



Maria Forlicz

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny
Katedra Metod Ilościowych w Ekonomii
mariaforlicz@ue.wroc.pl

MODEL DWUCZYNNIKOWY WYBORU W CZASIE

Streszczenie: Podstawę normatywnej teorii wyboru w czasie stanowi model zdyskontowanej użyteczności zaproponowany przez Paula Samuelsona w 1937 r. Już od chwili jego stworzenia wielu zdawało sobie jednak sprawę, że rzeczywiste zachowania ludzi kształtują się nieco inaczej, niż on zakłada. Wielokrotnie podważano istnienie stałości preferencji w czasie, czy założenie o równej rocznej stopie dyskonta dla wszystkich kwot i odroczeń. Jako modele deskryptywne proponowano model hiperboliczny, quasi-hyperboliczny, arytmetyczny, czy na przykład subaddytywny. Niestety żaden z nich nie okazał się w pełni odpowiedni. W związku z tym w prezentowanym artykule został zaproponowany inny, łatwy do oszacowania, model. W celu jego weryfikacji przeprowadzono ankietę, na podstawie których oszacowano parametry modelu oraz oceniono jego dopasowanie dla poszczególnych osób.

Słowa kluczowe: subiektywne stopy dyskonta, wartość pieniądza w czasie, wybór międzyokresowy.

JEL Classification: C58, D90, G02.

Wprowadzenie

Konsumpcja (posiadanie, użytkowanie) każdego dobra przynosi pewną użyteczność. Jednakże zgodnie z I prawem Gossena (prawem malejącej użyteczności krańcowej), w przypadku zdecydowanej większości sytuacji, użyteczność konsumowanego dobra rośnie wraz z jego ilością, ale użyteczność krańcowa każdej kolejnej jednostki maleje [Forlicz, Jasiński, 2009]. Odzwierciedlająca ten fakt funkcja użyteczności jest funkcją rosnącą, wklęsłą. Każda jednostka dąży do maksymalizacji użyteczności. Ta użyteczność może być jednak różna w zależności od tego, kiedy dane dobro mamy spożytkować. Istnieje możliwość

wyrzeczenia się użyteczności wynikającej z bieżącej konsumpcji danego dobra na rzecz użyteczności płynącej z przyszłej konsumpcji tego dobra. Dzieje się tak oczywiście wtedy, kiedy użyteczność z przyszłej konsumpcji przewyższa użyteczność bieżącej. Zazwyczaj użyteczność z przyszłej konsumpcji dobra przewyższa użyteczność jego konsumpcji w danym momencie, gdy ilość tego dobra skonsumowana w przyszłości będzie większa niż w chwili obecnej (choć możliwe są także inne powody wzrostu użyteczności dobra). Stopa dyskonta jest miernikiem tego, ile jednostek danego dobra musimy skonsumować w przyszłości, by zrezygnować z jego bieżącej konsumpcji. Dyskonto w tym ujęciu określa więc preferencje co do rozkładu konsumpcji w czasie.

Subiektywną stopę dyskonta można więc zdefiniować jako miarę odczuwanej indywidualnie (przez pojedynczego człowieka) stopy substytucji pomiędzy obecną a przyszłą konsumpcją, na podstawie której jednostki porównują przyszłe i obecne wartości. Subiektywna stopa dyskonta jest uznawana za miarę indywidualnych preferencji wyboru w czasie. Jest to miara indywidualnych preferencji, dlatego pojawia się problem różnego postrzegania wartości pieniądza w czasie przez poszczególne podmioty rynkowe i w związku z tym istnieje potrzeba stworzenia modelu, który dobrze opisywałby kształtowanie się tych preferencji. Celem niniejszego artykułu jest właśnie skonstruowanie modelu bardziej dopasowanego do rzeczywistości niż modele dotychczas stosowane.

Sprawdzeniu zostaną poddane następujące hipotezy:

H1: Zaproponowany model, ze względu na dobre dopasowanie, nadaje się do opisu zachowań związanych z wyborem w czasie.

H2: Dopasowanie modelu jest lepsze niż w przypadku modeli stosowanych dotychczas.

1. Przegląd literatury

Model mogący posłużyć za teorię preferencji w czasie zdefiniował w 1937 r. Samuelson [1937], nazywając go modelem zdyskontowanej użyteczności. Zgodnie z nim jednostki dążą do maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności, czyli sumy użyteczności płynącej z konsumpcji obecnej oraz z zdyskontowanych użyteczności płynących z przyszłej konsumpcji. Według Samuelsona międzyokresowa funkcja użyteczności, przy założeniach podanych poniżej, wygląda następująco:

$$U(x) = \lambda \int C e^{(\pi-r)\bar{q}(x)} dx ,$$

gdzie:

x – dochód,

$U(x)$ – użyteczność dochodu x ,

λ – mnożnik Lagrange'a, stała zależąca od początkowej kwoty posiadanych pieniędzy i rzeczywistej jednostki, w której jest wyrażana użyteczność,

C – granice całkowania,

e – liczba Eulera,

π – wartość powiązana w sposób następujący ze stopą dyskonta p : $\pi = \log e(1 + p)$,

p – stopa dyskonta,

r – stopa zwrotu z niewykorzystanych środków pochodzących z początkowej sumy posiadanych pieniędzy,

$\bar{q}(x) = t$ – funkcja odwrotna do funkcji $\bar{f}(t) = x$,

t – zmienna oznaczająca czas.

