Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 324 · 2017

Włodzimierz Szkutnik

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Ekonomii
Katedra Metod Statystyczno-Matematycznych w Ekonomii
wlodzimierz.szkutnik@ue.katowice.pl

OPTYMALNY MOMENT TRANSAKCJI ZAMIANY AKCJI W MODELACH W CZASIE CIĄGŁYM I DYSKRETNYM

Streszczenie: W niniejszym artykule rozpatrzone zostało zadanie wyznaczenia optymalnego momentu sprzedaży jednej akcji (typu akcji) i zakupienia innej akcji. W modelu Blacka-Mertona-Schoelsa (w czasie ciągłym), a także w szczególnym przypadku w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina (dyskretny czas), zadanie to sprowadzone zostało do wyznaczenia optymalnego momentu dla sprzedaży akcji. Analiza dotyczy uzasadnienia wyboru optymalnego momentu sprzedaży jednej akcji i zakupu innej zgodnie ze strategią *buy and hold*.

Słowa kluczowe: optymalny moment zatrzymania, moment opuszczenia trywialnego kroku, *trader*.

JEL Classification: C41.

Wprowadzenie

W modelu Blacka-Mertona Schoelsa (B-M-Sch) i innych pracach [Gahungu i Smeers, 2011; Hu i Oksendal, 1998] rozpatruje się zadanie poszukiwania optymalnego momentu w przedziale czasu [0, T] dla jednoczesnego wykonania następujących operacji: sprzedaży akcji spółek 1, 2,…, *n* i zakupienia akcji spółek o numerach (*n*+1), …, (*n*+*m*). Wyznaczenie takiego momentu T, przy przyjętych założeniach, będzie celem prowadzonych w artykule rozważań.

W modelu B-M-Sch przyjmuje się, że zmiana ceny każdej akcji odpowiada geometrycznemu ruchowi Browna:

$$P_{i,t} = P_{i,0} \cdot e^{\mu_i t + \sigma_i \cdot B_{i,t}}$$

gdzie $P_{i,t}$ – cena akcji spółki o numerze i, które *trader* chce odsprzedać lub kupić (ustalona liczba akcji), w momencie t (stała przy $t = 0$),
μ_i, σ_i – pewne stałe,
$B_{i,t}$ – wienerowski proces z numerem i , przy czym procesy wienerowskie $B_{i,t}$ mogą być ze sobą skorelowane, a dokładniej każdy z nich ważony stałą σ można wyrazić jako kombinację liniową wienerowskich procesów $W_{i,t}$, $i = 1, \dots, n + m$:

$$\sigma \cdot W_{i,t} = k_{i,1} \cdot W_{1,t} + \dots + k_{i,n+m} \cdot W_{n+m,t}$$

gdzie wienerowskie procesy W_i są parami niezależne.

Prowadzi to do stwierdzenia, że uważając za optymalny taki moment, kiedy zysk od wskazanych wyżej operacji jest maksymalny (lub minimalny), przy uwzględnieniu dyskontowania w czasie, zadanie wyznaczenia optymalnego momentu sprzedaży jednej akcji (typu akcji) i zakupienia innej akcji można sformułować następująco:

$$V = \sup_{0 \le \tau \le T\ p.n.} E\left(e^{-r\tau}\left(\sum_{i=1}^{n} P_{i,\tau} - \sum_{i=n+1}^{n+m} P_{i,\tau}\right)\right), \tag{1}$$

gdzie:
τ – moment zatrzymania transakcji,
r – stopa dyskontowania,
$P_{i,\tau}$ – cena akcji spółki z numerem i, którą *trader* może sprzedać lub kupić w momencie τ.

Postawione w ten sposób zadanie prowadzi do interpretacji, że konieczne jest sprzedanie i nabycie ustalonej ilości jednostek akcji każdej ze spółek. Na rynku akcji może to być aktualne, jeśli dla dużego inwestora istotne jest rozporządzać określonym progowym pakietem akcji, np. kontrolnym (50% i jedna akcja). W takim przypadku jednak nieprawdopodobne jest kupno lub odsprzedaż wszystkich akcji po cenie rynkowej w momencie zlecenia takiej transakcji (w momencie zamiany τ).

