



**Andrzej Paliński**

AGH w Krakowie  
Wydział Zarządzania  
Katedra Informatyki Stosowanej  
palinski@zarz.agh.edu.pl

## **TEORIA GIER I OPCJE RZECZYWISTE W WARUNKACH ASYMETRYCZNYCH NAKŁADÓW INWESTYCYJNYCH**

**Streszczenie:** Celem artykułu jest rozszerzenie teorii łączącej opcje rzeczywiste z teorią gier w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. W pracy skupiono się na modelu, w którym gracze starają się uzyskać pierwszeństwo inwestycji, mając do wyboru strategię lidera lub naśladowcy. Standardowy model łączący opcję rzeczywistą z teorią gier został zmodyfikowany do sytuacji, w której gracze posiadają zróżnicowane nakłady inwestycyjne. Analiza modelu wykazała zaskakująco, że dla asymetrycznych graczy, gracz o wyższych nakładach inwestycyjnych z większym prawdopodobieństwem stosuje strategię lidera.

**Słowa kluczowe:** opcja rzeczywista, teoria gier, inwestycje strategiczne.

**JEL Classification:** C72, G31, L13.

### **Wprowadzenie**

Klasyczne modele opcji rzeczywistych służą do uwzględnienia w analizie rentowności przedsięwzięć inwestycyjnych tzw. elastyczności decyzji. Elastyczność decyzji oznacza możliwość podjęcia dodatkowych działań inwestycyjnych zależnych od zmiany sytuacji rynkowej lub rozwoju działalności operacyjnej. Te dodatkowe działania inwestycyjne mogą dotyczyć rozszerzenia skali aktywności przedsiębiorstwa, zmiany profilu produkcji, ale także zmniejszenia skali lub nawet likwidacji działalności. Obszerny przegląd teorii opcji rzeczywistych można znaleźć w pracy Mizerki [2005].

Wspomniane modele nie biorą pod uwagę faktu, że na tym samym rynku może się pojawić konkurencyjny podmiot. Jego wejście na rynek zmieni znacząco dochody przedsiębiorstwa i tym samym obniży rentowność przedsięwzięcia stanowiącego opcję rzeczywistą. Ponadto postępowanie konkurenta i moment jego wejścia na rynek będzie zależało od zachowania przedsiębiorstwa dotychczas funkcjonującego na rynku. Tego typu sytuacja wymaga wykorzystania teorii gier do modelowania strategicznych decyzji inwestycyjnych w warunkach konkurencji. W niniejszym artykule zostanie przedstawione podejście łączące teorię opcji rzeczywistych z teorią gier. Dalszy układ pracy jest następujący: w punkcie 1 zawarto założenia teoretyczne klasycznych modeli integrujących teorię opcji rzeczywistych z teorią gier. W punkcie 2 skonstruowano model równowagi w grze asymetrycznych graczy różniących się nakładami inwestycyjnymi związanymi z opcją rzeczywistą. Praca zakończona jest krótkim podsumowaniem.

## 1. Model teoretyczny gry opcyjnej

Początkowe badania z zakresu opcji rzeczywistych dotyczyły podejmowania decyzji przez pojedynczego inwestora bez uwzględniania możliwych interakcji z ewentualnymi innymi inwestorami na tym samym rynku. Aktualne badania uwzględniają dodatkowo decyzje strategiczne modelowane przez teorię gier. Istnieje bogata literatura przedmiotu dotycząca połączenia teorii opcji rzeczywistych z teorią gier, tzw. *real option games* (ROG). Modele ROG dzielą się na dwie grupy: modele gier pierwszeństwa (*preemptive games*) oraz modele gier na wyniszczenie (*war of attrition*). Przegląd modeli z tego obszaru można znaleźć w pracach Huismana [2000] oraz Azevedy i Paxsona [2014]. Standardowy model ROG zaliczany do gier pierwszeństwa jest zaprezentowany w dalszej części.

Neutralna względem ryzyka firma ma możliwość poniesienia nieodwracalnych nakładów inwestycyjnych  $I$ , które przyniosą dochód zależny od popytu  $D$  i ceny na rynku  $P$ .

