Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 301 · 2016

Joanna Utkin

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
jutkin@sgh.waw.pl

WYCENA ENTROPOWA NA RYNKU ŁĄCZONYM

Streszczenie: Model rynku łączonego [Utkin, 2014a] jest niezupełny i pozbawiony możliwości arbitrażu. Występują w nim wypłaty nieosiągalne. O ile wypłata osiągalna ma jedną wartość wyceny bezarbitrażowej, to zbiór wartości wyceny bezarbitrażowej wypłaty nieosiągalnej jest przedziałem otwartym. Na początku przeanalizowano wypłaty na rynku łączonym pod względem osiągalności. Główny cel artykułu to wyznaczenie ceny entropowej dowolnej wypłaty na rynku łączonym. Po wyrażeniu względnej entropii, jako funkcji parametru rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego, otrzymano równanie parametru minimalizującego entropię, będące równaniem liniowym lub kwadratowym. Za pomocą optymalnego parametru wyznaczono rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego, minimalizujący entropię, a następnie cenę entropową. Ponadto, na rynku łączonym rozważono warunkową minimalizację entropii i uzyskano związek mnożników Lagrange'a z portfelem maksymalizującym oczekiwaną wykładniczą użyteczność wypłaty. Stosując charakterystykę minimalnej entropii [Frittelli, 2000], wyznaczono optymalny portfel, rozwiązując pewien układ równań liniowych.

Słowa kluczowe: względna entropia, rynek łączony.

JEL Classification: C61.

Wprowadzenie

Rynek kapitałowy, utworzony przez połączenie dwóch rynków o dwupunktowym rozkładzie prawdopodobieństwa, na przykład rynku akcji i obligacji długoterminowej, o wspólnej stopie procentowej, jest przedstawiony w pracy Autorki [Utkin, 2014a]. Otrzymany tam model rynku jest pozbawiony możliwości arbitrażu i jest niezupełny. Na takim rynku wycena bezarbitrażowa ma jednoznacznie określoną wartość jedynie dla wypłaty osiągalnej. Dla wypłaty nieosiągalnej wartości wyceny bezarbitrażowej należą do otwartego przedziału o końcach równych cenie kupna i cenie sprzedaży tej wypłaty [Dana i Jeanblanc, 2003].

Stutzer [1996] zaproponował orientacyjną wycenę wypłaty nieosiągalnej za pomocą takiego rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego, który minimalizuje jego entropię względem rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego. Rozwiązanie ogólnego problemu minimalizacji względnej entropii, który nie ogranicza się do problemu stacjonarnego na rynku skończonym, znajduje się w pracy Frittelliego [2000]. Udowodnił on istnienie dokładnie jednego optymalnego rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego równoważnego rozkładowi prawdopodobieństwa rzeczywistego, a następnie wykazał zgodność otrzymanego rozwiązania z rozwiązaniem pewnego zadania beznakładowej maksymalizacji oczekiwanej użyteczności majątku. Ponadto, na rynku skończonym autor ten zbudował przykład świadczący o braku równoważności rozkładów prawdopodobieństwa rzeczywistego i martyngałowego minimalizującego wariancję.

W niniejszym artykule w celu opisu zbioru i wyceny wypłat nieosiągalnych na rynku łączonym zbadamy zbiór i wycenę wypłat osiągalnych. Przeprowadzimy maksymalizację entropii rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego względem rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego, co pozwoli wyznaczyć wycenę entropową dowolnej wypłaty na rynku łączonym. Nawiążemy ponadto do problemu maksymalizacji oczekiwanej użyteczności wykładniczej majątku, równoważnego ogólnemu problemowi minimalizacji entropii. Dla znanego rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego minimalizującego entropię obliczymy skład portfela maksymalizującego oczekiwaną użyteczność, skąd otrzymamy mnożniki Lagrange'a występujące w rozwiązaniu optymalnym zagadnienia warunkowej minimalizacji entropii.