Inną nieczęstą sytuację spotykamy w praktyce, gdy kapitał *tradera* jest niewielki w porównaniu z ceną akcji i przy zwykłych wahaniach ceny wie on dokładnie, jaką ilość akcji powinien koniecznie kupić lub sprzedać.

W dalszych wywodach założono, że kapitał *tradera* spełnia następujące dwa warunki:

1. Kapitał *tradera* jest o pewien rząd wielkości większy niż cena akcji. Wtedy ilość akcji (bo może być to tylko część pakietu akcji) sprzedawaną lub odkupowaną przez *tradera* można uważać za racjonalną i błąd takiego modelu będzie niewielki.
2. Kapitał *tradera* nie jest aż tak duży, aby zrealizowanie transakcji równej jego wartości po cenie rynkowej (lub z nieznacznymi odchyleniami od tej ceny) było niemożliwe. Bez tego założenia wyznaczenie optymalnego momentu na podstawie modelu zmian cen w zwykłych rynkowych warunkach byłoby bez znaczenia (bo kupowałby po każdej cenie).

1. Wybór momentu optymalnego wykonania transakcji zamiany akcji

Przy wyżej wymienionych warunkach możliwy jest wybór momentu dla sprzedaży jednych akcji i odkupienia innych w przypadku *n = 1*, *m = 1*.

Z założenia wynika, że w zerowym momencie *trader* dysponuje akcjami spółki *1* i w przedziale czasu [0,T] może sprzedać te akcje oraz odkupić akcje spółki *2*. Należy zauważyć, że naturalne jest przeznaczenie na akcje spółki *2* wszystkich środków uzyskanych ze sprzedaży (jest to możliwe i wynika z założenia (1)), a nie dokonanie wcześniej zakupu ustalonej liczby akcji, ponieważ zwykle akcje nie są celem samym w sobie, a tylko instrumentem zainwestowania środków pieniężnych. Zatem istotne jest określenie dla takiej sytuacji optymalnego momentu.

Należy przyjąć, że *trader* dąży do maksymalizacji w swoim portfelu liczby akcji spółki *2* na moment *T*, lub, co jest tym samym, na moment zakupu tych akcji. Na przykład, właśnie liczba akcji może być ważna, jeśli po momencie *T* będzie wypłacana dywidenda. Wtedy mamy następujące zadanie optymalnego zatrzymania inwestycji

$$V = \sup_{0\le\tau\le T\ p.n.} E\left(\frac{P_{1,\tau}}{P_{2,\tau}}\right) = \sup_{0\le\tau\le T\ p.n.} E\left(e^{\mu_1\cdot\tau+\sigma_1\cdot B_{1,\tau}-(\mu_2\cdot\tau+\sigma_2\cdot B_{2,\tau})}\right) \quad (2)$$

Rozszerzając, analogicznie do zadania ze sprzedażą akcji jednej spółki [Shiryaev, Xu i Zhou, 2008], interesujące i w praktyce istotne jest zadanie maksymalizacji w średniej liczby akcji nie jako takiej (*per se*), a względem absolutnego maksimum w całym przedziale [0, *T*] (która zostanie poznana *ex post*, tzn. tylko po zakończeniu tego przedziału czasowego). Wtedy zadanie optymalnego zatrzymania przyjmie postać:

$$V = \sup_{0\le\tau\le T\ p.n.} E\frac{P_{1,\tau}/P_{2,\tau}}{\sup\limits_{0\le t\le T\ p.n.} P_{1,t}/P_{2,t}} =$$

$$= \sup_{0\le\tau\le T\ p.n.} E\left(e^{\mu_1\cdot\tau+\sigma_1\cdot B_{1,\tau}-(\mu_2\cdot\tau+\sigma_2\cdot B_{2,\tau})-\sup\limits_{0\le t\le T\ p.n.}(\mu_1\cdot t+\sigma_1\cdot B_{1,t}-(\mu_2\cdot t+\sigma_2\cdot B_{2,t}))}\right) \quad (3)$$