Cena rynkowa jest wyrażona w następujący sposób:

$$P_t = X_t D(Q), \quad (1)$$

gdzie szok cenowy  $X_t$  podlega procesowi geometrycznego ruchu Browna:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dz, \quad (2)$$

w którym  $\mu$  jest dryfem,  $\sigma$  odchyleniem standardowym, a  $dz$  – różniczką procesu Wienera o rozkładzie normalnym z wartością średnią równą zero i wariancją  $dt$ . Przy czym  $\sigma > 0$  oraz  $0 < \mu < r$ , gdzie  $r$  jest stopą wolną od ryzyka. Warunek  $\mu < r$  jest niezbędny dla uzyskania rozwiązania.  $D(Q)$  jest deterministyczną czę-

ścią krzywej popytu, malejącą względem podaży, dla której  $D'(Q) < 0$ . Podaż jest zależna od liczby firm na rynku, co w przypadku dwóch konkurencyjnych firm prowadzi do  $Q \in \{0,1,2\}$ .

Poniesienie nakładów inwestycyjnych i wejście na rynek może się odbyć równocześnie przez obydwie firmy ( $Q = 2$ ) albo najpierw przez jedną ( $Q = 1$ ), a następnie przez drugą – wtedy dopiero nastąpi wzrost podaży do  $Q = 2$ . Przez pewien okres pierwsza firma jest liderem, czerpiąc z tego tytułu korzyść – wyższą cenę zależną od części deterministycznej funkcji popytu. Jednakże wraz z upływem czasu może nastąpić wzrost ceny w wyniku realizacji procesu stochastycznego  $X_t$ . Opłacalnym stanie się wtedy wejście na rynek drugiego producenta – naśladowcy. Najmniej korzystną sytuacją jest równoczesne wejście na rynek obydwu producentów starających się uzyskać pozycję lidera. Niska cena w wyniku wysokiej podaży we wczesnym etapie rozwoju cen rynkowych nie zapewni obydwu producentom wymaganych dochodów.

Biorąc pod uwagę proces stochastyczny  $X_t$ , możemy zdefiniować optymalny moment inwestycji naśladowcy, oznaczonego indeksem  $F$  następująco [Dixit i Pindyck, 1994, rozdz. 5; Huisman i in., 2004; Paxson i Pinto, 2005]:

$$X_F^* = \frac{\beta}{\beta-1} \frac{(r-\mu)I}{D(2)}, \quad (3)$$

gdzie  $\beta > 1$  jest dodatnim pierwiastkiem równania różniczkowego będącego równaniem programowania dynamicznego Bellmana dla naśladowcy:

$$\frac{1}{2} \sigma_X^2 X^2 \frac{\partial^2 F_F(X)}{\partial X^2} + \mu X \frac{\partial F_F(X)}{\partial X} = 0 \quad (4)$$

i jest określone przez:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1. \quad (5)$$

Funkcja wypłaty naśladowcy, będąca zdyskontowanym strumieniem przepływów pieniężnych z projektu inwestycyjnego, jest oznaczona  $F_F(X)$ . Funkcja wypłaty lidera zostanie oznaczona analogicznie  $F_L(X)$ , podczas gdy funkcja wypłaty obydwu firm, w sytuacji gdy zainwestują równocześnie jako liderzy, zostanie oznaczona  $F_S(X)$ . Zachodzi przy tym  $F_L(X) > F_F(X) > F_S(X)$ .

Funkcję wypłaty naśladowcy można otrzymać z poniższego wzoru [Dixit i Pindyck, 1994]:

$$F_F(X) = \begin{cases} \left(\frac{X}{X_F^*}\right)^\beta \left(\frac{X_F^{*D(2)}}{\mu} - I\right), & X < X_F^* \\ \frac{XD(2)}{r-\mu} - I, & X \geq X_F^* \end{cases} \quad (6)$$

Zakładając, że naśladowca zainwestuje w czasie  $t$  takim, że  $X_t \leq X_F^*$ , lider optymalizuje swoją funkcję monopolisty dla  $\tau < t$ . Funkcja wypłaty lidera przyjmie postać [Dixit i Pindyck, 1994]:

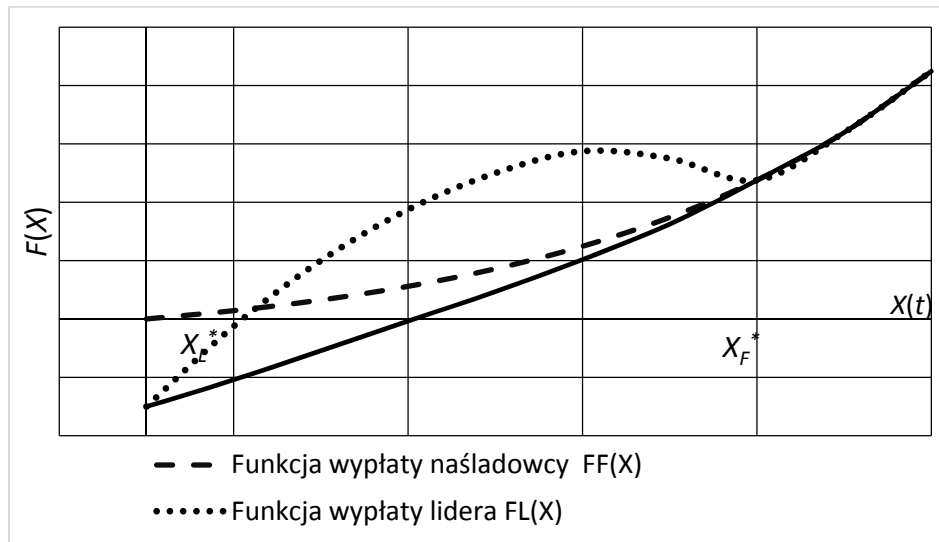
$$F_L(X) = \begin{cases} \frac{XD(1)}{r-\mu} \left[ 1 - \left( \frac{X}{X_F^*} \right)^{\beta-1} \right] + \frac{X_F^* D(2)}{r-\mu} \left( \frac{X}{X_F^*} \right)^{\beta} - I, & X < X_F^* \\ \frac{XD(2)}{r-\mu} - I, & X \geq X_F^* \end{cases} \quad (7)$$

Punkt inwestycji lidera uzyskującego pierwszeństwo sprzedaży  $X_L^*$  można otrzymać z warunku:

$$X_L^* = \min_X \{X | F_L(X) = F_F(X)\}, \quad (8)$$

co obrazuje rys. 1. Funkcja dochodu lidera jest początkowo szybciej rosnąca, ale po osiągnięciu maksimum ostatecznie zrównuje się z funkcją dochodu naśladowcy. Gdy firmy zainwestują równocześnie, wtedy ich funkcja wypłaty przyjmuje następującą postać [Azevedo i Paxson, 2010]:

$$F_S(X) = \frac{XD(2)}{r-\mu_X} - I. \quad (9)$$



**Rys. 1.** Schemat funkcji wartości przedsięwzięcia dla lidera, naśladowcy i w sytuacji równoczesnej inwestycji obydwu graczy

Źródło: Na podstawie: [Dixit i Pindyck, 1994; Azevedo i Paxson, 2014].

Dla dwóch konkurencyjnych firm istnieją dwie możliwe strategie inwestycyjne:

1. Inwestować natychmiast, kiedy osiągnie się punkt  $X_L^*$ , po to aby czerpać korzyść z pozycji lidera.
2. Powstrzymać się od inwestowania do czasu osiągnięcia punktu  $X_F^*$ .

Każda z firm może wybrać dowolną spośród obydwu strategii, co obrazuje tabela 1, zawierająca macierz gry w postaci strategicznej. Pogrubioną czcionką są zaznaczone najlepsze odpowiedzi na strategię przeciwnika.

**Tabela 1.** Postać strategiczna gry opcyjnej z pierwszeństwem inwestycji

Gracz 1 \ Gracz 2	Inwestować	Czekać
	$(F_S(X), F_S(X))$	$(F_L(X), F_F(X))$
Czekać	$(F_F(X), F_L(X))$	$(F_F(X), F_F(X))$

Źródło: Opracowanie własne.

W grze są dwa punkty równowagi w strategiach czystych: (inwestować, czekać) i (czekać, inwestować). Ze względu na to, że firmy są jednakowe, obydwie firmy wolałyby zostać liderem, gdyż strategia ta dawałaby najwyższą wypłatę. Jednakże równoczesne zastosowanie strategii „inwestować” przez obydwu graczy prowadziłoby do najniższych wypłat  $F_S(X)$  dla obydwu firm. Jediną możliwą równowagą jest zatem równowaga w strategiach mieszanych<sup>1</sup>. Oznaczmy przez  $p_1$  prawdopodobieństwo stosowania strategii „inwestować” przez gracza 1. Przez  $p_2$  oznaczmy prawdopodobieństwo stosowania strategii „inwestować” przez gracza 2.

