak funkcja ρ. Stosując znany z literatury zapis [Follmer, Schied, 2011, s. 264], wartości tego odwzorowania wyrazimy wzorem:

$$\rho_t(X) = \rho(X|I_t),\ X\in R^N \tag{2}$$

Własności współrzędnych odwzorowania ρ_t z wzoru (2) i funkcji ρ nie są na ogół identyczne, gdyż na rynku skończonym własności miar ryzyka mogą zależeć od liczby stanów końcowych [Utkin, 2010].

Poniżej przytoczono definicję i klasyfikację warunkowych miar ryzyka [Follmer, Schied, 2011, s. 457], sformułowaną dla rozważanego przypadku.

Jeżeli dla odwzorowania $\rho_t : R^N \to R^{K(t)}$ zachodzą:

- warunkowa niezmienniczość względem przesunięć: $\rho_t(X + c_t) = \rho_t(X) - c_t$, gdzie c_t jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t
- monotoniczność: $X \le Y \Rightarrow \rho_t(X) \ge \rho_t(Y)$
- normalizacja: $\rho_t(0) = 0$

to ρ_t nazywamy warunkową miarą ryzyka.

Jeżeli ponadto zachodzi warunkowa wypukłość: $\rho_t(c_t X + (1-c_t)Y) \le c_t\rho_t(X) - (1-c_t)\rho_t(Y)$, gdzie c_t jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t i $c_t \in \langle 0,1 \rangle$, to ρ_t nazywa się warunkową wypukłą miarą ryzyka.

Co więcej, jeżeli jest spełniona warunkowa jednorodność: $\rho_t(c_t X) = c_t\rho_t(X)$, gdzie c_t jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t i $c_t > 0$, to ρ_t nazywa się warunkową koherentną miarą ryzyka.

Ciąg kolejnych warunkowych miar ryzyka $(\rho_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ jest nazywany dynamiczną miarą ryzyka.

2. Miara ryzyka *spot* i *forward*

Argument miary ryzyka ρ interpretuje się jako zdyskontowaną wypłatę końcową. N. El Karoui i C. Ravanelli zdefiniowały, na podstawie miary ryzyka ρ spełniającej warunek kalibracji, miarę ryzyka *forward*, której argumentem jest sama wypłata końcowa. W tym kontekście ρ nazywa się miarą ryzyka *spot* [El Karoui, Ravanelli, 2009, s. 566].

Mianowicie, jeśli miara ryzyka *spot* ρ spełnia warunek kalibracji:

$$\rho(cD_T) = -cB_0(T),\ c \in R \tag{3}$$

to funkcja $\varphi_T : R^N \to R$ o wartościach:

$$\varphi_T(W_T) = \rho(D_T W_T)/B_0(T),\ W_T \in R^N \tag{4}$$

jest wypukłą miarą ryzyka. Funkcja φ_T została nazwana miarą ryzyka *forward*.

Postać warunku kalibracji sugeruje następujący przykład.

Przykład

Niech:

$$\rho(X) = \mathrm{E}_Q(-X),\ X \in R^N \tag{5}$$

Funkcja ρ jest koherentną miarą ryzyka, spełniającą warunek kalibracji.

Jeśli $X = D_T W_T$, to:

$$\rho(X) = -W_0 \tag{6}$$

gdzie W_0 oznacza cenę bezarbitrażową w chwili 0 wypłaty W_T.

Miara ryzyka *forward*, generowana zgodnie z (4) przez miarę ryzyka *spot* (5), ma wartości:

$$\varphi_T(W_T) = -W_{0,T} \tag{7}$$

gdzie:

$$W_{0,T} = W_0/B_0(T) \tag{8}$$

jest ceną terminową *forward* w chwili 0 wypłaty losowej W_T, przy czym terminem dostawy wypłaty jest T.

3. Odwzorowanie ryzyka *forward*

Uogólnieniu warunku kalibracji (3) poświęcony jest rozdział 5 artykułu publikacji autorstwa B. Acciaio, H. Follmera i I. Penner [Acciaio, Follmer, Penner, 2012, s. 691]. Praca dotyczy dynamicznych wypukłych miar ryzyka dla procesów. Zmienną losową, reprezentującą pozycję finansową w danej chwili końcowej można traktować jako skończony proces o zerowych wcześniejszych przepływach. Twierdzenia o warunkowych wypukłych miarach ryzyka dowodzone są na podstawie reprezentacji scenariuszowej [Follmer, Schied, 2011, s. 458]. Informacje o reprezentacji scenariuszowej wypukłych miar ryzyka na rynku skończonym można znaleźć w rozdziale 7 pracy autorki niniejszego artykułu [Utkin, 2010, s. 160].

Na rynku zupełnym i pozbawionym możliwości arbitrażu uogólniony warunek kalibracji, odnoszący się do warunkowej wypukłej miary ryzyka oraz dotyczący dyskontowania na moment 0, ma postać [Acciaio, Follmer, Penner, 2012, s. 695]:

$$\rho_t(c_t D_T) = c_t D_t B_t(T),\ t \in \{0,\ldots,T-1\} \tag{9}$$

gdzie c_t jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t. Z twierdzenia o uogólnionym warunku kalibracji wynika, że (9) implikuje następującą regułę rozdzielności, względem zdyskontowanej dopłaty:

$$\rho_t(X + c_t D_T) = \rho_t(X) - c_t D_t B_t(T),\ X \in R^N \tag{10}$$

gdzie c_t jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t.

