



Katarzyna Zeug-Żebro

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl

IDENTYFIKACJA CHAOSU DETERMINISTYCZNEGO NA PODSTAWIE LICZBY NAJBLIŻSZYCH SĄSIADÓW

Streszczenie: Narzędzia służące do identyfikacji chaosu, pozwalają zwykle na wykrycie jedynie pojedynczego atrybutu dynamiki chaotycznej, np. wrażliwości na zmianę warunków początkowych, zatem przeprowadzenie bardziej wnikliwej analizy danych wymaga uwzględnienia uzupełniających się metod. Celem artykułu będzie identyfikacja chaosu deterministycznego na podstawie lokalnej aproksymacji wielomianowej, największego wykładnika Lapunowa oraz współczynnika DETM. W badaniach wykorzystane zostaną finansowe szeregi czasowe utworzone z cen zamknięcia wybranych indeksów giełd światowych.

Słowa kluczowe: chaos deterministyczny, szeregi czasowe, lokalna aproksymacja wielomianowa, wykładnik Lapunowa, współczynnik DETM.

Wprowadzenie

Analiza błędów *ex post* prognoz otrzymanych w wyniku zastosowania lokalnej aproksymacji wielomianem stopnia pierwszego, może być wykorzystana do identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych. Istotą takiego badania jest (nieudowodniona formalnie) hipoteza, iż w przypadku szeregów chaotycznych, najniższą wartość błędów prognozy uzyskuje się dla niewielkich wartości liczby najbliższych sąsiadów K , wykorzystanych do oszacowania współczynników wielomianu aproksymującego. W przeciwnym razie, tj. gdy najdokładniejszą prognozę otrzymamy dla dużej liczby najbliższych sąsiadów, szereg jest realizacją liniowego procesu autoregresyjnego. Średnie wartości K wskazują na konieczność zastosowania pewnego nieliniowego modelu stochastycznego [Casdagli, 1992; Orzeszko, 2005].

Celem artykułu jest klasyfikacja szeregów czasowych, tj. odróżnienie deterministycznych szeregów czasowych od losowych, na podstawie lokalnej aproksymacji wielomianowej, największego wykładnika Lapunowa oraz współczynnika DETM. W badaniach wykorzystane zostały finansowe szeregi czasowe, utworzone z cen zamknięcia wybranych indeksów giełd światowych oraz szereg chaotyczny wygenerowany przez odwzorowanie logistyczne.

1. Identyfikacja chaosu deterministycznego

Istnieje wiele różnych narzędzi, pozwalających na identyfikację chaosu deterministycznego w szeregach czasowych. Najczęściej stosowanymi w badaniach metodami są: największy wykładnik Lapunowa, wymiar korelacyjny, test BDS oraz analiza przeskalowanego zakresu R/S. Do mniej znanych należą m.in. współczynnik DETM oraz metoda opierająca się na modelu lokalnej aproksymacji wielomianowej. Ponieważ metody identyfikacji chaosu pozwalają zwykle na wykrycie jedynie pojedynczego atrybutu dynamiki chaotycznej, np. wrażliwości na zmianę warunków początkowych, zatem przeprowadzenie pełnej analizy danych wymaga uwzględnienia uzupełniających się metod.

1.1. Współczynnik DETM

Współczynnik DETM [Nowiński, 2007] pozwala ocenić, w jakim stopniu zrekonstruowany układ dynamiczny zachowuje własność ciągłości procesu w przestrzeni stanów. Jego podstawą jest twierdzenie Takensa o zanurzeniu [Takens, 1981]:

Twierdzenie Takensa o zanurzeniu [Orzeszko, 2005; Zawadzki, 1996]:

Niech M będzie zwartą, m wymiarową rozmaitością różniczkową. Dla par (f, h) , gdzie $f \in \text{Diff}^2(M, M)$ $h \in C^2(M, \mathbb{R})$ własnością generyczną¹ jest, że dla $d \geq 2m + 1$ odwzorowanie Φ jest zanurzeniem, tj. dyfeomorfizmem² klasy C^1 odwzorowującym M na $\Phi_{(f, h)}(M)$.