Graczowi 1 jest obojętne, którą strategię zastosuje, zatem:

$$F_S(X)p_2 + F_L(X)(1 - p_2) = F_F(X)p_2 + F_F(X)(1 - p_2), \quad (10)$$

co po przekształceniach daje:

$$p_2 = \frac{F_L(X) - F_F(X)}{F_L(X) - F_S(X)}. \quad (11)$$

Analogiczny wynik otrzymamy dla prawdopodobieństwa  $p_1$ , gdyż gracze są jednakowi, a ich strategie są symetryczne, stąd  $p_1 = p_2$ .

## 2. Model opcji rzeczywistej dla graczy o zróżnicowanych nakładach inwestycyjnych

Założmy odmiennie w stosunku do klasycznego modelu gry pierwszeństwa, że gracz 2 posiada niższą wartość nakładów inwestycyjnych niż gracz 1, wynoszącą  $kI$ , gdzie  $0 < k < 1$ . Jego optymalny moment inwestycji jako naśladowcy na podstawie (3) można wyrazić:

$$X_{2F}^* = \frac{\beta}{\beta-1} \frac{(r-\mu)kI}{D(2)} = kX_{1F}^*. \quad (12)$$

<sup>1</sup> Szerzej na temat równowagi w grze strategicznej: [Paliński, 2013].

W tych warunkach funkcja wypłaty gracza 2 jako lidera po przekształceniach (7) i podstawieniu (12) może być wyrażona następująco:

$$F_{2L}(X) = \begin{cases} \frac{XD(1)}{r-\mu} - \frac{D(1)-D(2)}{D(2)} \frac{\beta k^{1-\beta} I}{\beta-1} \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta - kI, X < X_{2F}^* \\ \frac{XD(2)}{r-\mu} - kI, X \geq X_{2F}^* \end{cases} \quad (13)$$

Funkcja wypłaty gracza 2 jako naśladowcy po uwzględnieniu (12) jest następująca:

$$F_{2F}(X) = \begin{cases} \frac{k^{1-\beta} I}{\beta-1} \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta, X < X_{2F}^* \\ \frac{XD(2)}{r-\mu} - kI, X \geq X_{2F}^* \end{cases} \quad (14)$$

Funkcje wypłaty gracza 1 pozostają niezmiennione. W takiej sytuacji gracz 2 jako pierwszy osiągnie wartość procesu, przy której zostanie liderem, co wynika z wartości funkcji lidera i naśladowcy dla  $X < X_{2F}^*$  i warunku (8) (por. rys. 2).

Przyjmijmy, że wartość procesu  $X$  przekroczyła wartość pierwszeństwa inwestycji lidera dla każdego z graczy, tzn.  $X > X_{2L}^* > X_{1L}^*$ . Sytuacja taka może wystąpić w praktyce gospodarczej np. w momencie uwolnienia chronionego rynku lub udzielenia koncesji obydwu graczom, przykładowo na rynku telekomunikacyjnym lub energetycznym. Obydwaj gracze będą mogli uzyskać pozycję lidera równocześnie. Wtedy strategia mieszana gracza 1, wyrażona przez prawdopodobieństwo natychmiastowego inwestowania na podstawie (11), przyjmie wartość:

$$p_1 = \frac{F_{2L}(X) - F_{2F}(X)}{F_{2L}(X) - F_{2S}(X)}, \quad (15)$$

podczas gdy strategia gracza 2:

$$p_2 = \frac{F_{1L}(X) - F_{1F}(X)}{F_{1L}(X) - F_{1S}(X)}. \quad (16)$$

**Twierdzenie.** Dla wartości procesu  $X > X_g$  spełniającego  $X_{2F}^* > X > X_{1L}^*$ , zachodzi  $\frac{dp_1}{dk} < 0$ , gdzie  $X_g$  jest określone następująco:

$$X_g > \frac{k\beta^2 I(r-\mu) \left(\frac{D(2)(\beta-1)}{\beta I(r-\mu)}\right)^\beta}{D(2)(\beta-1) \left[ k^\beta + (\beta-1) \left(\frac{D(2)(\beta-1)}{\beta I(r-\mu)}\right)^\beta \right]}$$

**Dowód.** Dla  $X < X_{1L}^*$ ,  $F_{1L}(X) < F_{1F}(X)$  i gracz 1 nie realizuje inwestycji. Dla  $X > X_{2L}^*$  gracz 2 stosuje strategię naśladowcy.