W przypadku stałej stopy procentowej i warunkowej koherentnej miary ryzyka reguła (10) pojawiła się uprzednio w artykule F. Riedla [Riedel, 2004, s. 188].

Traktując ρ_t jako odpowiednik na chwilę t miary ryzyka *spot*, wprowadzimy odpowiednik miary ryzyka *forward*.

Definicja

Odwzorowaniem ryzyka *forward* generowanym przez warunkową wypukłą miarę ryzyka ρ_t, spełniającą uogólniony warunek kalibracji (9), nazywamy odwzorowanie $\varphi_{T,t} : R^N \to R^{K(t)}$ o wartościach:

$$\varphi_{T,t}(W_T) = \rho(D_T W_T)/B_t(T),\ W_T \in R^N \tag{11}$$

Wtedy $\varphi_{T,0} = \varphi_T$

Z reguły rozdzielności (10) wynika następujący wniosek.

Wniosek 1

Odwzorowanie ryzyka *forward* $\varphi_{T,t}$ jest monotoniczne, znormalizowane, warunkowo wypukłe i spełnia regułę rozdzielności:

$$\varphi_{T,t}(W_T + c_t) = \varphi_{T,t}(W_T) - c_t D_t,\ W_T \in R^N \tag{12}$$

gdzie c_t jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t.

Otrzymana reguła (12) różni się od aksjomatu warunkowej niezmienniczości względem translacji, ponieważ dopłata po prawej stronie jest zdyskontowana. Z nierówności $D_t \leq 1$, $t \in \{0,\dots,T-1\}$ otrzymujemy kolejną własność odwzorowania *forward*.

Wniosek 2

Odwzorowanie ryzyka *forward* $\varphi_{T,t}$ jest warunkowo podaddytywne względem dopłat: dla $c_t > 0$ stałej na zdarzeniach z elementów I_t zachodzi nierówność:

$$\varphi_{T,t}(W_T + c_t) \geq \varphi_{T,t}(W_T) - c_t,\ W_T \in R^N \tag{13}$$

Gdy $D_t \neq 1$ a $D_t = 1$, np. dla $t = 0$, to w chwili t istnieją zdarzenia, dla których (13) jest nierównością ostrą. Odwzorowanie $\varphi_{T,t}$ nie spełnia warunków charakteryzujących warunkową miarę ryzyka.

W odniesieniu do statycznych miar ryzyka, warunkowa podaddytywność względem dopłat pojawia się w rezultacie składania miary ryzyka i nierosnącej funkcji wypukłej, z czym na przykład mamy do czynienia w wycenie bezarbitrażowej opcji *put* z zerową ceną wykonania [El Karoui, Ravanelli, 2009, s. 569].

Przykład cd.

Warunkowa miara ryzyka wyznaczona przez (5) ma wartości:

$$\rho_t(X) = \mathrm{E}_Q(-X|I_t),\ X \in R^N \tag{14}$$

Odwzorowanie (14) jest warunkową koherentną miarą ryzyka, spełniającą uogólniony warunek kalibracji. Jeśli $X = D_T W_T$, to

$$\rho_t(X) = -D_t W_t \tag{15}$$

gdzie W_t oznacza cenę bezarbitrażową w chwili t wypłaty W_T.

Odwzorowanie ryzyka *forward*, generowane przez warunkową miarę ryzyka (14) ma wartości:

$$\varphi_{T,t}(W_T) = -D_t W_{T,t},\ W_T \in R^N \tag{16}$$

gdzie

$$W_{T,t} = W_t / B_t(T) \tag{17}$$

(16) jest wektorem przeciwnym do wektora zdyskontowanej za okres $\langle 0,t\rangle$ ceny terminowej *forward* z chwili t wypłaty W_T, przy czym t jest terminem zawarcia kontraktu *forward*, a T – terminem dostawy wypłaty.

Odwzorowanie ryzyka *forward* (16) jest podaddytywne względem dopłaty $c_t \geq 0$ stałej na zdarzeniach z elementów I_t, mianowicie:

$$\varphi_{T,t}(W_T + c_t) = -D_t W_{T,t} - D_t c_t \geq -D_t W_{T,t} - c_t \tag{18}$$

Stosując do odwzorowania (16) regułę rozdzielności (12), otrzymaliśmy w (18) oba składniki określone w chwili t i zdyskontowane na moment *0*. Dążenie do uwzględnienia niezdyskontowanej dopłaty doprowadziło do efektu podaddytywnosci w (18).