1. Rozkłady prawdopodobieństwa rzeczywistego i martyngałowego

Rynek łączony przedstawiony w pracy Autorki [Utkin, 2014a] jest utworzony z dwóch rynków o dwupunktowych rozkładach prawdopodobieństwa. Dla ustalenia uwagi rynki składowe były nazwane rynkiem akcji i rynkiem obligacji, oba rozpatrywane w chwilach $t = 0$ i $t = 1$. W $t = 1$ rynek składowy przyjmuje jeden z dwóch stanów: stan 1 oznacza hossę, a stan 0 – bessę ceny odpowiedniego instrumentu ryzykownego.

Na rynku akcji występują dwa instrumenty finansowe: stopa procentowa bezpiecznego konta bankowego $r > 0$ oraz jeden rodzaj akcji. Cenę akcji w chwili t oznaczamy przez S_t. Cena S_0 jest daną dodatnią liczbą, zaś S_1 jest zmienną losową o wartościach S_1^1 i S_1^0, przy czym cena terminowa akcji $(1 + r)$

S_0 jest większa od S_1^0 i mniejsza od S_1^1. W chwili $t = 1$ stan 1 jest przyjmowany z prawdopodobieństwem p_s dla pewnego danego $p_s \in (0,1)$. Z nierówności nałożonych na ceny akcji wynika, że istnieje dokładnie jedno prawdopodobieństwo martyngałowe q_s wzrostu ceny akcji powyżej jej ceny terminowej równe:

$$q_S = \frac{(1+r)S_0 - S_1^0}{S_1^1 - S_1^0}. \tag{1}$$

Na rynku obligacji stopa zwrotu bezpiecznego instrumentu finansowego musi być równa r. Za taki instrument można uznać 1-okresową obligację zerokuponową, która w chwili $t = 1$ jest wykupywana po cenie równej 1, a w $t = 0$ kosztuje $1/(1 + r)$. Ryzykownym instrumentem finansowym jest obligacja zerokuponowa przewidziana do wykupu po cenie równej 1 na koniec danego wielookresowego przedziału czasu. Cenę tej obligacji w chwili t oznaczamy przez B_t. Zakładamy, że cena terminowa obligacji $(1 + r)B_0$ jest większa od B_1^0 i mniejsza od B_1^1. Założeniem specyficznym dla rynku obligacji jest wymóg przynależności powyższych cen do przedziału $(B_0,1)$. W chwili $t = 1$ stan 1 jest przyjmowany z prawdopodobieństwem p_B, gdzie $p_B \in (0,1)$ jest dane. Z nierówności nałożonej na ceny obligacji wynika istnienie dokładnie jednego prawdopodobieństwa martyngałowego q_B wzrostu ceny obligacji wielookresowej powyżej jej ceny terminowej, które jest równe:

$$q_B = \frac{(1+r)B_0 - B_1^0}{B_1^1 - B_1^0}. \tag{2}$$

Model rynku łączonego zawiera trzy rodzaje instrumentów finansowych. Są to: bezpieczna stopa procentowa, akcje i obligacje wielookresowe. Stany rynku łączonego w chwili $t = 1$ są wyznaczone przez cztery pary wartości dwuwymiarowej zmiennej losowej (S_1, B_1), przy założeniu znajomości rozkładów brzegowych określonych za pomocą p_S i p_B. Cztery stany na rynku łączonym uporządkowano ze względu na hossę i bessę na rynkach składowych w następujący sposób. Wartość zmiennej (S_1, B_1) w i stanie definiujemy jako $\left(S_1^{k(i)}, B_1^{n(i)}\right)$, gdzie dla $i = 1,2,3,4$ wskaźniki $k(i)$, $n(i)$ są równe:

$$\begin{aligned} &k(1) = 1, \quad k(2) = 1, \quad k(3) = 0, \quad k(4) = 0, \\ &n(1) = 1, \quad n(2) = 0, \quad n(3) = 1, \quad n(4) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Rozkłady prawdopodobieństwa na rynku łączonym, jak również wypłaty losowe, można wówczas potraktować jako wektory – kolumny z przestrzeni R^4 [Dana i Jeanblanc, 2003].