Poza założeniem o tym, że jednostki dążą do maksymalizacji funkcji użyteczności, Samuelson podaje jeszcze trzy inne:

- użyteczność i użyteczność krańcowa są zmiennymi mierzalnymi. Przy danym zestawie cen zmienność dochodu zdefiniuje ścieżkę, według której można obliczyć krańcową użyteczność dochodów pieniężnych,
- jednostka dyskontuje przyszłe użyteczności w pewien prosty, regularny sposób, który jest znany; stopa dyskonta przyszłych użyteczności jest stała w czasie i większa od zera (co oznacza, że mając do wyboru skosztować coś dziś albo poczekać do jutra, wybieramy konsumpcję natychmiastową; zachowanie takie jest nazywane *positive time preference*),
- w momencie początkowym jednostka ma do dyspozycji pewną sumę, z której może dowolnie korzystać, jej niewydana część jest oprocentowana według pewnej stopy r .

Z przedstawionego modelu wynika, po pierwsze, o czym wspomniano już wcześniej, że użyteczność strumienia dochodu jest sumą zdyskontowanych chwilowych użyteczności, po drugie, dyskontowanie odbywa się w sposób wykładniczy, a wartość współczynnika dyskonta zmienia się jedynie w zależności od czasu przez jaki dyskontujemy, a nie ma na niego wpływu moment, na który dyskontujemy, co zostało nazwane dynamiczną spójnością (*dynamic consistency*). W związku z tym funkcja dyskontująca $D(t)$ ma taką własność, że $\frac{D(t+1)}{D(t)} = \text{const}$ dla każdego t .

Już sam Samuelson zauważył, że jego model ma pewne mankamenty. Podkreślał między innymi fakt, że jednostka może nie czerpać użyteczności jedynie z chwilowej satysfakcji z konsumpcji dochodu w danym momencie, ale także

z poziomu zmian konsumpcji w czasie. Zastrzegł też, że model nie uwzględnia tego, że w świecie istnieje element niepewności. Zdawał sobie również sprawę z tego, że niekoniecznie preferencje muszą być niezmiennie w czasie, a jednostki muszą rozplanowywać wydatki na cały okres, dla którego wyznacza się zdyskontowaną użyteczność.

Kiedy pod koniec lat 70. XX w. rozwinęły się, jako gałęzie nauki, psychologia ekonomiczna oraz, nieco później, ekonomia eksperymentalna, naukowcy zajmujący się tymi dziedzinami zaczęli empirycznie wykazywać istnienie w ludzkim zachowaniu wielu różnych odstępstw od teorii zdyskontowanej użyteczności. Wskazywano na powszechne występowanie efektu skali, efektu opóźnienia, efektu malejącej niecierpliwości, czy efektu znaku.

Zanim jednak zaczęto wykazywać występowanie w zachowaniach ludzi odstępstw od teorii zdyskontowanej użyteczności za pomocą badań ankietowych i eksperymentalnych, z modelem zaproponowanym przez Samuelsona nie zgodził się R.H. Strotz [1955]. Według niego, nawet jeśli w danym momencie jednostka wybiera optymalny plan konsumpcji w czasie (czyli maksymalizujący jego użyteczność), to nie zawsze się go trzyma; pojawia się więc niespójność (*inconsistency*) pomiędzy planem a jego wykonaniem. Zaproponował w związku z tym funkcję dyskontującą, która przeszacowuje bliższe korzyści (przyjemności) w stosunku do tych bardziej oddalonych w czasie, twierdząc, że z taką właśnie tendencją do dyskontowania się rodzimy, choć później w procesie wychowania uczymy się, że powinniśmy postępować w inny sposób. Wyuczone postępowanie nie zmienia jednak gustów człowieka i stąd czasami pojawiają się w jego zachowaniu niespójności.

Popierając po części hipotezy Strotza, Phelps i Pollak [1968] wprowadzili model quasi-hyperbolicznego dyskontowania (stworzony jako model międzypokoleniowego altruizmu):

$$U = u(C_0) + \alpha \delta u(C_1) + \alpha^2 \delta u(C_2) + \dots, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \delta < 1,$$

gdzie:

U – użyteczność planu konsumpcji,

C_0 – konsumpcja obecnego pokolenia,

C_i – konsumpcja i -tego następnego pokolenia,

$u(C_i)$ – użyteczność konsumpcji w i -tym pokoleniu,

α – odzwierciedla preferencje w czasie, czy też krótkowzroczność,

δ – miara stopnia, w jakim obecne pokolenie ceni konsumpcję innych ludzi w stosunku do swojej samej; dodatkowy parametr reprezentujący przewagę subiektywnej różnicy pomiędzy okresem zerowym a pierwszym nad różnicą pomiędzy momentem pierwszym a drugim.

Równoległe w pracach naukowych pojawiły się sugestie, że subiektywne dyskontowanie odbywa się w sposób hiperboliczny. Skłaniając się ku tej tezie, Loewenstein i Prelec [1992] zaproponowali¹ uogólnioną postać hiperbolicznej funkcji dyskontującej $(1 + \alpha t)^{-\beta/\alpha}$ dla pewnych α i $\beta > 0$, gdzie α to współczynnik określający jak bardzo dyskontowanie odbiega od stałego (wykładniczego) dyskontowania. W skrajnym przypadku, gdy α zmierza do zera, funkcja ta przybiera formę wykładniczą $e^{-\beta t}$ (w postaci ciągłej).

Według zwolenników dyskontowania hiperbolicznego, taka postać subiektywnej funkcji dyskontującej może być odpowiedzialna zarówno za efekt opóźnienia, jak i efekt malejącej niecierpliwości. Subiektywna funkcja dyskontująca w postaci hiperbolicznej dyskontuje bowiem silniej niż funkcja wykładnicza zdarzenia mniej odległe w czasie, a słabiej zdarzenia bardziej odległe w czasie, ponadto funkcja ta nie spełnia warunku $\frac{D(t+1)}{D(t)} = const$, więc jej stosowanie może prowadzić do odwrócenia preferencji.