¹ Pojęcie „własności generycznej” oznacza w tym przypadku, że zbiór par (f, h) , dla których $\Phi_{(f, h)}$ jest zanurzeniem, tworzy zbiór otwarty i gęsty w odpowiedniej przestrzeni funkcji [Zawadzki, 1996, s. 206].

² Odwzorowanie $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy *dyfeomorfizmem* klasy C^r , ($r \geq 0$), jeżeli jest odwracalne oraz f i f^{-1} należą do C^r .

Odwzorowanie $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ przekształca stany systemu w d -wymiarowe wektory opóźnień $\hat{x}_t^d = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(d-1)\tau})$ (zwane również d – historiami) zgodnie ze wzorem:

$$\Phi_{(f,h)}(x) = [h(x), h(f^\tau(x)), \dots, h(f^{(d-1)\tau}(x))] \quad (1)$$

tzn. $\Phi(x(t)) = \hat{x}_t^d$, gdzie d jest wymiarem zanurzenia i τ jest pewną liczbą naturalną, zwaną opóźnieniem czasowym.

Powyższe twierdzenie głosi, że dla $d \geq 2m + 1$ przestrzenie (M, f) i $(\Phi(M), F)$ są dyfeomorficzne (gdzie funkcja $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ opisuje dynamikę d -historii, że $F(\hat{x}_t^d) = \hat{x}_{t+1}^d$). Funkcję F określa się jako funkcję topologicznie sprzężoną³ z pierwotną funkcją f , co oznacza m.in. że odwzorowanie F zachowuje własność ciągłości trajektorii w przestrzeni stanów. Zatem dla każdej pary punktów (x_i, x_j) zrekonstruowanej przestrzeni spełniony jest warunek:

$$\forall_{\beta > 0} \exists_{\alpha > 0} \|x_i - x_j\| < \alpha \Rightarrow \|F(x_i) - F(x_j)\| < \beta \quad (2)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową, mierzącą odległość między wektorami. Własność ta pokazuje, że obrazy bliskich punktów układu muszą znajdować się także blisko siebie w zrekonstruowanej przestrzeni stanów. Ciągłość odwzorowania jest cechą procesów deterministycznych i może być wykorzystana do odróżniania procesów losowych od chaotycznych [Miśkiewicz-Nawrocka, 2012].

Algorytm wyznaczania współczynnika DETM dla szeregu obserwacji $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ przebiega według następujących kroków:

Krok 1. W zrekonstruowanej przestrzeni stanów wyznaczamy najbliższego sąsiada \hat{x}_k^d punktu $\hat{x}_t^d = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+d-1})$, $k \neq t$, $k = d, \dots, N$, który minimalizuje odległość euklidesową wektora \hat{x}_t^d od wszystkich wektorów w tej samej d -wymiarowej przestrzeni.

Krok 2. Następnie wyznaczamy najbliższego sąsiada \hat{x}_{k+1}^d obrazu punktu \hat{x}_t^d , tj. \hat{x}_{t+1}^d .

³ Odwzorowania $f : X \rightarrow X$ i $F : Y \rightarrow Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami metrycznymi, nazywamy topologicznie sprzężonymi, jeśli istnieje homeomorfizm $h : X \rightarrow Y$ taki, że dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$h \circ f = F \circ h, \text{ tzn. następujący diagram } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{F} & Y \end{array} \text{ jest przemienny [Zawadzki, 1996, s. 43].}$$

Krok 3. Dla $\alpha = \beta = 0,3\sigma$, gdzie σ jest odchyleniem standardowym odległości między punktami w zrekonstruowanej przestrzeni stanów, wyznaczamy zbiór Z par najbliższych sąsiadów, dla których spełniony jest warunek

$$\|\hat{x}_t^d - \hat{x}_k^d\| < \alpha \Rightarrow \|\hat{x}_{t+1}^d - \hat{x}_{k+1}^d\| < \beta \quad (3)$$

$$h : X \rightarrow Y$$

Krok 4. W kolejnym kroku obliczamy współczynnik DETM [Nowiński, 2007, s. 149] ze wzoru:

$$DETM = \frac{\overline{Z}}{(N-d+1)d}, \quad (4)$$

gdzie \overline{Z} oznacza moc zbioru:

$$Z = \left\{ (\hat{x}_t^d, \hat{x}_k^d) : \|\hat{x}_t^d - \hat{x}_k^d\| < \alpha \Rightarrow \|\hat{x}_{t+1}^d - \hat{x}_{k+1}^d\| < \beta \right\} \quad (5)$$

N jest liczbą obserwacji szeregu, zaś d jest wymiarem zanurzenia.