Rozkład prawdopodobieństwa rzeczywistego na rynku łączonym P wyznaczony za pomocą rozkładów brzegowych [Utkin, 2014a] ma postać:

$$P^T = (a, p_S - a, p_B - a, 1 - p_S - p_B + a), \tag{4}$$

gdzie parametr prawdopodobieństwa jednoczesnej hossy walorów ryzykownych a spełnia ostrą nierówność Frecheta [Cherubini, Luciano i Vecchiato, 2004, s. 40]:

$$\max\{0, p_S + p_B - 1\} < a < \min\{p_S, p_B\}. \tag{5}$$

Obecność parametru a pozwala wykorzystać dodatkową informację o cenach akcji i obligacji. Jeżeli k jest danym współczynnikiem korelacji cen S_1 i B_1, to zachodzi związek:

$$a = p_S p_B + k\sqrt{p_S p_B (1 - p_S)(1 - p_B)}. \tag{6}$$

Nie dla wszystkich jednak $k \in \langle -1, 1\rangle$ parametr (6) spełnia ograniczenie (5) [Utkin, 2014a]. W dalszym ciągu zakładamy, że dla łączonych przez nas rynków składowych można wyznaczyć parametr a spełniający nierówność (5).

Można zauważyć, że na płaszczyźnie cztery wartości zmiennej losowej (S_1, B_1) są wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do osi współrzędnych. Prosta regresji liniowej ma zatem położenie poziome, co wskazywałoby na zerowe skorelowanie cen akcji i obligacji. Należy więc wyodrębnić ważny przypadek, gdy $k = 0$, a wtedy z równania (6) wynika, że:

$$a = p_S p_B \tag{7}$$

i w konsekwencji (4) otrzymujemy:

$$P^T = (p_S p_B, p_S(1 - p_B), (1 - p_S)p_B, (1 - p_S)(1 - p_B)). \tag{8}$$

W dalszym ciągu rozważań przyjmujemy, że parametr a ma daną wartość.

Przy założeniu istnienia rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego P spełniającego (4), (5), na rynku łączonym istnieją rozkłady prawdopodobieństwa martyngałowego Q równoważne rozkładowi P, co zostało wykazane w pracy Autorki [Utkin, 2014a]. Zbiór rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego M ma postać:

$$M = \{Q : Q^T = (b, q_S - b, q_B - b, 1 - q_S - q_B + b) \wedge b_1 < b < b_2\}, \tag{9}$$

gdzie:

$$b_1 = \max(0, q_S + q_B - 1),\ b_2 = \min(q_S, q_B). \tag{10}$$

Zbiór M jest odcinkiem w przestrzeni R^4, niezawierającym końców. Końcami tego odcinka są $Q(1)$ i $Q(2)$, gdzie:

$$Q^T(j) = (b_j, q_S - b_j, q_B - b_j, 1 - q_S - q_B + b_j),\quad j = 1,2. \tag{11}$$

zaś b_j są dane za pomocą (10).

Istnienie wielu rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego świadczy o tym, że rynek łączony jest niezupełny i pozbawiony możliwości arbitrażu [Dana, Jeanblanc, 2003; Pliska, 2005].

2. Wypłaty osiągalne i nieosiągalne

Wypłaty na rozważanym rynku łączonym są reprezentowane przez wektory z R^4. Tak jak na każdym rynku niezupełnym, istnieją na nim wypłaty nieosiągalne. Aby wskazać wypłaty nieosiągalne, wyznaczymy zbiór wypłat osiągalnych.

Wypłata W , gdzie $W \in R^4$ jest, zgodnie z definicją osiągalną, gdy istnieje portfel o składzie: kwota χ_R na bezpiecznym koncie bankowym, χ_S akcji i χ_B obligacji, który w chwili 1 wypłaca W, czyli w każdym stanie końcowym spełnia równanie:

$$\chi_R(1+r) + \chi_S S_1^{k(i)} + \chi_B B_1^{n(i)} = W^i, \ i = 1,2,3,4. \tag{12}$$

Powyższy układ czterech równań liniowych z trzema niewiadomymi χ_R, χ_S, χ_B ma, w warunkach pierwotnego charakteru walorów tworzących rynek [Utkin, 2014a], rząd macierzy współczynników równy 3. Warunek konieczny i wystarczający niesprzeczności równania (12), polegający na zachowaniu rządu przez macierz rozszerzoną układu, możemy zatem przedstawić za pomocą równania:

$$\det\begin{pmatrix} 1+r & S_1^1 & B_1^1 & W^1 \\ 1+r & S_1^1 & B_1^0 & W^2 \\ 1+r & S_1^0 & B_1^1 & W^3 \\ 1+r & S_1^0 & B_1^0 & W^4 \end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