Doyle i Chen [2010] do porównywanych zazwyczaj modeli dyskontowania dodają model arytmetyczny postaci:

$$PV = FV - n \cdot r$$

Model ten zakłada, że ludzie, porównując dwie opcje oddalone od siebie w czasie, naturalnie zaczynają wyliczać różnice (kwotowe) między nimi i kalkulować ile jednostek pieniężnych na jednostkę czasu to daje (na przykład ile złotych na dzień zarobię, czekając przez 7 dni).

2. Model wyboru w czasie uwzględniający dodatkowe zmienne

2.1. Założenia leżące u podstaw konstrukcji modelu

W niniejszym artykule przedstawiono kilka wybranych modeli mających opisywać zachowanie ludzi podejmujących decyzje dotyczące wartości pieniądza w czasie. Każdy z nich ma swoje zalety i niestety wady. W większości przypadków starano się badać tylko wpływ czasu na stopy dyskonta, pomijając wpływ wysokości dyskontowanej kwoty. Proponowany w tej pracy model dyskontowania uwzględnia również tę możliwość. Jest on skonstruowany tak, by mieć jak najprostszą formę.

¹ Autorzy podają, że uogólniona postać hiperbolicznej funkcji dyskontującej została zdefiniowana przez Harveya [1986], a jej aksjomatyczne wyprowadzenie podał Prelec [1989].

Konstruowany model powinien odzwierciedlać różniące się trochę założenia dotyczące dyskontowania wpływów i wypływów pieniądza.

Założenia przyjęte odnośnie do dyskontowania wpływów pieniężnych są następujące:

- model powinien odzwierciedlać występowanie efektu skali. Każde zwiększenie wartości dyskontowanej musi skutkować tym, że model oszacuje wystąpienie coraz większego co do kwoty, ale coraz mniejszego procentowo dyskonta;
- model musi odwoływać się także do efektu opóźnienia. Każde zwiększenie o jednostkę długości okresu dyskontowania powinno pociągać za sobą wynik w postaci zwiększenia kwoty i całkowitej stopy dyskonta, ale równocześnie zmniejszenia procentowej wartości dyskonta w przeliczeniu na jednostkę czasu;
- postać modelu powinna także odzwierciedlać zachowania świadczące o zannualizowanych stopach dyskonta malejących wraz z wydłużaniem się okresu dyskontowania.

Założenia przyjęte odnośnie do dyskontowania wypływów pieniężnych to:

- każde zwiększenie wartości dyskontowanej powinno wiązać się ze zwiększeniem się procentowo wyrażonego dyskonta;
- na stopy dyskonta ma wpływ przesunięcie opcji w czasie, jednak należy rozważyć możliwy wzrost lub spadek stóp dyskonta wraz z odsuwaniem opcji w czasie;
- wraz z wydłużaniem okresu dyskontowania spadają subiektywne stopy dyskonta.

Na podstawie powyższych założeń powstały propozycje dwóch modeli²:

$$FV - PV = (\kappa FV)^\alpha \cdot [\ln(t_2 - t_1 + e - 1)]^\gamma \cdot e^{-\delta \ln(t_1 + e)}, \quad (1)$$

gdzie:

FV – wartość przyszła przepływu pieniężnego,

PV – wartość obecna przepływu pieniężnego,

$FV - PV$ – wartość dyskonta,

t_1 – moment, na który jest dyskontowana wartość przyszła [liczba dni od momentu obecnego do dnia, w którym jest możliwy wcześniejszy z przepływów pieniężnych],

t_2 – moment, z którego jest dyskontowana wartość przyszła [liczba dni od momentu obecnego do dnia, w którym jest możliwy późniejszy z przepływów pieniężnych],

$\alpha, \kappa, \gamma, \delta$ – parametry,

e – liczba Eulera.

² Model pierwszy można oczywiście przekształcić do prostszej formy $FV - PV = (\kappa FV)^\alpha \cdot [\ln(t_2 - t_1 + e - 1)]^\gamma \cdot (t_1 + e) \cdot e^{-\delta}$, natomiast zdecydowano się pozostawić ostatni element w podanej wcześniej postaci, by nawiązywał on swoją formą do dyskontowania wykładniczego, jedynie z wprowadzonym logarytmicznym postrzeganiem czasu.

$$FV - PV = FV^\alpha \cdot (t_2 - t_1)^\gamma \cdot e^{-\delta t_1}, \quad (2)$$

gdzie:

FV – wartość przyszła przepływu pieniężnego,

PV – wartość obecna przepływu pieniężnego,

$FV - PV$ – wartość dyskonta,

t_1 – moment, na który jest dyskontowana wartość przyszła [liczba lat od momentu obecnego do dnia, w którym jest możliwy wcześniejszy z przepływów pieniężnych],

t_2 – moment, z którego jest dyskontowana wartość przyszła [liczba lat od momentu obecnego do dnia, w którym jest możliwy późniejszy z przepływów pieniężnych],

α, γ, δ – parametry,

e – liczba Eulera.