2. Równoważność procesu stosunku cen dwóch akcji z procesem zmiany ceny pewnej jednej akcji

W obecnie rozważanym problemie będzie pokazane, że zadania (2), (3) i wiele innych, które dla pewnych celów odnoszą się do stosunku cen dwóch akcji, można sprowadzić do zadań operujących ceną tylko jednej akcji. Wykazanie tego [Worobiew, 2013] jest ważnym elementem analizy w wycenie cen akcji i sprowadza się do utożsamiania ceny akcji, wyrażonej w jednostkach innej akcji, z tym samym procesem losowym, co cena akcji, wyrażona w pieniężnych jednostkach. Jest to w różnych analizach całkiem naturalne i wygodne, m.in. w interpretacji wyników.

W dokładniejszym wyrażeniu tego związku oznacza to, że stosunek cen dwóch akcji jest równoważny procesowi opisującemu zmianę ceny pewnej innej akcji.

W formule procesowej będzie wyrażało to równanie:

$$(e^{\mu_1 \cdot t + \sigma_1 \cdot B_{1,t} - (\mu_2 \cdot t + \sigma_2 \cdot B_{2,t})})_{t \in [0,\infty)} = (e^{\mu \cdot t' + B_{t'}})_{\,t' \in [0,\infty)}, \tag{4}$$

gdzie B_t – proces Wienera, $t' = \left(\left(k_{1,1} - k_{2,1}\right)^2 + \left(k_{1,2} - k_{2,2}\right)^2\right) \cdot t\,, \mu =$ $= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\left((k_{1,1} - k_{2,1})^2 + (k_{1,2} - k_{2,2})^2\right)}$.

Przekonujące wyprowadzenie ceny „tej” pewnej akcji, wyrażonej po prawej stronie równania (4), wynika ze stwierdzenia, że proces:

$$A_t = \sigma_1 \cdot B_{1,t} - \sigma_2 \cdot B_{2,t}$$

jest iloczynem stałej i procesu Wienera.

Zarówno wartość oczekiwana, jak i moment centralny rzędu drugiego odpowiadają założeniom procesu Wienera:

$$E\left(\sigma_1 \cdot B_{1,t} - \sigma_2 \cdot B_{2,t}\right) = 0,$$

$$E\left(\sigma_1 \cdot B_{1,t} - \sigma_2 \cdot B_{2,t}\right)^2 = E\left(k_{1,1} \cdot W_{1,t} - k_{1,2} \cdot W_{2,t} - \ (k_{2,1} \cdot W_{1,t} - k_{2,2} \cdot \cdot W_{2,t})\right)^2 = E\left(\left(k_{1,1} - k_{2,1}\right) \cdot W_{1,t} + \left(k_{1,2} - k_{2,2}\right) \cdot W_{2,t}\right)^2 = \left(\left(k_{1,1} - k_{2,1}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(k_{1,2} - k_{2,2}\right)^2\right) \cdot t\,,$$

ponieważ $W_{1,t}$ i $W_{2,t}$ są niezależne i $\mathrm{E}(W_{1,t} \cdot W_{2,t}) = 0$.

Wynika to ze wspomnianej we wstępie własności, że wienerowskie procesy mogą być skorelowane między sobą i wyrażone w postaci liniowej kombinacji parami niezależnych procesów Wienera.

Także, co jest oczywiste, przyrosty procesu $(A_t)_{t \in [0.\infty)}$ są niezależne, a zatem można to zapisać zgodnie z notacją procesów Wienera:

$$(A_t)_{t\in[0.\infty)} = \left(\sqrt{\left(k_{1,1}-k_{2,1}\right)^2+\left(k_{1,2}-k_{2,2}\right)^2}\cdot B_t\right)_{t\in[0.\infty)} =$$
$$=^{law}\left(B_{\left(\left(k_{1,1}-k_{2,1}\right)^2+\left(k_{1,2}-k_{2,2}\right)^2\right)\cdot t}\right)_{t\in[0.\infty)},$$

gdzie B_t – proces Wienera.