Lewa strona (13) jest równa iloczynowi $(1+r)(S_1^0 - S_1^1)(B_1^0 - B_1^1)$ i ($W^2 + W^3 - W^1 - W^4$). Przy założeniach dotyczących cen akcji i obligacji, warunek osiągalności (13) sprowadza się do następującego równania:

$$W^1 - W^2 - W^3 + W^4 \tag{14}$$

Związek wartości losowej wypłaty W w czterech stanach rynku łączonego (14) decyduje o osiągalności W. Związek (14) jest równaniem pewnej hiperpłaszczyzny w przestrzeni R^4. Wypłaty leżące poza tą hiperpłaszczyzną są nieosiągalne.

Wniosek 1. Na rynku łączonym wszystkie wypłaty W, dla których $W^1 - W^2 - W^3 + W^4 \neq 0$, są nieosiągalne.

Innym kryterium osiągalności wypłaty W, równoważnym istnieniu rozwiązania równania (12), jest stałość wyceny bezarbitrażowej $Q^T W/(1+r)$ dla wszystkich $Q \in M$ [Pliska, 2005, s. 29]. Stałość tej formy liniowej zmiennej W we względnym wnętrzu odcinka o końcach $Q(1)$, $Q(2)$ jest równoważna równości wartości na jego końcach [Utkin, 2014b], czyli:

$$Q^T(1)\frac{W}{1+r} = Q^T(2)\frac{W}{1+r}. \tag{15}$$

Nieosiągalna wypłata W nie spełnia równania (15). Zbiór wartości jej wyceny bezarbitrażowej $Q^TW/(1+r)$, gdzie $Q\in M$, jest przedziałem otwartym o końcach $Q^T(1)W/(1+r)$ i $Q^T(2)W/(1+r)$.

Dla wypłaty $W\in R^4$definiuje się cenę kupna i cenę sprzedaży [Dana i Jeanblanc, 2003]. W przypadku rynku łączonego są to odpowiednio liczby:

$$\begin{aligned} \underline{W_0} &= \min\left\{Q^T(1)\frac{W}{1+r}, Q^T(2)\frac{W}{1+r}\right\}, \\ \overline{W_0} &= \max\left\{Q^T(1)\frac{W}{1+r}, Q^T(2)\frac{W}{1+r}\right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie $Q(1)$, $Q(2)$ są określone za pomocą wzoru (11).

Wniosek 2. Na rynku łączonym zbiór wartości wyceny bezarbitrażowej wypłaty nieosiągalnej W jest przedziałem $(\underline{W_0}, \overline{W_0})$.

Podsumowując, dołączymy następującą oczywistą uwagę.

Uwaga 1. Wypłata W jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{W_0} = \overline{W_0}$.

W przypadku wypłaty osiągalnej W składniki formy liniowej Q^TW, zawierającej b, redukują się. Jeżeli mianowicie Q jest zgodne z (9), a z wzoru (14) wyznaczymy $W^4 = W^2 + W^3 - W^1$, to wartość tej formy liniowej jest równa:

$$Q^TW = (q_S + q_B - 1)W^1 + (1 - q_B)W^2 + (1 - q_S)W^3. \tag{17}$$

Dążenie do wskazania orientacyjnej, lecz jednoznacznie określonej, wyceny bezarbitrażowej każdej wypłaty nieosiągalnej polega na szukaniu rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego, który na danym rynku byłby najlepiej „dopasowany” do rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego. W literaturze przedmiotu [Cherubini, Luciano i Vecchiato, 2004, s. 22] jest przywołana metoda wyboru elementu zbioru rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego minimalizującego wariancję. Frittelli zbudował jednak przykład modelu rynku skończonego świadczący o braku równoważności rozkładów prawdopodobieństwa: rzeczywistego i martyngałowego minimalizującego wariancję [Frittelli, 2000, s. 50].