W każdym z tych modeli wartość parametru α wskazuje, jaki wpływ ma wielkość dyskontowanej kwoty na procent dyskonta. Wartości $\alpha = 1$ świadczyłyby o braku wpływu dyskontowanej kwoty na stopę dyskonta, $\alpha = 0$ oznaczałoby brak wpływu wielkości dyskontowanej kwoty na kwotę dyskonta, wartości $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ wskazywałyby na stopy dyskonta malejące wraz ze zwiększaniem się dyskontowanej kwoty, a $\alpha > 1$ oznaczałoby, że procentowa wartość dyskonta rośnie wraz ze zwiększaniem się dyskontowanej kwoty. Podobnie można interpretować wartość parametru γ . $\gamma = 0$ oznaczałoby brak wpływu długości okresu dyskontowania na wartość dyskonta, przyjęcie przez γ wartości z przedziału $(0,1)$ świadczyłoby o malejącej wrażliwości na wydłużanie okresu dyskontowania, parametr przyjąłby wartość 1 dla osób o stałej wrażliwości na wydłużanie się okresu dyskontowania, a $\gamma > 1$ świadczyłoby o rosnącej wrażliwości dyskonta na zwiększanie czasu dyskontowania. Wartości parametru δ świadczą o tym, czy jednoczesne odsunięcie w czasie wcześniejszego i późniejszego przepływu ma wpływ na wartość dyskonta. Jeżeli $\delta = 0$, to brak jest takiego wpływu, $\delta > 0$ świadczy o malejącej niecierpliwości, a $\delta < 0$ o niecierpliwości rosnącej wraz z odsuwaniem w czasie obydwu opcji.

2.2. Weryfikacja modelu

W celu weryfikacji poprawności zaproponowanych modeli przeprowadzono wywiady z 10 osobami. Na podstawie wywiadu starano się określić stopy dyskonta badanego w 60 różnych warunkach (patrz tabela 1). Połowa warunków dotyczyła wpływów pieniężnych, a zadawane wtedy pytania miały następującą formę:

„Wyobraź sobie, że wykonałeś pewną pracę dla instytucji państwowej, za którą masz otrzymać zapłatę. Możesz wybrać, czy chcesz otrzymać 10 000 zł za rok i jeden miesiąc, czy 9 900 zł za miesiąc. Co byś wolał?”

Czynniki, którymi manipulowano to dyskontowana kwota (FV), długość okresu dyskontowania (różnica czasu pomiędzy późniejszą a wcześniejszą wypłatą – $[t_2 - t_1]$), opóźnienie, czyli moment wcześniejszej wypłaty (t_1).

Druą połowa warunków dyskontowania była związana z wpływami pieniężnymi. Tu pytania miały następującą formę:

„Wyobraź sobie, że musisz zapłacić karę za pewne wykroczenie, którego się dopuściłeś. Możesz wybrać, czy wolisz zapłacić 10 000 zł kary za rok i jeden miesiąc, czy 9 900 zł za miesiąc. Co byś wolał?”

Również tutaj manipulowano tymi samymi czynnikami: dyskontowaną kwotą (FV), długością okresu dyskontowania oraz opóźnieniem.

W celu ustalenia stopy dyskonta w danych warunkach zadawano ankietowanemu wiele pytań, w których zmieniano wartość wcześniejszej kwoty i sprawdzano pomiędzy jakimi dwoma kwotami nastąpi zmiana preferencji co do momentu otrzymania zapłaty/dokonania wpłaty. Zdarzało się czasami, że ustalenie punktu zmiany preferencji zabierało dużo czasu. Jeśli z daną osobą powtarzało się to przy wielu warunkach, czas trwania wywiadu bardzo się wydłużał. Wtedy z konieczności robiono przerwę. Z kilkoma osobami wywiad był przeprowadzany przez dwa dni. Bywało, że osoba badana mówiła, że „cyferki jej się już w głowie mieszają” i wtedy przerywano procedurę, uznając, że lepszy jest kojarzący fakty ankietowany, który odpowiada na część pytań dzień później, niż taki, który odpowiada byle odpowiedzieć. Zawsze kolejnego dnia pytano, czy badany nie słyszał o jakichś ważnych wydarzeniach ze świata finansów lub czy jego sytuacja finansowa nie uległa nagle istotnej zmianie. Po upewnieniu się, że raczej nic nie wpłynęło na subiektywne stopy dyskonta ankietowanego przystępowano do zadawania kolejnych pytań.

Tabela 1. Wartości manipulowanych czynników dla wszystkich 60 analizowanych warunków

Wyszczególnienie	Wartości manipulowanych czynników			
	warunek	długość okresu dyskontowania	kwota	przesunięcie
1	2	3	4	5
1	1 dzień	10 000 zł	0	wpływ
2	1 tydzień	10 000 zł	0	wpływ
3	1 miesiąc	10 000 zł	0	wpływ
4	2 miesiące	10 000 zł	0	wpływ
5	pół roku	10 000 zł	0	wpływ
6	rok	10 000 zł	0	wpływ