Wartość współczynnika DETM oblicza się dla różnych wartości wymiaru zanurzenia. Szereg czasowy jest szeregiem deterministycznym jeśli wraz ze wzrostem wartości wymiaru zanurzenia, wartość współczynnika DETM jest większa od zera. Dla procesów ściśle chaotycznych można ustalić dokładną zależność między wartością DETM a wymiarem zanurzenia, zaś dla dowolnych procesów deterministycznych jest to niemożliwe [Miśkiewicz-Nawrocka, 2012, s. 99].

1.2. Największy wykładnik Lapunowa

Wykładniki Lapunowa są miarą wrażliwości układu dynamicznego na zmianę warunków początkowych. Dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa λ_{\max} jest bardzo często uznawana za warunek konieczny i wystarczający, jeśli chodzi o obecność chaosu w układzie dynamicznym.

H. Kantz [1994], M.T. Rosenstein i inni badacze [1993] zaproponowali algorytm wyznaczania charakterystyki λ_{\max} :

Krok 1. Wyznaczyć zbiory Z_{t^*} , złożone z K najbliższych sąsiadów $\hat{x}_{t_j}^d$ wektorów opóźnień \hat{x}_t^d , spełniających warunek $|t - t_j| > t^*$, gdzie t^* jest ustaloną liczbą naturalną. Dodany warunek zwiększa prawdopodobieństwo, że znaleziony sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora \hat{x}_t^d .

Krok 2. Obliczyć:

$$r_n(t) = \frac{1}{K} \sum_{\hat{x}_{ij}^d \in Z_t} |x_{t+n} - x_{t_j+n}|, \quad t = 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, \dots, n_{\max} \quad (6)$$

gdzie: $M = N - (d - 1)\tau$, n_{\max} jest ustaloną liczbą naturalną, określającą liczbę iteracji.

Krok 3. Wyznaczyć średnią z $r_n(i)$ po wszystkich $d -$ historiach:

$$r_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M r_n(t) \quad (7)$$

Krok 4. Największy wykładnik Lapunowa jest współczynnikiem regresji:

$$\ln(r_n) = \ln(r_0) + \lambda_{\max} n \quad (8)$$

1.3. Lokalna aproksymacja wielomianowa

Wyznaczenie przyszłych wartości chaotycznych szeregów czasowych, opiera się na wspomnianym już twierdzeniu Takensa o zanurzeniu, z którego wynika, iż dla odpowiednio dużej wartości wymiaru d istnieje funkcja $F_T : R^d \rightarrow R$, spełniająca warunek [Jimenez i in., 1992]:

$$x_{N+T} = F_T(x_N, x_{N-\tau}, x_{N-2\tau}, \dots, x_{N-(d-1)\tau}) \quad (9)$$

W metodzie predykcji zwanej lokalną aproksymacją wielomianową, za funkcję F_T przyjmuje się najczęściej $d -$ wymiarową funkcję wielomianową stopnia pierwszego, tj.:

$$F_T(x_1, x_2, \dots, x_d) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_d x_d \quad (10)$$

W celu oszacowania parametrów α_i wielomianu (10) stosuje się klasyczną metodę najmniejszych kwadratów. Przeprowadza się ją na podstawie następujących par:

$$(\hat{x}_{t_i}^d, x_{t_i+T}), \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

gdzie $\hat{x}_{t_i}^d$ są najbliższymi sąsiadami wektora \hat{x}_N^d w sensie metryki euklidesowej.

W przypadku, gdy liczba najbliższych sąsiadów K jest mniejsza od liczby wszystkich dostępnych wektorów opóźnień, mamy do czynienia z lokalną aproksymacją. Jeśli zaś $K = N - (d - 1)\tau$, procedura aproksymacji wielomianem stopnia pierwszego sprowadza się do zastosowania regresji liniowej. Właściwy wybór liczby najbliższych sąsiadów ma, podobnie jak dobór parametrów rekonstrukcji przestrzeni stanów (d , τ), istotny wpływ na jakość prognozy. Najbardziej odpowiednia wartość K zależy m.in. od liczby dostępnych wektorów opóźnień, a także od przebiegu funkcji w otoczeniu prognozowanego stanu [Orzeszko, 2005].