3. Minimalizacja względnej entropii

Wybór rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego przydatnego do orientacyjnej wyceny na niezupełnym rynku skończonym, który został zaproponowany przez Stutzera [1996], opiera się na minimalizacji entropii rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego względem rozkładu prawdopodobieństwa rzeczywistego.

W modelu rynku o różnych stanach końcowych entropia rozkładu prawdopodobieństwa Q względem rozkładu prawdopodobieństwa P jest określona wzorem [np. Utkin, 2010, s. 169]:

$$H(Q/P) = \sum_{i=1}^{4} Q^i \ln \frac{Q^i}{P^i}. \tag{18}$$

W przypadku rozkładów prawdopodobieństwa, danych za pomocą (4) i (11), względna entropia (18) jest funkcją zmiennej b (parametr a ma daną wartość), mianowicie:

$$H(Q/P) = f(b), \quad b_1 < b < b_2, \tag{19}$$

gdzie b_1, b_2 są określone za pomocą (10), zaś:

$$f(b) = b \ln \frac{b}{a} + (q_S - b) \ln \frac{q_S - b}{p_S - a} + (q_B - b) \ln \frac{q_B - b}{p_B - a} + \\ + (1 - q_S - q_B + b) \ln \frac{1 - q_S - q_B + b}{1 - p_S - p_B + a}. \tag{20}$$

Rozwiązaniu ogólnego problemu minimalizacji względnej entropii, który nie jest ograniczony do jednookresowego modelu rynku skończonego, jest poświęcona praca Frittelliego. Dla modelu jednookresowego udowodnił on istnienie dokładnie jednego optymalnego rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego równoważnego rozkładowi prawdopodobieństwa rzeczywistego [Frittelli, 2000, s. 42]. Wynika stąd, że funkcja (20) w przedziale (b_1,b_2) osiąga minimum w dokładnie jednym punkcie. Oznaczając ten punkt przez b_e, możemy napisać:

$$b_e = \arg \min_{b \in (b_1, b_2)} f(b). \tag{21}$$

W przedziale (b_1,b_2) funkcja (20) jest różniczkowalna. Ponieważ

$$f'(b) = \ln \frac{b(p_S - a)(p_B - a)(1 - q_S - q_B + b)}{a(q_S - b)(q_B - b)(1 - p_S - p_B + a)},$$

więc równanie:

$$f'(b) = 0) \tag{22}$$

można przedstawić w postaci:

$$nb^2 + mb + l = 0, \tag{23}$$

gdzie:

$$n = p_S p_B - a, \tag{24}$$

$$m = a^2 + (q_S + q_B - p_S - p_B)a + p_S p_B (1 - q_S - q_B), \tag{25}$$

$$l = -a q_S q_B (1 - p_S - p_B + a). \tag{26}$$

Pierwiastek (21) równania (23) wyznacza się rozwiązując równanie pierwszego lub drugiego stopnia.

W ważnym przypadku $k = 0$ zachodzi (7). Wtedy (23) redukuje się do odpowiedniego równania liniowego, skąd otrzymujemy:

$$b_e = q_S q_B. \tag{27}$$

Jeśli natomiast we wzorze (6) występuje $k\neq 0$, to (23) jest równaniem kwadratowym, w którym wyraz stały ma znak ujemny. Wtedy (23) ma dwa pierwiastki. Z twierdzenia Frittelliego wynika, że dokładnie jeden z nich spełnia warunek (21).

Po obliczeniu b_e wyznaczamy, zgodnie z (9), szukany element zbioru M.

Wniosek 3. Na rynku łączonym rozkładem prawdopodobieństwa martyngałowego, minimalizującym względną entropię, jest wektor Q_e, gdzie:

$$Q_e^T = \left(b_e, q_S - b_e, q_B - b_e, 1 - q_S - q_B + b_e\right). \tag{28}$$

Po wyznaczeniu rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego Q_e, możemy określić cenę entropową dowolnej wypłaty na rynku łączonym. Oznaczając cenę entropową wypłaty W przez $\Pi(W)$, otrzymujemy następujący wzór:

$$\Pi(W) = Q_e^T \frac{W}{1+r}. \tag{29}$$

Oczywiście $\Pi(W) \in \left(\underline{W_0}, \overline{W_0}\right)$.