Zatem stosunek cen akcji można wyrazić jako cenę „pewnej" akcji z określonymi parametrami μ oraz σ:

$$(e^{\mu_1\cdot t+\sigma_1\cdot B_{1,t}-(\mu_2\cdot t+\sigma_2\cdot B_{2,t})})_{t\in[0,\infty)} =$$
$$=\left((e^{(\mu_1-\mu_2)\cdot t+\sigma_1\cdot B_{1,t}-(\mu_2\cdot t+B_{\left(\left(k_{1,1}-k_{2,1}\right)^2+\left(k_{1,2}-k_{2,2}\right)^2\right)\cdot t})}\right)_{t\in[0,\infty)}$$
$$=\left((e^{\mu\cdot t'+B_{t'}})_{t'\in[0,\infty)}\right),$$

gdzie $t'=\left(\left(k_{1,1}-k_{2,1}\right)^2+\left(k_{1,2}-k_{2,2}\right)^2\right)\cdot t$, $\mu=\frac{\mu_1-\mu_2}{\left(\left(k_{1,1}-k_{2,1}\right)^2+\left(k_{1,2}-k_{2,2}\right)^2\right)}$,

co potwierdza zależności sformułowane w relacji (4) oraz tezę, że stosunek cen dwóch akcji jest równoważny procesowi opisującemu zmianę ceny pewnej innej akcji.

Powyższy wywód dookreśla znane rezultaty dla zadań z jedną akcją, będące analogonem zadań (2) i (3) [Yam, Yung i Zhou, 2012]. Dają one poszukiwany moment zatrzymania inwestycji w celu dokonania transakcji w zależności od wielkości μ. Zatem mogą być te rezultaty przeniesione na zadania (2), (3), z poszukiwanym momentem zatrzymania zależnym od wielkości:

$$\frac{\mu_1-\mu_2}{\left(\left(k_{1,1}-k_{2,1}\right)^2+\left(k_{1,2}-k_{2,2}\right)^2\right)}.$$

Wyniki zaprezentowane w aspekcie poszukiwania optymalnego momentu zatrzymania inwestycji w celu wymiany akcji w portfelu znajdują tu interesujący kontekst teoretyczny i aspekt zastosowań, tym bardziej że potwierdzają rezultaty znane z literatury, otrzymane dla jednej tylko akcji. Oparcie się na modelu zmiany ceny, przebiegającym według procesu geometrycznego ruchu Browna, opisanego w modelu Blacka-Mertona-Schoelsa, nie jest jedynym możliwym ujęciem zagadnienia wyznaczenia optymalnego momentu sprzedaży jednej akcji i kupna drugiej. Ponadto w tym przypadku zmiany cen akcji modelowane są w czasie ciągłym. Niekiedy bardziej uzasadnione jest modelowanie uwzględniające dyskretne zmiany czasu. Tak jest w wielu modelach, a w szczególności w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina. Krótką charakterystykę wyznaczenia momentu zatrzymania w tym przypadku przedstawiono w następnej części artykułu.

3. Optymalny moment dekompozycji inwestycji w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina

Problem sformułowany w rozdziale 1, dotyczący wyznaczania optymalnego momentu zmiany składu portfela, analogiczny do zadań (2) i (3), w którym dla zadań jednej akcji również są różne rezultaty, można rozważyć w modelu formalnie bardziej zaawansowanym, jakim jest model C-R-R. Wprowadzenie w wykładniku expotencjalnej ceny akcji z modelu B-M-S, zamiast procesu ruchu Browna procesu błądzenia losowego, prowadzi do modelu z dyskretnym czasem, nazywanego modelem Coxa-Rossa-Rubinsteina (C-R-R). Mówi się wtedy o tzw. rynku C-R-R i wykazuje, że jeśli rynek ten jest wolny od arbitrażu, to jest zupełny [Szkutnik, 2012].