Algorytm wyznaczania liczby najbliższych sąsiadów zaproponowany w 1994 r. przez L.A. Smitha [1994, s. 372] przebiega według następujących etapów [Orzeszko, 2005, s. 69]:

Krok 1. Wybrać K' najbliższych sąsiadów wektora \hat{x}_N^d , tak aby byli odpowiednio oddaleni w czasie od siebie i \hat{x}_N^d .

Krok 2. Dla każdego z wybranych punktów K' (dla różnych wartości K) zbudować osobne predykatory i obliczyć błędy prognoz *ex post*.

Krok 3. Następnie dla każdego K , oszacować oczekiwany błąd prognozy wektora \hat{x}_N^d jako sumę błędów prognoz otrzymanych dla rozważonych punktów.

Krok 4. Ostatecznie właściwym wyborem liczby najbliższych sąsiadów K jest wartość, dla której minimalizowany jest oczekiwany błąd prognozy.

Dodatkowo wyniki prognozowania lokalną aproksymacją wielomianową można wykorzystać do identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych [Casdagli, 1992; Orzeszko, 2005, s. 69]:

- szereg czasowy ma charakter chaotyczny, jeśli zastosowanie niewielkiej liczby najbliższych sąsiadów K , wykorzystanych do oszacowania współczynników lokalnego wielomianu aproksymującego, prowadzi do najdokładniejszych prognoz,
- szereg czasowy jest realizacją liniowego procesu autoregresyjnego, jeśli dla dużych wartości K uzyskuje się najmniejsze błędy,
- pośrednie wielkości parametru K sugerują potrzebę rozważenia pewnego nieliniowego modelu stochastycznego.

2. Przedmiot i przebieg badania

Przedmiotem analizy w niniejszym artykule są zarówno dane finansowe, jak i wygenerowany szereg chaotyczny. Rzeczywiste szeregi czasowe⁴ utworzono z cen zamknięcia wybranych indeksów giełd światowych, tj. CAC40 (CAC) – indeks na Giełdzie Paryskiej, FTSE250 (FTM) – indeks giełdy w Londynie, HANGSENG (HSI) – indeks na Giełdzie Papierów Wartościowych w Hongkongu, NIKKEI225 (NKX) – indeks na Tokijskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, S&P500 (SPX) – indeks giełdy w Nowym Jorku oraz WIG – indeks Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Dane rzeczywiste obejmują okres od 3.01.2000 r. do 26.08.2013 r. Długość analizowanych szeregów finansowych po-

⁴ Dane pochodzą z archiwum notowań Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie, dostępnych na stronie internetowej www.gpwinfostrefa.pl [www 1].

zwała na otrzymanie wiarygodnych rezultatów. Przeanalizowano obserwacje, które były dziennymi logarytmicznymi stopami zwrotu.

Dodatkowo badaniu poddano szereg chaotyczny, wygenerowany przez odwzorowanie logistyczne, który stanowił punkt odniesienia do interpretacji wyników otrzymanych dla danych ekonomicznych. Szereg ten składał się z 3 tys. obserwacji i został skonstruowany następująco:

- Logist – szereg wygenerowany przez odwzorowanie logistyczne:

$$f(x_t) \equiv x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t) \quad (12)$$

dla $x_0 = 0,7$.

Identyfikacja chaosu deterministycznego w badanych szeregach czasowych przebiegała według następujących kroków:

1. Rekonstrukcja przestrzeni stanów metodą opóźnień – utworzenie d -historii.
2. Identyfikacja chaosu deterministycznego:
 - oszacowanie największego wykładnika Lapunowa,
 - oszacowanie współczynnika DETM,
 - prognozowanie metodą lokalnej aproksymacji wielomianowej – ocena jakości wyznaczonych prognoz względnym błędem predykcji:

$$\sigma_T = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{N_2} \sum_{T=N_1+1}^{N_1+N_2} (x_T - \tilde{x}_T)^2} \cdot 100\% \quad (13)$$

gdzie: x_T jest rzeczywistą wartością badanej zmiennej w momencie T , \tilde{x}_T jest prognozą wartości zmiennej w momencie T , σ jest odchyleniem standardowym szeregu obserwacji, N_2 jest liczbą naturalną oznaczającą odległość okresu prognozowanego od okresu bieżącego ($N = N_1 + N_2$).