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5
7	2 lata	10 000 zł	0	wpływ
8	5 lat	10 000 zł	0	wpływ
9	10 lat	10 000 zł	0	wpływ
10	20 lat	10 000 zł	0	wpływ
11	rok	100 zł	0	wpływ
12	rok	1 000 zł	0	wpływ
13	rok	2 000 zł	0	wpływ
14	rok	3 000 zł	0	wpływ
15	rok	5 000 zł	0	wpływ
16	rok	10 010 zł	0	wpływ
17	rok	20 000 zł	0	wpływ
18	rok	30 000 zł	0	wpływ
19	rok	50 000 zł	0	wpływ
20	rok	100 000 zł	0	wpływ
21	rok	10 000 zł	1 dzień	wpływ
22	rok	10 000 zł	1 tydzień	wpływ
23	rok	10 000 zł	1 miesiąc	wpływ
24	rok	10 000 zł	2 miesiące	wpływ
25	rok	10 000 zł	pół roku	wpływ
26	rok	10 000 zł	rok	wpływ
27	rok	10 000 zł	2 lata	wpływ
28	rok	10 000 zł	5 lat	wpływ
29	rok	10 000 zł	10 lat	wpływ
30	rok	10 000 zł	20 lat	wpływ
31	1 dzień	10 000 zł	0	wypływ
32	1 tydzień	10 000 zł	0	wypływ
33	1 miesiąc	10 000 zł	0	wypływ
34	2 miesiące	10 000 zł	0	wypływ
35	pół roku	10 000 zł	0	wypływ
36	rok	10 000 zł	0	wypływ
37	2 lata	10 000 zł	0	wypływ
38	5 lat	10 000 zł	0	wypływ
39	10 lat	10 000 zł	0	wypływ
40	20 lat	10 000 zł	0	wypływ
41	rok	100 zł	0	wypływ
42	rok	1 000 zł	0	wypływ
43	rok	2 000 zł	0	wypływ
44	rok	3 000 zł	0	wypływ
45	rok	5 000 zł	0	wypływ
46	rok	10 010 zł	0	wypływ
47	rok	20 000 zł	0	wypływ
48	rok	30 000 zł	0	wypływ
49	rok	50 000 zł	0	wypływ
50	rok	100 000 zł	0	wypływ
51	rok	10 000 zł	1 dzień	wypływ
52	rok	10 000 zł	1 tydzień	wypływ
53	rok	10 000 zł	1 miesiąc	wypływ
54	rok	10 000 zł	2 miesiące	wypływ

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5
55	rok	10 000 zł	pół roku	wypływ
56	rok	10 000 zł	rok	wypływ
57	rok	10 000 zł	2 lata	wypływ
58	rok	10 000 zł	5 lat	wypływ
59	rok	10 000 zł	10 lat	wypływ
60	rok	10 000 zł	20 lat	wypływ

Źródło: Opracowanie własne.

Jak już wspomniano, wywiady przeprowadzono łącznie z 10 osobami. Każda z osób została poinformowana, że jej odpowiedzi są bardzo ważne i powinna nad każdym pytaniem poważnie się zastanowić, zanim udzieli odpowiedzi. Badanym powiedziano także, że nie ma złych odpowiedzi na stawiane pytania i nikt nie będzie ich osądzał jako mniej lub bardziej mądrych ze względu na ich preferencje. Osoby niestety nie zostały dobrane do badania losowo, gdyż stanowiłoby to duży problem. Postanowiono w miarę możliwości tak dobrać ankietowanych (spośród mieszkańców Wrocławia), żeby były to osoby w różnym wieku, z różnym wykształceniem i pracujące w różnych zawodach, a zarazem, żeby były to osoby o poziomie inteligencji pozwalającym sądzić, że są one w stanie uzmysłowić sobie swoje preferencje. Ponadto zdecydowano się przeprowadzać wywiady jedynie wśród osób, które finansowo nie żyją z dnia na dzień, które wiedzą (niekoniecznie z własnych doświadczeń), czym jest oszczędzanie i czym jest spłacanie kredytu. Chodziło bowiem o to, by badani byli w stanie wyobrazić sobie przedstawione w pytaniach sytuacje.

Autorka zdaje sobie sprawę, że grupa osób, którą ankietowano, nie była duża, natomiast należałoby podkreślić, że po pierwsze, modele szacowano dla każdego z osobna na podstawie 30 odpowiedzi po stronie wpływów i 30 po stronie wypływów, po drugie, nie chodziło tutaj o oszacowanie konkretnych wartości parametrów dla całej populacji (ponieważ ze względu na subiektywizm dyskontowania są one zapewne różne dla różnych osób), a jedynie o weryfikację postaci modelu, która powinna odzwierciedlać zachowania zdecydowanej większości ludzi.

Na podstawie odpowiedzi ankietowanych przeprowadzono estymację parametrów modeli (1) i (2) po stronie wpływów i wypływów pieniężnych oraz obliczono wartości skorygowanych współczynników determinacji dla każdego z ankietowanych z osobna. Dokonano tego na dwa sposoby. Pierwszy z nich polegał na transformacji liniowej modelu, a następnie oszacowaniu parametrów klasyczną metodą najmniejszych kwadratów bez nakładania ograniczeń na wartość parametrów modelu przy zastosowaniu programu MS Excel. Drugim sposobem było zastosowanie do oszacowania modelu nieliniowej metody najmniej-

szych kwadratów. Użyto do tego pakietu NLS w programie Gretl³. Wyniki tych oszacowań dla modelu (1) zawierają tabele 2 i 3, a dla modelu (2) tabele 4 i 5.

Tabela 2. Oszacowania parametrów modelu (1) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów				
	kappa	alfa	gamma	delta	skorygowany R ²
Osoba 1	7,36E-09***	0,333133***	5,012259***	-0,06466	0,899174
Osoba 2	0,000109***	0,922477***	4,386011***	-0,01464	0,963699
Osoba 3	0,0000069***	0,699195***	4,54136***	-0,0694	0,908772
Osoba 4	0,000002***	0,772423***	4,919257***	-0,209324***	0,923703
Osoba 5	0,003116***	0,792421***	2,83421***	0,204333***	0,846122
Osoba 6	0,000014***	1,092825***	4,686009***	0,051727*	0,973619
Osoba 7	0,000013***	0,949121***	4,656657***	0,057664	0,921365
Osoba 8	0,000031***	2,535921***	5,430164***	0,631557***	0,590414
Osoba 9	0,000100***	0,959***	3,361914***	-0,01845	0,910716
Osoba 10	0,045787	0,378814***	2,004289***	0,031378	0,426674