4. Warunkowa minimalizacja entropii

Ogólna metoda poszukiwania rozkładu Q_e na rynku skończonym polega na rozwiązaniu zadania warunkowej minimalizacji entropii, w którym wykorzystuje się mnożniki Lagrange'a. W przypadku rynku łączonego warunki stanowią układ równań określających zbiór (9) [Utkin, 2014a]. W zbiorze $(0,+\infty)^4$ szukamy zatem wektora Q, który jest rozwiązaniem zadania:

$$\min H(Q/P), \tag{30}$$

przy warunkach:

$$\sum_{i=1}^{4} Q^i = 1, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q^i S_1^{k(i)} = (1+r)S_0, \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q^i B_1^{n(i)} = (1+r)B_0. \tag{33}$$

Wiadomo, że powyższy problem optymalizacyjny ma dokładnie jedno rozwiązanie Q_e. Wyrazimy je za pomocą mnożników Lagrange'a i wyznaczymy równania potrzebne do obliczenia tych mnożników. Niech α,β,γ oznaczają mnożniki Lagrange'a, odpowiadające kolejnym równaniom (31), (32), (33). Po przyrównaniu do zera pochodnej cząstkowej funkcji Lagrange'a po Q^i otrzymujemy równanie, które zapisujemy w postaci wykładniczej:

$$Q_e^i = P^i \exp(1-\alpha)\exp\left(-\beta S_1^{k(i)} - \gamma B_1^{n(i)}\right), \quad i = 1,2,3,4. \tag{34}$$

Korzystając z (31) eliminujemy z (34) mnożnik α, co prowadzi do równania:

$$Q_e^i = \frac{P^i \exp\left(-\beta S_1^{k(i)} - \gamma B_1^{n(i)}\right)}{\sum_{j=1}^{4} P^j \exp\left(-\beta S_1^{k(j)} - \gamma B_1^{n(j)}\right)}, \quad i = 1,2,3,4. \tag{35}$$

Po podstawieniu (35) do (32),(33) otrzymujemy układ równań na mnożniki β i γ, mianowicie:

$$\sum_{i=1}^{4} P^i \left(S_1^{k(i)} - (1+r)S_0\right)\exp\left(-\beta S_1^{k(i)} - \gamma B_1^{n(i)}\right) = 0, \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{4} P^i \left(B_1^{n(i)} - (1+r)B_0\right)\exp\left(-\beta S_1^{k(i)} - \gamma B_1^{n(i)}\right) = 0. \tag{37}$$

Obliczenie β i γ na podstawie równań (36) i (37) wymaga zastosowania metod numerycznych. Mnożniki te wyznaczymy w następnym punkcie, korzystając z twierdzenia o minimalnej entropii i z własności wypłat osiągalnych na rynku łączonym.

5. Konsekwencje twierdzenia o charakterystyce minimalnej entropii

Z twierdzenia o charakterystyce minimalnej entropii [Frittelli, 2000, s. 43] wynika, że w modelu jednookresowym o czterech stanach końcowych rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego Q_e minimalizuje względną entropię wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $W \in R^4$ i $c > 0$, spełniające układ równań:

$$Q_e^i = cP^i \exp\left(-W^i\right), \quad i = 1,2,3,4, \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q_e^i W^i = 0. \tag{39}$$

Idąc śladem sugestii równoważności minimalizacji entropii i beznakładowej maksymalizacji oczekiwanej użyteczności wykładniczej, poszukamy optymalnego portfela. W przypadku wykładniczej funkcji użyteczności, twierdzenie o rozkładzie prawdopodobieństwa martyngałowego generowanego przez wypłatę maksymalizującą oczekiwaną użyteczność majątku [Pliska, 2005, s. 41] pozostaje prawdziwe, gdy dziedzina jest zbiorem liczb rzeczywistych i portfel ma cenę równą zero.