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły za pomocą metody opóźnień zrekonstruować przestrzeń stanów [Zeug-Żebro, 2002]. Stosując metodę opartą na analizie funkcji autokorelacji – ACF [Ramsey i in., 1990], oszacowano czas opóźnień τ , natomiast za pomocą metody najbliższego pozornego sąsiada – FNN [Abarbanel i in., 1992], obliczono wymiar zanurzenia d (tab. 1).

Następnie w celu identyfikacji chaosu deterministycznego w wybranych szeregach czasowych, w pierwszej kolejności oszacowano największy wykładnik Lapunowa. W badaniu posłużono się algorytmem H. Kantza i M.T. Rosensteina, jako liczbę sąsiadów przyjęto $K = 1$ oraz wartość $t^* = 10$. Następnie zastosowano regresję liniową do przybliżania linią prostą wykresu zależności wartości $\ln r_n$ od numeru iteracji n . W tabeli 1 przedstawiono wyniki szacowania największego wykładnika Lapunowa dla analizowanych szeregów czasowych⁵.

⁵ Obliczenia przeprowadzono w oparciu o program własny autora, napisany w języku programowania Delphi.

Tabela 1. Wartości parametrów rekonstrukcji przestrzeni stanów dla wybranych szeregów czasowych

Szereg	Opóźnienie czasowe	Wymiar zanurzenia	Wykładnik Lapunowa λ_{\max}
LOGIST	1	2	0,6931 ($R^2 = 1$)
CAC	20	8	0,0003 ($R^2 = 0,239$)
FTM	9	7	0,1231 ($R^2 = 0,369$)
HSI	2	6	0,0009 ($R^2 = 0,295$)
NKX	6	6	0,0018 ($R^2 = 0,363$)
SPX	4	6	0,0011 ($R^2 = 0,331$)
WIG	16	7	0,0029 ($R^2 = 0,349$)

Można zauważyć, iż prawie wszystkie objęte badaniem szeregi czasowe są wrażliwe na zmianę warunków początkowych ($\lambda_{\max} > 0$ i $R^2 > 0,3$). Jednakże niewielkie wartości największego wykładnika Lapunowa, oszacowanego dla szeregów finansowych mogą świadczyć jedynie o nieznacznym poziomie chaosu w tych systemach.

W kolejnym kroku badań oszacowano wartości współczynnika DETM. Procedurę obliczania tej miary przeprowadzono dla różnych wartości wymiaru zanurzenia $d = 2, 3, \dots, 10$. W obliczeniach przyjęto wartości parametrów $\alpha = \beta = 0,3\sigma$, gdzie σ jest odchyleniem standardowym analizowanego szeregu. W tabeli 2 przedstawiono wartości miary DETM, oszacowane dla wybranych szeregów czasowych.

Tabela 2. Współczynnik DETM dla finansowych szeregów czasowych

Szereg \ d	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LOGIST	0,49983	0,33322	0,24992	0,19993	0,16661	0,14262	0,11969	0,09173	0,05945
CAC	0,48237	0,27569	0,12242	0,03547	0,00689	0,00098	0	0	0
FTM	0,48544	0,26829	0,12751	0,04149	0,00845	0,00158	0,00033	0,00006	0,00001
HSI	0,48946	0,27669	0,13083	0,03163	0,00362	0,00029	0,00007	0	0
NKX	0,48837	0,28151	0,11388	0,01774	0,00199	0	0	0	0
SPX	0,48338	0,27705	0,13105	0,04610	0,00988	0,00079	0	0	0
WIG	0,48655	0,27407	0,11005	0,01773	0,00102	0,00008	0	0	0

Dla szeregów LOGIST i FTM współczynnik DETM przyjmuje wartości większe od zera przy zwiększonym wymiarze zanurzenia. Jest to cecha charakterystyczna układów deterministycznych. W przypadku pozostałych szeregów finansowych współczynnik ten uzyskuje wartości dodatnie tylko dla niskich wymiarów zanurzenia.