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,
 ** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,
 *** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Tabela 3. Oszacowania parametrów modelu (1) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów				
	kappa	alfa	gamma	delta	skorygowany R ²
Osoba 1	2,35E-39**	0,432419	13,60075***	-0,86243	0,287667
Osoba 2	0,028519	0,154648	1,01583**	0,266201***	0,349903
Osoba 3	0,003031***	0,771718***	2,237547***	-0,04992	0,873827
Osoba 4	0,000004***	0,707821***	5,021529***	-0,10912***	0,961289
Osoba 5	0,001429***	1,305147***	2,89171***	0,182478***	0,975679
Osoba 6	0,000153***	1,060138***	3,24304***	-0,01896	0,896696
Osoba 7	0,002135***	0,736227***	2,494052***	0,032043	0,814441
Osoba 8	zawsze stopa dyskonta równa 0%				
Osoba 9	0,0000126***	1,144384***	4,834486***	-0,00778	0,979645
Osoba 10	zawsze stopa dyskonta równa 0%				

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,
 ** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,
 *** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

³ Program wymaga podania postaci analitycznej modelu oraz pochodnych cząstkowych względem parametrów. Następnie przy zastosowaniu jednego z wariantów algorytmu Levenberga–Marquardta drogą iteracji program szacuje wartość parametrów oraz podaje ich istotność (przy czym średnie błędy szacunku są kalkulowane z poprawką uwzględniającą stopnie swobody).

Tabela 4. Oszacowania parametrów modelu (2) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów			
	alfa	gamma	delta	skorygowany R ²
Osoba 1	0,6170274***	1,28338***	-0,04116	0,9523268
Osoba 2	0,8383691***	1,032304***	-0,01581	0,9546976
Osoba 3	0,6694420***	1,108921***	-0,03664	0,986488
Osoba 4	0,6363395***	1,233837***	-0,10627***	0,9455106
Osoba 5	0,7977964***	0,69906***	0,14446***	0,9591338
Osoba 6	0,6436791***	1,157165***	0,007331	0,9522345
Osoba 7	0,6489468***	1,120841***	-0,00826	0,9457456
Osoba 8	0,6183753***	1,343934***	0,569188***	0,7069379
Osoba 9	0,6388629***	0,875585***	-0,02018	0,9564802
Osoba 10	0,6311190***	0,59216***	0,038723	0,942023

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Tabela 5. Oszacowania parametrów modelu (2) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów			
	alfa	gamma	delta	skorygowany R ²
Osoba 1	-0,97618***	3,740157***	-0,32067	0,592311
Osoba 2	0,229326***	0,255508**	0,094793*	0,747268
Osoba 3	0,714021***	0,549395***	-0,05845**	0,958139
Osoba 4	0,728746***	1,234469***	-0,05978**	0,954468
Osoba 5	0,886122***	0,675116***	0,088856***	0,956032
Osoba 6	0,667289***	0,836209***	-0,00349	0,951367
Osoba 7	0,708501***	0,655727***	-0,00296	0,958056
Osoba 8	zawsze stopa dyskonta równa 0%			
Osoba 9	0,655222***	1,193393***	-0,02344	0,950793
Osoba 10	zawsze stopa dyskonta równa 0%			

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

W modelu (1) przy szacowaniu parametrów zarówno dla wpływów, jak i wpływów pieniężnych dla większości osób parametr δ okazał się nieistotnie różny od 0, w związku z czym postanowiono usunąć go z modelu, co doprowadziło do powstania modelu:

$$FV - PV = (\kappa FV)^\alpha \cdot [\ln(t_2 - t_1 + e - 1)]^\gamma \quad (3)$$

Oszacowanie parametrów tego modelu zawierają tabele 6 i 7.

Tabela 6. Oszacowania parametrów modelu (3) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów			
	kappa	alfa	gamma	skorygowany R ²
Osoba 1	0,0000000124***	0,344786***	5,067305***	0,897017
Osoba 2	0,000111***	0,925115***	4,398472***	0,964715
Osoba 3	0,000008***	0,711703***	4,600446***	0,904899
Osoba 4	0,00000288***	0,810149***	5,097468***	0,874906
Osoba 5	0,002779***	0,755595***	2,660248***	0,739524
Osoba 6	0,0000135***	1,083504***	4,641971***	0,971103
Osoba 7	0,0000115***	0,938728***	4,607563***	0,919753
Osoba 8	0,0000227***	2,422097***	4,89248***	0,486387
Osoba 9	0,000102***	0,962324***	3,37762***	0,913335
Osoba 10	0,04602	0,373158**	1,977575***	0,443975

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Tabela 7. Oszacowania parametrów modelu (3) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów			
	kappa	alfa	gamma	skorygowany R ²
Osoba 1	1,55E-29**	0,587852	14,33499***	0,267106
Osoba 2	0,027031	0,1065	0,789186	0,018289
Osoba 3	0,003116***	0,780712***	2,280043***	0,869564
Osoba 4	0,00000547***	0,727487***	5,114426***	0,947205
Osoba 5	0,001318***	1,27226***	2,736355***	0,915506
Osoba 6	0,000155***	1,063555***	3,259185***	0,899839
Osoba 7	0,00209***	0,73034***	2,466767***	0,817914
Osoba 8	zawsze stopa dyskonta równa 0%			
Osoba 9	0,0000127***	1,145787***	4,841114***	0,980326
Osoba 10	zawsze stopa dyskonta równa 0%			

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Podobnie jak w modelu (1), również w modelu (2) dla prawie wszystkich osób parametr δ okazał się nieistotnie różny od 0, w związku z czym postanowiono go usunąć z modelu, co doprowadziło do powstania modelu dwuczynnikowego:

$$FV - PV = FV^\alpha \cdot (t_2 - t_1)^\gamma \quad (4)$$

Oszacowania parametrów modelu (4) przedstawiają tabele 8 i 9.