Ograniczymy teraz rozważania do modelu rynku o deterministycznych stopach procentowych. W T-okresowym modelu dane są dla kolejnych okresów stopy procentowe $r_0,\ldots,r_{T-1}$, niezależne od stanów. Założymy ponadto, że ρ_t jest warunkową koherentną miarą ryzyka. Ze stałości c_t na zdarzeniach z elementów I_t wynika, że dla $t\in\{0,\ldots,T-1\}$ warunkowa miara ryzyka ρ_t spełnia (9):

$$\rho_t(c_t D_T) = -c_t D_T = -c_t \prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)^{-1} \prod_{s=t}^{T-1}(1+r_s)^{-1} = -c_t D_t B_t(T) \tag{19}$$

Istnieje zatem odwzorowanie ryzyka *forward*, które zgodnie z (4) ma wartości:

$$\varphi_{T,t}(W_T) = D_t \rho_t(W_T),\ W_T \in R^N \tag{20}$$

Ponadto z założenia koherencji wynika, że odwzorowanie (20) jest warunkowo dodatnio jednorodne:

$$\varphi_{T,t}(c_t W_T) = c_t \varphi_{T,t}(W_T) \tag{21}$$

gdzie $c_t > 0$ jest stałą na zdarzeniach z elementów I_t.

Wniosek 3

W modelu rynku o deterministycznych stopach procentowych każda koherentna warunkowa miara ryzyka spełnia warunek kalibracji. Taka miara ryzyka wyznacza odwzorowanie ryzyka *forward*, którego wartości określone są wzorem (20). Odwzorowanie (20) jest monotoniczne, znormalizowane, warunkowo wypukłe, dodatnio jednorodne oraz warunkowo podaddytywne względem dopłat.

Można zauważyć, iż założenie deterministycznych stóp procentowych może dotyczyć jedynie losowego modelu rynku, na którym instrumentami ryzykownymi są akcje. Rynek obligacji zostałby przy tym założeniu sprowadzony do odpowiedniego modelu rynku deterministycznego.

Podsumowanie

W odniesieniu do wielookresowych skończonych modeli rynku kapitałowego rozpatrywanych, przy założeniu braku mozliwości arbitrażu i zupełności, rozszerzono konstrukcję miary ryzyka *forward* na odwzorowanie ryzyka *forward*. Argument statycznej miary ryzyka interpretuje się jako zdyskontowaną wypłatę końcową. Dla miary ryzyka, spełniającej warunek kalibracji znana jest definicja miary ryzyka *forward*, której argumentem jest wypłata końcowa. Z drugiej strony aktualizacja danej statycznej miary ryzyka w modelu wielookresowym odbywa się przez generowanie odpowiedniej warunkowej miary ryzyka. W niniejszej pracy zostało zdefiniowane odwzorowanie ryzyka *forward* w odniesieniu do warunkowej wypukłej miary ryzyka spełniającej uogólniony warunek kalibracji. Odwzorowanie ryzyka *forward* jest monotoniczne, znormalizowane i warunkowo wypukłe, natomiast nie spełnia ono warunkowej niezmienniczości względem translacji, więc nie ma cech warunkowej miary ryzyka. Zamiast warunku niezmienniczości wprowadzone odwzorowanie spełnia regułę rozdzielności. Z tej reguły uzyskano warunek podaddytywności względem dopłat. Podaddytywność jest efektem dążenia do pomniejszenia wartości odwzorowania o niezdyskontowaną dopłatę.

Przykładem miary ryzyka, spełniającej warunek kalibracji generującej warunkowe miary ryzyka spełniające uogólniony warunek kalibracji jest wartość oczekiwania, względem funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego losowej straty. Wartość odwzorowania ryzyka *forward* jest wtedy zdyskontowaną ceną terminową straty. Na zakończenie wykazano, że na rynku o deterministycznych stopach procentowych każda koherentna warunkowa miara ryzyka spełnia uogólniony warunek kalibracji.

Literatura

Acciaio B., Follmer H., Penner I. (2012), *Risk Assessment for Uncertain Cash Floors: Model Ambiguity, Discounting Ambiguity and the Role of Bubbles*, "Finance and Stochastics", Vol. 16.

Dana R.-A., Jeanblanc-Picque M. (1998), *Marches financiers en temps continu*, Economica, Paris.

El Karoui N., Ravanelli C. (2009), *Cash Subadditive Risk Measures and Interest Rate Ambiguity*, "Mathematical Finance", No. 4.

Follmer H., Schied A. (2011), *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, De Gruyter, Berlin.

Pliska S. (2005), *Wprowadzenie do matematyki finansowej*, WNT, Warszawa.

Riedel F. (2004), *Dynamic Coherent Risk Measures*, "Stochastic Processes and Aplications", Vol. 112.

Utkin J. (2010), *Statyczne miary ryzyka i straty w skończonych modelach struktury terminowej*, SGH, Warszawa.

FORWARD RISK MEASURE AND APPLICATION IN THE FINITE MARKET MODEL

Summary: The paper deals with the construction of the forward risk application in the finite market model with the tree structure. The risk forward application is defined for a given conditional convex risk measure satisfying the generalized calibration condition. Such an application is not cash invariant, but is an subadditive one. In different market models we indicate some conditional risk measures generating forward risk applications.

Keywords: conditional risk measure, calibration condition.