W celu wyznaczenia prognozy metodą lokalnej aproksymacji wielomianem pierwszego stopnia, przeprowadzono estymację parametrów α_i klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, w oparciu o K najbliższych sąsiadów punktu \hat{x}_M^d oraz odpowiednie wartości parametrów rekonstrukcji przestrzeni stanów (tab. 1). Aby znaleźć najbliższych sąsiadów posłużono się metryką euklidesową. W tabeli 3 przedstawiono zestawienie najmniejszych błędów predykcji i odpowiadające im wartości parametru K .

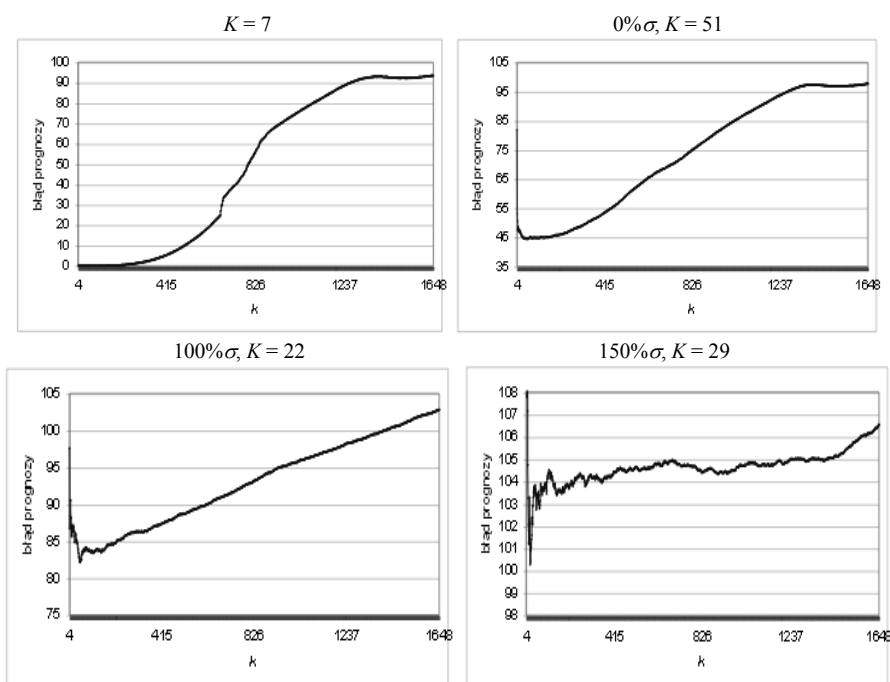
Tabela 3. Najmniejsze błędy prognozy i liczba najbliższych sąsiadów K dla analizowanych szeregów finansowych

Szereg	Wartość K	Błąd prognozy
CAC	132	0,68146
FTM	75	0,85033
HSI	17	0,71247
NKX	1000	1,27742
SPX	949	0,46499
WIG	46	0,82722

Następnie w celu weryfikacji hipotezy, że szereg czasowy ma charakter chaotyczny (tj. jeśli zastosowanie niewielkiej liczby najbliższych sąsiadów K , wykorzystanych do oszacowania współczynników lokalnego wielomianu aproksymującego, prowadzi do najdokładniejszych prognoz), pokazano wpływ dodawania szumu losowego do szeregu chaotycznego na przebieg wykresów, przedstawiających zależność błędu prognozy od liczby najbliższych sąsiadów. Na rysunku 1 zilustrowano opisaną zależność, dla szeregu wygenerowanego przez odwzorowanie logistyczne, po dodaniu do niego składnika losowego o odchyleniu standardowym równym: $50\%\sigma$, $100\%\sigma$, $150\%\sigma$, gdzie σ jest odchyleniem standardowym badanego szeregu pozbawionego szumu (reprezentowanego przez ciąg liczb pseudolosowych) [Orzeszko, 2005, s. 125].