Podstawiając do (14) z (13) funkcję wypłaty gracza 2 dla  $X < X_{2F}^*$ , uwzględniając (6) i (9) oraz fakt, że nakłady inwestycyjne wynoszą  $kI$ , otrzymujemy:

$$p_1 = \frac{\frac{XD(1)}{r-\mu} - \frac{D(1)-D(2)}{D(2)} \frac{k^{1-\beta} \beta I}{\beta-1} \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta - \frac{k^{1-\beta} I}{\beta-1} \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta - kI}{\frac{X(D(1)-D(2))}{r-\mu} - \frac{D(1)-D(2)}{D(2)} \frac{k^{1-\beta} \beta I}{\beta-1} \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta}. \quad (17)$$

Po zróżniczkowaniu prawdopodobieństwa  $p_1$  gracza 2 względem  $k$  uzyskujemy:

$$\frac{dp_1}{dk} = D(2)k^\beta I(\beta-1)(r-\mu) \cdot \frac{\left\{ -D(2)Xk^\beta(\beta-1) - [D(2)X(\beta-1)^2 - kI\beta^2(r-\mu)] \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta \right\}}{(D(1)-D(2)) \left( D(2)Xk^\beta(\beta-1) - kI\beta(r-\mu) \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta \right)^2}. \quad (18)$$

Składniki (18) poza nawiasem klamrowym na podstawie założeń są dodatnie, zatem znak pochodnej prawdopodobieństwa  $p_1$  zależy ostatecznie od wyrażenia:

$$-D(2)Xk^\beta(\beta-1) - [D(2)X(\beta-1)^2 - kI\beta^2(r-\mu)] \left(\frac{X}{X_{1F}^*}\right)^\beta. \quad (19)$$

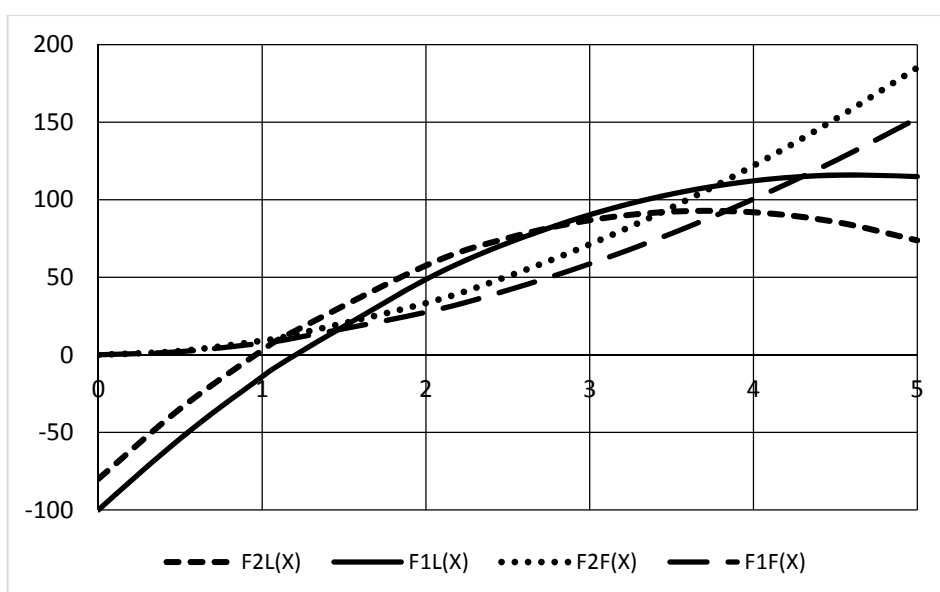
Podstawiając (12) w miejsce  $X_{1F}^*$  i przekształcając, wyrażenie (19) staje się ujemne dla  $X > X_g$ , gdzie  $X_g$  jest określone następująco:

$$X_g = \frac{k\beta^2 I(r-\mu) \left(\frac{D(2)(\beta-1)}{\beta I(r-\mu)}\right)^\beta}{D(2)(\beta-1) \left[ k^\beta + (\beta-1) \left(\frac{D(2)(\beta-1)}{\beta I(r-\mu)}\right)^\beta \right]}. \quad (20)$$