Tabela 8. Oszacowania parametrów modelu (4) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów		
	alfa	gamma	skorygowany R ²
Osoba 1	0,623047***	1,288536***	0,953193
Osoba 2	0,840681***	1,034284***	0,956245
Osoba 3	0,6748***	1,11351***	0,949714
Osoba 4	0,651881***	1,247149***	0,942363
Osoba 5	0,77667***	0,680963***	0,95365
Osoba 6	0,642607***	1,156246***	0,989987
Osoba 7	0,650155***	1,121876***	0,947652
Osoba 8	0,535134***	1,272631***	0,582495
Osoba 9	0,641814***	0,878113***	0,957837
Osoba 10	0,625456***	0,587309***	0,943332

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Tabela 9. Oszacowania parametrów modelu (4) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów		
	alfa	gamma	skorygowany R ²
Osoba 1	-0,92928***	3,780327***	0,598059
Osoba 2	0,215462***	0,243633*	0,726144
Osoba 3	0,722569***	0,556717***	0,958315
Osoba 4	0,737488***	1,241958***	0,954802
Osoba 5	0,873127***	0,663985***	0,955521
Osoba 6	0,6678***	0,836646***	0,953098
Osoba 7	0,708934***	0,656098***	0,959551
Osoba 8	zawsze stopa dyskonta równa 0%		
Osoba 9	0,65865***	1,196329***	0,952304
Osoba 10	zawsze stopa dyskonta równa 0%		

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Obydwa modele końcowe gwarantują dla różnych osób dość dobre dopasowanie do danych empirycznych. Średnio ujmując wydaje się jednak, że lepiej jest dopasowany model dwuczynnikowy (4), zarówno po stronie wpływów, jak i wypływów. W celu sprawdzenia jak jakość proponowanych modeli ma się w stosunku do innych istniejących wcześniej (model klasyczny, czyli wykładniczy, model arytmetyczny oraz model hiperboliczny) oszacowano parametry tych

modeli i wyliczono skorygowane współczynniki determinacji. Informacje o dopasowaniu poszczególnych modeli do danych otrzymanych z ankiet (z podziałem na wpływy i wypływy pieniężne) zawierają tabele 10 i 11.

Tabela 10. Dopasowanie (skorygowane współczynniki determinacji) różnych modeli dyskontowania do danych empirycznych przy wpływach

Wyszczególnienie	Dopasowanie modeli do danych empirycznych				
	model (3)	model (4)	model wykładniczy	model arytmetyczny	model hiperboliczny
Osoba 1	0,89702	0,95319	0,866149	0,95756948	0,749106951
Osoba 2	0,96472	0,95625	0,726376	0,069926074	0,838636421
Osoba 3	0,904899	0,94971	0,810209	0,732332	0,811065291
Osoba 4	0,87491	0,94236	0,557447	0,417148597	0,55556633
Osoba 5	0,73952	0,95365	0,799578	0,367997038	0,917172533
Osoba 6	0,9711	0,98999	0,925717	0,733539069	0,860713382
Osoba 7	0,91975	0,94765	0,939881	0,832370071	0,89302793
Osoba 8	0,48639	0,5825	0,920407	0,310144221	0,935037839
Osoba 9	0,91334	0,95784	0,959523	0,638849428	0,955710908
Osoba 10	0,443975	0,94333	0,841700143	0,925180519	0,877738738

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Tabela 11. Dopasowanie (skorygowane współczynniki determinacji) różnych modeli dyskontowania do danych empirycznych przy wpływach

Wyszczególnienie	Dopasowanie modeli do danych empirycznych				
	model (3)	model (4)	model wykładniczy	model arytmetyczny	model hiperboliczny
Osoba 1	0,267106	0,598059	0,636187619	0,645604946	0,626368841
Osoba 2	0,018289	0,726144	0,008421792	0,175726611	0,009700964
Osoba 3	0,869564	0,958315	0,690531	0,575014	0,741023
Osoba 4	0,947205	0,954802	0,914572325	0,607131265	0,785496084
Osoba 5	0,915506	0,955521	0,834630984	0,042654218	0,849469259
Osoba 6	0,899839	0,953098	0,936757676	0,627218676	0,93987434
Osoba 7	0,817914	0,959551	0,316203361	0,48259461	0,135355992
Osoba 8			–		
Osoba 9	0,980326	0,952304	0,951813746	0,672219628	0,903268276
Osoba 10			–		

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Porównując dopasowanie otrzymane przy oszacowaniu modeli (3) i (4) z innymi modelami, można uznać, że model dwuczynnikowy (4) jest najczęściej tym, który najdokładniej odwzorowuje proces dyskontowania. Nawet w przypadkach, kiedy model (4) nie był najlepiej dopasowanym modelem, często wartość skorygowanego współczynnika determinacji nie odbiegała znacznie od wartości modelu najlepszego dla danej osoby.

Jak już wcześniej wspomniano, parametry proponowanych modeli szacowano dwoma metodami. Tabele 2–9 zawierają wyniki obliczeń dokonanych przy zastosowaniu transformacji liniowej, a następnie klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Rezultaty obliczeń (szczególnie jeśli chodzi o istotność zmiennych), w których stosowano nieliniową metodę najmniejszych kwadratów, były zbliżone do tych z pierwszej metody, dlatego zdecydowano się przedstawić wyniki otrzymane drugą metodą dotyczące jedynie końcowego modelu dwuczynnikowego (4). Informacje te zawierają tabele 12 i 13.