Powyższe wykresy pokazują, że im większy poziom dodawanego szumu, tym otrzymane wyniki charakteryzują się większym błędem predykcji i większą wartością parametru K , dla którego prognoza była najdokładniejsza. Warto również zwrócić uwagę na zmianę kształtu wykresu w zależności od poziomu dodawanego szumu.

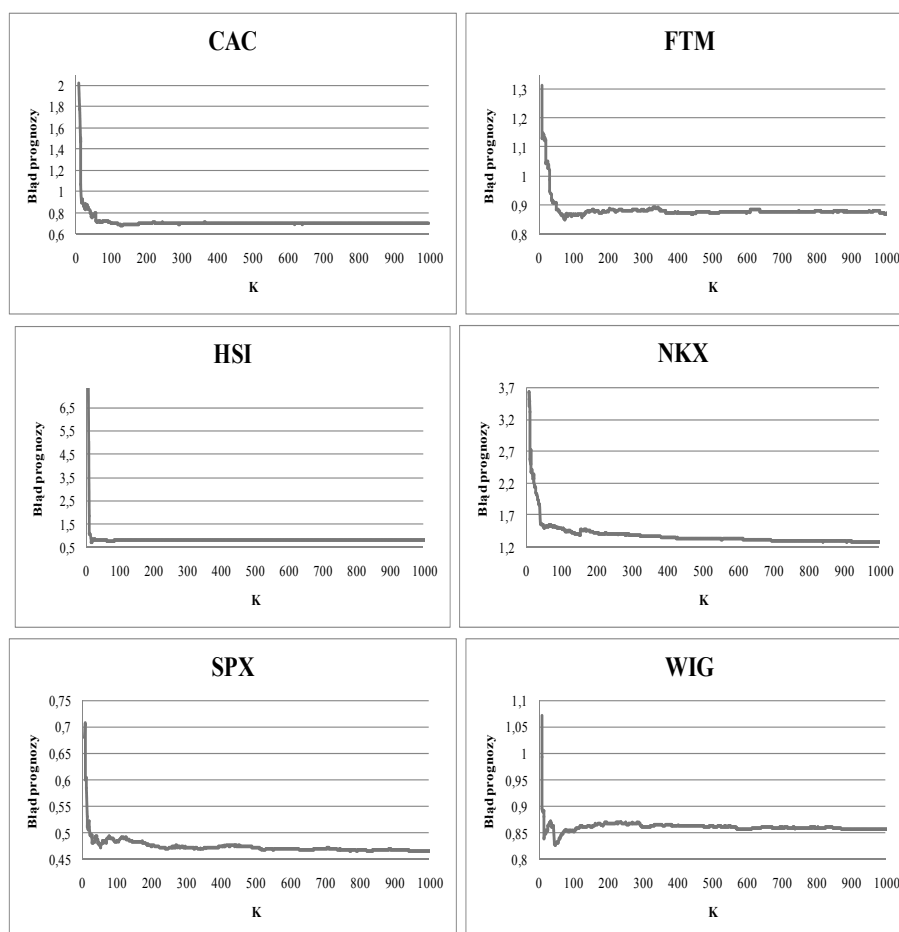
Wykresy na rys. 2 przedstawiają zależność błędu prognozy od wartości parametru K dla wybranych szeregów finansowych.



Rys. 1. Błędy prognoz wyznaczone w zależności od liczby najbliższych sąsiadów

Źródło: [Orzeszko, 2005, s. 126].

Wyniki badań dotyczące analizy zależności błędu prognozy od parametru K , pokazały wyraźną różnicę między wykresami otrzymanymi dla wybranych szeregów finansowych i szeregu chaotycznego. Liczba najbliższych sąsiadów, której odpowiada najmniejszy błąd predykcji sugeruje, iż badane szeregi finansowe (CAC, FTM, WIG) są realizacjami nieliniowych procesów stochastycznych. Wykresy otrzymane dla tych szeregów są podobne do wykresu szeregu chaotycznego z dodanym silnym szumem losowym. Wartości parametru K uzyskane dla szeregów NKX i SPX mogą świadczyć o tym, że są one realizacjami liniowych procesów autoregresyjnych.