Trudno wykazać bez zastosowania obliczeń numerycznych, że  $X_g < X_{1L}^*$ , jednakże licznik we wzorze (17) jest różnicą funkcji wypłaty lidera i naśladowcy, a różnica ta staje się ujemna poniżej wartości  $X_{1L}^*$  i prawdopodobieństwo  $p_1$  nie jest już wyliczalne. Dopiero poniżej tej wartości zależność  $p_1$  od  $k$  może stać się odwrotna, czyli rosnąca względem  $k$ . Ponadto, obliczenia numeryczne wskazują dla kombinacji różnych wartości parametrów wejściowych na wartość  $X_g < 1$ .

**Wniosek.** Jeżeli wartość procesu cen rynkowych przekroczy punkt pierwszeństwa inwestycji gracza 1 jako lidera  $X_{1L}^*$ , to prawdopodobieństwo strategii „inwestować” gracza 1 o wyższych nakładach inwestycyjnych rośnie wraz ze wzrostem różnicy nakładów w stosunku do gracza 2.

W celu zobrazowania rozważań teoretycznych skonstruowano następujący przykład liczbowy:  $\mu = 0,01$ ,  $r = 0,02$ ,  $\sigma = 0,04$ ,  $D(1) = 1$ ,  $D(2) = 0,5$ ,  $I = 100$ ,  $k = 0,8$ . Dla tych danych otrzymano:  $\beta = 1,87$ ,  $X_{1F}^* = 4,30$ ,  $X_{1L}^* = 1,13$ ,  $X_g = 0,59$ . Na rys. 2 są przedstawione funkcje wypłaty obydwu graczy dla strategii lidera i naśladowcy dla tych danych.



**Rys. 2.** Funkcje wypłaty graczy dla strategii lidera i naśladowcy dla przykładu liczbowego

Źródło: Opracowanie własne.

Jeżeli proces osiągnie wartość  $X = 2$ , to prawdopodobieństwa  $p_1$  dla przykładu liczbowego przyjmują wartości przedstawione w tabeli 2. Dla  $k < 0,5$  gracz 1 inwestuje jako lider z prawdopodobieństwem 1, a gracz 2 zostaje naśladowcą.

**Tabela 2.** Zależność prawdopodobieństwa  $p_1$  inwestycji jako lidera gracza 1 od parametru  $k$

$k$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$p_1$	0,43	0,54	0,64	0,75	0,86	0,96

Źródło: Opracowanie własne.



Przykładowo, dla  $X = 2$  i  $k = 0,8$  strategia mieszana graczy przyjmuje postać (0,64 inwestować + 0,36 czekać; 0,43 inwestować + 0,57 czekać). Wyplata gracza 1 wyniesie 27,5, a wyplata gracza 2 – 33,4. Ich łączna wyplata osiąga 60,9. Jest to rozwiązanie nieoptymalne w sensie Pareto. W przypadku koordynacji strategii, gdyby liderem był gracz o wysokich nakładach, łączna wyplata graczy wyniosłaby 82,0, gdyby natomiast liderem był gracz o niskich nakładach, łączna wyplata osiągnęłaby 85,1. Gracz powstrzymujący się od inwestycji i stosujący strategię naśladowcy otrzymywałby wyplataę identyczną z wyplataą uzyskaną dla strategii mieszanej, co nie pogorszyłoby jego sytuacji.

Wynik modelu jest zaskakujący, gdyż wbrew przypuszczeniom, to nie gracz o niższych nakładach inwestycyjnych z większym prawdopodobieństwem stara się zostać liderem, ale gracz o wyższych nakładach. Możliwym wyjaśnieniem jest to, że gracz o niższych nakładach osiąga optymalną wartość inwestycji naśladowcy dla niższych wartości procesu  $X$ , niż gracz o wyższych nakładach (por. rys. 2), a jego funkcja wyplaty naśladowcy ma wyższą wartość. Mniej zyskuje zatem stosując strategię lidera, niż gracz o wyższych nakładach. Być może uwzględnienie asymetrii informacyjnej [Lambrecht i Perraudin, 2003; Graham, 2011; Arasteh, 2016], która posłużyłaby do modelowania nieznanności rzeczywistych nakładów inwestycyjnych konkurenta, wpłynęłaby na zmianę warunków równowagi w grze. Odpowiedź na to pytanie wymaga dalszych badań.