Tabela 12. Oszacowania parametrów modelu (4) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych przy użyciu nieliniowej metody najmniejszych kwadratów

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów		
	alfa	gamma	skorygowany R ²
Osoba 1	0,613435***	1,18069***	0,975214
Osoba 2	0,910146***	0,220886***	0,912549
Osoba 3	0,684416***	0,712004***	0,936739
Osoba 4	0,730840***	0,558487***	0,745635
Osoba 5	0,814059***	0,525445***	0,876406
Osoba 6	0,715732***	0,776172***	0,939454
Osoba 7	0,671142***	0,860306***	0,931236
Osoba 8	0,770122***	0,488904***	0,789934
Osoba 9	0,701525***	0,673935***	0,933078
Osoba 10	0,598226***	1,01532***	0,926281

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Tabela 13. Oszacowania parametrów modelu (4) przy dyskontowaniu wpływów pieniężnych przy użyciu nieliniowej metody najmniejszych kwadratów

Wyszczególnienie	Oszacowania parametrów		
	alfa	gamma	skorygowany R ²
Osoba 1	0,415662***	1,07952***	0,638949
Osoba 2	0,281607***	0,538446**	0,065329
Osoba 3	0,704091***	0,624218***	0,760430
Osoba 4	0,777482***	0,672670***	0,946636
Osoba 5	0,958432***	0,200131***	0,944473
Osoba 6	0,720070***	0,675620***	0,915534
Osoba 7	0,754999***	0,573171***	0,941015
Osoba 8	–	–	–
Osoba 9	0,734877***	0,727032***	0,939893
Osoba 10	–	–	–

* oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,1,

** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,05,

*** oznacza, że parametr różni się istotnie od 0 na poziomie istotności 0,01.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono różne do tej pory opisane modele wyboru w czasie. Żaden z nich nie był modelem dość dobrze odzwierciedlającym zachowania ludzi podejmujących decyzje związane ze zmianami wartości pieniądza w czasie, dlatego zaproponowano dwa nowe modele. Jeden z nich – model dwuczynnikowy (4) – okazał się w wielu przypadkach lepszy od pozostałych. Model ten spełnia niektóre z założeń poczynionych przed przystąpieniem do jego skonstruowania:

- 1) dla wszystkich osób wartość parametru α była mniejsza od 1, co oznacza, że dla wszystkich tych osób, średnio ujmując, wraz ze zwiększeniem się dyskontowanej kwoty (zarówno przy wpływach, jak i wypływach) malała procentowa wartość dyskonta. Zostało więc spełnione założenie dotyczące wpływów pieniężnych, natomiast podważone to dotyczące wypływów;
- 2) wydłużanie okresu dyskontowania faktycznie przeciętnie ujmując powoduje spadek subiektywnych stóp dyskonta.

Parametr δ okazał się nieistotny w większości przypadków, dlatego należy uznać, że przesunięcie dwóch opcji w czasie nie ma wpływu na proces dyskontowania.

W przypadku wpływów stwierdzono wysokie lub bardzo wysokie dopasowanie modelu dwuczynnikowego (4) do danych empirycznych w odniesieniu do wszystkich badanych osób, co wskazuje, że model ten może być stosowany do opisu zachowań związanych z wyborem w czasie, gdy decyzja dotyczy dodatnich przepływów pieniężnych.

Można również stwierdzić, że w badanych przypadkach dopasowanie proponowanego modelu dwuczynnikowego dla zdecydowanej większości osób było porównywalne lub lepsze niż w klasycznych modelach.

W przypadku wpływów wysokie lub bardzo wysokie dopasowanie nie wystąpiło we wszystkich przypadkach, choć dla zdecydowanej większości osób było lepsze niż dla pozostałych sprawdzanych modeli. Wydaje się, że również w przypadku ujemnych przepływów pieniężnych model dwuczynnikowy może być konkurencyjny dla klasycznych modeli wyboru w czasie.

Literatura

Doyle J.R., Chen C.H. (2010), *Time is Money: Arithmetic Discounting Outperforms Hyperbolic and Exponential Discounting*, <http://ssrn.com/abstract=1609594> (dostęp: 17.02.2011).

Forlicz S., Jasiński M. (2009), *Mikroekonomia*, Wydawnictwo WSB, Poznań.

- Harvey C.M. (1986), *Value Functions for Infinite-period Planning*, „Management Science”, Vol. 32(9).
- Loewenstein G., Prelec D. (1992), *Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation*, „The Quarterly Journal of Economics”, Vol. 107(2).
- Phelps E., Pollak R. (1968), *On Second-best National Saving and Game-equilibrium Growth*, „The Review of Economic Studies”, Vol. 35(2).
- Prelec D. (1989), *Decreasing Impatience: Definition and Consequences*, Harvard Business School working paper 90-015.
- Samuelson P. (1937), *A Note on Measurement of Utility*, „The Review of Economic Studies”, Vol. 4(2).
- Strotz R.H. (1955), *Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization*, „The Review of Economic Studies”, Vol. 23(3).

A TWO-FACTOR MODEL OF INTERTEMPORAL CHOICE

Summary: The normative model of intertemporal choice is Discounted Utility Model created by Paul Samuelson in 1937. However, since its creation, many scientists have been claiming, that real preferences are not in line with its assumptions. Stability of preferences, equality of discount rates for all amounts and delays were brought into question very often. New descriptive models were suggested: hyperbolic, quasi-hyperbolic, arithmetic or for example subadditive. Unfortunately none of them occurred fully adequate. That is why in this paper a new, quite easy to estimate, two-factor model was proposed. In order to verify significance of variables included in the model hours long surveys were conducted. On the basis of this surveys for particular subjects parameters of the model were estimated, significant variables found and goodness of fit calculated.

Keywords: subjective discount rates, value of money in time, intertemporal choice.