Rys. 2. Błędy prognoz wyznaczone w zależności od liczby najbliższych sąsiadów wyznaczone dla analizowanych szeregów finansowych

Podsumowanie

W opracowaniu przeprowadzono identyfikację chaosu deterministycznego w wybranych finansowych szeregach czasowych, na podstawie lokalnej aproksymacji wielomianowej, największego wykładnika Lapunowa oraz współczynnika DETM. Wyniki badania empirycznego pokazały, że wraz ze wzrostem liczby najbliższych sąsiadów, błąd prognozy zaczyna się stabilizować. Niska wartość parametru K otrzymana dla HSI może wskazywać na istnienie w badanym szeregu chaosu deterministycznego. Niestety wynik ten nie został potwierdzony przez pozostałe miary. Pośrednie wartości parametru K otrzymane dla szeregów finansowych CAC i WIG, sugerują, że przebadane szeregi są realiza-

cjami pewnych nieliniowych modeli stochastycznych. Niskie wartości wykładnika λ_{\max} oraz wielkości współczynnika DETM, uzyskane dla tych szeregów wskazują na brak cech chaotycznych. Mimo że szeregi NKX i SPX wykazały wrażliwość na zmianę warunków początkowych, pozostałe metody nie potwierdziły ich chaotycznego charakteru. Jedynie w przypadku szeregu FTM dwie miary, tj. największy wykładnik Lapunowa i współczynnik DETM, wskazują na istnienie pewnych zależności deterministycznych. Podsumowując, należy stwierdzić, iż przeprowadzona identyfikacja chaosu na podstawie analizy błędów prognoz nie potwierdziła chaotycznego charakteru finansowych szeregów czasowych. Nie wyklucza ona jednak możliwości, że szeregi te są realizacjami chaosu deterministycznego z silnym szumem.

Literatura

- Abarbanel H.D., Brown R., Kennel M.B. (1992), *Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction*, "Physical Review A", Vol. 45(6), s. 3404-3411.
- Casdagli M. (1992), *Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-linear Modelling*, "Journal of the Royal Statistical Society B", Vol. 54, No. 2, s. 303-328.
- Jimenez J., Moreno J.A., Ruggeri G.J. (1992), *Forecasting on Chaotic Time Series: A Local Optimal Linear-reconstruction Method*, "Physical Review A", Vol. 45, No. 6, s. 3553-3558.
- Kantz H. (1994), *A Robust Method to Estimate the aximal Lyapunov Exponent of a Time Series*, "Physical Letters A", Vol. 185(1), s. 77-87.
- Miśkiewicz-Nawrocka M. (2012), *Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.
- Nowiński M. (2007), *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Orzeszko W. (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Ramsey J.B., Sayers C.L., Rothman P. (1990), *The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets: Some Economic Applications*, "International Economic Review", Vol. 31, No. 4, s. 991-1020.
- Rosenstein M.T., Collins J.J., Luca C.J. de (1993), *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*, "Physica D", Vol. 65, s. 117-134.
- Smith L.A. (1994), *Local Optimal Prediction; Exploiting Strangeness and the Variation of Sensivity to Initial Condition*, "Philosophical Transactions of the Royal Society o London A", Vol. 348, s. 371-381.

- Takens F. (1981), *Detecting Strange Attractors in Turbulence* [w:] D.A. Rand, L.S. Young (eds.), *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, s. 366-381.
- Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Zeug-Żebro K.. (2012), *Wpływ doboru metod wyznaczania parametrów rekonstrukcji przestrzeni stanów układu dynamicznego na dokładność prognoz*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, nr 898, s. 41-54.
- [www 1] www.gpwinfostrefa.pl (dostęp: 26.08.2013).

THE IDENTIFICATION OF DETERMINISTIC CHAOS BASED ON THE NUMBER OF NEAREST NEIGHBORS

Summary: Methods of chaos identification typically allow detection of only a single attribute of the chaotic dynamics, such as e.g. a sensitivity to change of the initial conditions, therefore, to carry out a full analysis of the data requires consideration of the complementary methods. The aim of the article will be identification of chaotic dynamics in selected time series based on a local polynomial approximation, the largest Lyapunov exponent and the coefficient DETM. The test will be conducted based on the financial time series, which consist of closing prices of selected indices of stock exchanges worldwide.

Keywords: deterministic chaos, time series, local polynomial approximation, largest Lyapunov exponent, coefficient DETM.