## Podsumowanie

Większość badań z zakresu opcji rzeczywistych służy znalezieniu najlepszej metody wyznaczania wartości opcji w sytuacji braku notowań giełdowych instrumentu podstawowego, jakim jest rzeczowy projekt inwestycyjny. Badania te nie biorą jednak pod uwagę możliwości pojawienia się na rynku konkurencyjnych podmiotów, gdyż wykracza to poza problem samej wyceny opcji rzeczowej jako odpowiednika opcji finansowej.

Przedstawiona w niniejszej pracy analiza wskazuje na to, jak znaczący wpływ na wartość opcji ma zachowanie strategiczne potencjalnego konkurenta. Rozważany w pracy model wywodzi się z tzw. gier opcyjnych (*real option games*), których podstawą jest zróżnicowanie dochodów lidera i naśladowcy w procesie wchodzenia na rynek.

Przeprowadzona w artykule analiza warunków równowagi w grze, w której gracze mają różne wartości nakładów inwestycyjnych, wykazała, że gracz o wyższych nakładach inwestycyjnych z większym prawdopodobieństwem stosuje strategię lidera. Brak koordynacji strategii przez graczy prowadzi do nieopty-

malnych w sensie Pareto decyzji konkurentów. Paretooptymalnym rozwiązaniem, niepogarszającym wypłaty żadnego z graczy, byłoby inwestowanie gracza o niskich nakładach jako lidera, a gracza o wysokich nakładach – jako naśladowcy. Możliwym rozwiązaniem tego problemu wydaje się zastosowanie mechanizmu sygnalizacji, dzięki któremu inwestor o niższych nakładach próbowałby narzucić swoją pozycję jako lidera drugiemu graczowi o wyższych nakładach.

## Literatura

- Arasteh A. (2016), *Combination of Real Options and Game-theoretic Approach in Investment Analysis*, „Journal of Industrial Engineering International”, Vol. 12(2).
- Azevedo A., Paxson D. (2010), *Real Options Game Models: A Review*, [https://www.researchgate.net/publication/228687836\\_Real\\_Options\\_Games\\_Models\\_A\\_Review](https://www.researchgate.net/publication/228687836_Real_Options_Games_Models_A_Review) (dostęp: 09.10.2015).
- Azevedo A., Paxson D. (2014), *Developing Real Options Game Models*, „European Journal of Operational Research”, Vol. 237(3).
- Dixit A., Pindyck R. (1994), *Investments under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton NJ.
- Graham J. (2011), *Strategic Real Options Under Asymmetric Information*, „Journal of Economic Dynamics & Control”, Vol. 35(6).
- Huisman K. (2000), *Technology Investment: A Game Theoretic Real Options Approach*, Center for Economic Research, Tilburg.
- Huisman K., Kort P., Pawlina G., Thijssen J. (2004), *Strategic Investment under Uncertainty: Merging Real Options with Game Theory* [in:] T. Dangl, M. Kopel, W. Kürsten (eds.), *Special Issue on Real Options – Ergänzungsheft Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB)*, 3/2004, Gabler, Wiesbaden.
- Lambrecht B., Perraudin W. (2003), *Real Options and Preemption Under Incomplete Information*, „Journal of Economic Dynamics & Control”, Vol. 27(4).
- Mizerka J. (2005), *Opcje rzeczywiste w finansowej ocenie efektywności inwestycji*, Wydawnictwo AE, Poznań.
- Paliński A. (2013), *Analiza ekonomicznych warunków umowy kredytowej w ujęciu teorii gier*, Wydawnictwo UE, Katowice.
- Paxson D., Pinto H. (2005), *Rivalry Under Price and Quantity Uncertainty*, „Review of Financial Economics”, Vol. 14(3-4).

**REAL OPTIONS AND GAME THEORY UNDER ASYMMETRIC  
INVESTMENT EXPENDITURES**

**Summary:** The aim of the article is to analyze the possibility of utilization of real options in combination with the game theory to make investment decisions. The study focused on a model in which players try to get preemption investment, choosing a strategy of leader or follower. The standard real option game model has been modified to a situation in which the players have differentiated capital expenditures. Analysis of the model showed surprisingly that for asymmetric players the player with higher investment costs more likely uses the strategy of leader.

**Keywords:** real option game, game theory, strategic investment.