Hipotetyczny inwestor ma zerowy budżet i funkcję użyteczności:

$$u(x) = d - g\exp(-x), \quad x \in R \tag{40}$$

gdzie $d \in R$ i $g > 0$ są dane. Inwestor działający na rynku łączonym szuka portfela o składzie χ_R, χ_S,χ_B, który ma cenę równą zero, czyli spełnia równanie:

$$\chi_R = -\chi_S S_0 - \chi_B B_0. \tag{41}$$

Wypłata portfela w i stanie (12) przyjmuje, po uwzględnieniu (14), postać:

$$W^i = \chi_S\left(S_1^{k(i)} - (1+r)S_0\right) + \chi_B\left(B_1^{n(i)} - (1+r)B_0\right), \; i = 1,2,3,4. \tag{42}$$

Użyteczność (40) wypłaty (42) jest równa:

$$u\left(W^i\right) = d - g\exp(\chi_S\left(-S_1^{k(i)} + (1+r)S_0\right) + \chi_B\left(-B_1^{n(i)} + (1+r)B_0\right)). \tag{43}$$

Inwestor szuka zatem portfela χ_R, χ_S,χ_B spełniającego (41) oraz rozwiązującego zadanie:

$$\max \sum_{i=1}^{4} P^i u\left(W^i\right), \tag{44}$$

gdzie użyteczność wypłaty jest określona wzorem (43).

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe poχ_S i po χ_B funkcji celu z zadania (44) otrzymujemy po zamianie zmiennych:

$$\chi_S = \beta, \; \chi_B = \gamma, \tag{45}$$

równania (36), (37). Po zamianie (45) równanie (41) ma postać:

$$\chi_R = -\beta S_0 - \gamma B_0. \tag{46}$$

Wypłata optymalna W generuje wówczas rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego określony za pomocą równania [Pliska, 2005, s. 41], które zapisane przy użyciu zmiennych (45), sprowadza się do:

$$Q = Q_e, \tag{47}$$

gdzie Q_e jest określone przez (35).

Wniosek 4. Rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego Q_e minimalizujący względną entropię na rynku łączonym jest równy rozkładowi prawdopodobieństwa martyngałowego generowanemu przez wypłatę portfela o składzie (45), (46), maksymalizującą oczekiwaną użyteczność wykładniczą majątku.

Uwaga 2. Zakładamy, że β i γ są obliczone na podstawie (36), (37). Wtedy wypłata W występująca w (38), (39) jest wypłatą optymalną określoną za pomocą (42), (45), (46). Stałą c możemy wyrazić wzorem:

$$c^{-1} = \exp\left((1+r)(\beta S_0 + \gamma B_0)\right) \sum_{j=1}^{4} P^j \exp\left(-\beta S_1^{k(j)} - \gamma B_1^{n(j)}\right).$$

Twierdzenie o charakterystyce minimalnej entropii w połączeniu z rezultatem punktu 3 może być zastosowane do analitycznego wyznaczenia ilości akcji i obligacji wielookresowych w portfelu optymalnym.

Wypłata W spełniająca równania (38), (39) ma w i stanie wartość równą:

$$W^i = H(Q_e / P) - \ln \frac{Q_e^i}{P^i}, \quad i = 1,2,3,4. \tag{48}$$

Jeżeli Q_e jest obliczone według metody przedstawionej w punkcie 3, to wypłata optymalna (48) jest znana. Wtedy po podstawieniu (45) i (48) do (42) otrzymujemy układ czterech równań liniowych z dwiema niewiadomymi β i γ.

$$\left(S_1^{k(i)} - (1+r)S_0\right)\beta + \left(B_1^{n(i)} - (1+r)B_0\right)\gamma = W^i, i = 1,2,3,4. \tag{49}$$

Wypłata każdego portfela jest osiągalna, więc W jako wypłata osiągalna na rynku łączonym spełnia równanie (14). Ponadto, cena wypłaty W jest równa zero, więc z równania (17) otrzymujemy:

$$(q_S + q_B - 1)W^1 + (1 - q_B)W^2 + (1 - q_S)W^3 = 0. \tag{50}$$

Dodając zatem do obu stron 4 równania układu (49) 1 równanie i odejmując 2 równanie i 3 równanie otrzymujemy tożsamość 0 = 0. Podobnie dodając do obu stron pomnożonych przez $(1-q_S)$ 3 równania układu (49) 1 równanie pomnożone przez (q_S+q_B-1) i 2 równanie pomnożone przez $(1-q_B)$ oraz uwzględniając związki (1) i (2), otrzymujemy tożsamość 0 = 0. Ostatecznie układ (49) sprowadza się do dwóch równań:

$$\begin{cases} \left(S_1^1 - (1+r)S_0\right)\beta + \left(B_1^1 - (1+r)B_0\right)\gamma = W^1, \\ \\ \left(S_1^1 - (1+r)S_0\right)\beta + \left(B_1^0 - (1+r)B_0\right)\gamma = W^2, \end{cases} \tag{51}$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{W^2(B_1^1 - (1+r)B_0) - W^1(B_1^0 - (1+r)B_0)}{(S_1^1 - (1+r)S_0)(B_1^1 - B_1^0)}, \\ \gamma &= \frac{W^1 - W^2}{B_1^1 - B_1^0}. \end{aligned} \tag{52}$$

Wniosek 5. Optymalny portfel zawiera: $\beta = \left[W^2(B_1^1 - (1+r)B_0) - W^1(B_1^0 - (1+r)B_0)\right] / \left[(S_1^1 - (1+r)S_0)(B_1^1 - B_1^0)\right]$ akcji i $\gamma = (W^1 - W^2)/(B_1^1 - B_1^0)$ obligacji wielookresowych oraz kwotę równą $(-\beta S_0 - \gamma B_0)$ na koncie bankowym.

Podsumowanie

Okazało się, że złożony problem minimalizacji względnej entropii w przypadku modelu łączonego [Utkin, 2014a] znacznie się upraszcza. Względna entropia jest taką funkcją jednej zmiennej, której minimum wyznacza się rozwiązując równanie pierwszego lub drugiego stopnia. Stąd otrzymuje się optymalny rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego wykorzystywany we wzorze ceny entropowej. Ogólna, warunkowa minimalizacja względnej entropii, która jest równoważna maksymalizacji oczekiwanej użyteczności wykładniczej majątku, prowadzi natomiast do dość skomplikowanych równań na mnożniki Lagrange'a, interpretowane jako inwestycje w akcje i w obligacje długoterminowe w portfelu optymalnym. Na podstawie znanego wcześniej optymalnego rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego oraz twierdzenia Frittelliego o charakterystyce minimalnej entropii, mnożniki Lagrange'a wyznacza się z układu dwóch równań liniowych.

Literatura

Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. (2004), *Copula Methods in Finance*, J. Wiley, Chichester.

Dana R.-A., Jeanblanc M. (2003), *Financial Markets in Continuous Time*, Springer, New York.

Frittelli M. (2000), *The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets*, „Mathematical Finance", Vol. 10.

Pliska S. (2005), *Wprowadzenie do matematyki finansowej*, WNT, Warszawa.

Stutzer M. (1996), *A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation*, „Journal of Finance", Vol. 51.

Utkin J. (2010), *Statyczne miary ryzyka i straty w skończonych modelach struktury terminowej*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.

Utkin J. (2014a), *Łączenie modeli o dwupunktowym rozkładzie prawdopodobieństwa*, Konferencja „Metody 2014" w Wiśle.

Utkin J. (2014b), *Metoda wyznaczania strategii uogólnionej osłony kwantylowej na skończonym rynku niezupełnym*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Wydziałowe UE w Katowicach", nr 207.

ENTROPY PRICE IN THE JOINED MARKET MODEL

Summary: The joined market model [Utkin, 2014a] is an incomplete one and has no arbitrage opportunities. It contains the non-attainable payoffs. While the attainable payoff has one price, the set of prices of the non-attainable payoff is there an open interval. First, we analyse the attainability of the payoffs in the joined market. The main aim of this paper is to determine the entropy as a function of the variable and to find its minimum as a solution of one or two degree equation. Using this solution we determine the optimal martingale probability distribution and we formulate the entropy price. Moreover, in case of the joined market, we consider the conditional entropy minimization and we obtain the relations between the Lagrange multipliers and the portfolio maximizing expected exponential utility of the payoff. Applying the minimal entropy characterization of minimal entropy [Frittelli, 2000] we determine the optimal portfolio by solving a linear equations system.

Keywords: relative entropy, joined market.