W modelu C-R-R przyjęto, że:

$$P_{i,k} = P_{i,0} \cdot \exp\left(S_{i,k}\right),$$

$$S_{i,0} = 0, S_{i,k}\left(X_{i,1} + \cdots + X_{i,k}\right), P\left(X_{i,j} = a_i\right) = p_i \,, P\left(X_{i,j} = -\,a_i\right) = 1 - \, p_i \,,$$

gdzie:

$X_{i_{1,j_1}}, X_{i_{2,j_2}}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi przy $j_1 \neq j_2$, które mogą być zależne przy $j_1 = j_2$,

$a_i > 0,\ p_i \in [0,1]$ – są pewnymi stałymi.

Przede wszystkim zauważyć można, że dla stosunku cen dwóch akcji nie otrzymuje się tutaj wyniku analogicznego do wyniku procesowego (4). Bowiem otrzymujemy:

$$\frac{P_{1,k}}{P_{2,k}} = \frac{P_{1,0}}{P_{2,0}} e^{S_{1,k} - S_{2,k}} = \frac{P_{1,0}}{P_{2,0}} \cdot \left(e^{\left(X_{1,1} - X_{2,1}\right) + \cdots + \left(X_{1,k} - X_{2,k}\right)}\right),$$

gdzie $X_{1,j} - X_{2,j} = \begin{cases} a_1 + a_2 \,, p_1 - \, p_{++} \\ a_1 - a_2 \,, p_{++} \\ -a_1 + a_2 \,, 1 + \, p_{++} - p_1 - p_2 \\ -a_1 - a_2 \,, p_1 - \, p_{++} \end{cases}$

natomiast $p_{++} = P\left(X_{1,j} = a_1,\ X_{2,j} = a_2\right)$.

Proces ten składa się już z 4 wariantów kroków: 2 różne kroki w górę i 2 równe im względem absolutnych wartości – w dół. Dlatego nie można natychmiast przenieść wyników, znanych dla zadań z jedną akcją w ramach danego modelu, na odpowiednie zadania ze stosunkiem cen dwóch akcji.

Można jednak wykazać, że pewne wyniki przenoszą się. Dotyczy to przypadku $a_1 = a_2$ [Worobiew, 2013], tzn. wtedy, gdy losowe błądzenie cen dwóch akcji ma jednakowe kroki i proces, równy ich różnicy, w każdym momencie kieruje się do góry lub do dołu albo pozostaje na miejscu.

3.1. Optymalne zatrzymanie inwestycji w procesie C-R-R

Dla wprowadzenia w zagadnienie określenia momentu zatrzymania inwestycji dla celów zamiany akcji niezbędne jest wprowadzenie pewnych określeń formalnych i założeń.

Niech S_k -losowe błądzenie, w którym każdy krok może z niezerowym prawdopodobieństwem przyjąć zerowe wartości. Ponadto niech dana jest para $(\tau(\omega), \omega)$, gdzie ω – pewna trajektoria procesu S_k na pewnym przedziale [0, *N*], pozostająca w miejscu w kroku m (ten krok równy jest zero), a $\tau(\omega)$ – wartość pewnego momentu zatrzymania procesu na tej trajektorii.

Następujące dwa pojęcia: „opuszczenie trywialnego kroku" i „niezmiennicza funkcja względem trywialnego kroku" będą często pomocne przy określeniu momentu zatrzymania inwestycji.

Opuszczenie trywialnego kroku

Opuszczenie trywialnego kroku m oznacza takie przekształcenie pary $(\tau(\omega), \omega)$, przy którym krok m ucina się, momenty m – 1 i m łączą się wespół, ω przechodzi w trajektorię ω' procesu S_k na przedziale [0, *N*-1], a $\tau(\omega)$ przechodzi w moment zatrzymania $\tau'(\omega')$:

$$\tau'(\omega') = \begin{cases} \tau(\omega)\text{, jeśli } \tau(\omega) < m; \\ \tau(\omega) - 1\text{, jeśli } \tau(\omega) \geq m. \end{cases}$$

Ponadto przyjmiemy oznaczenia wartości procesu *S*, w pewnym momencie *k* na trajektorii ω będziemy oznaczać ω_k. Wtedy, co jest oczywiste, $\omega'_{\tau'} = \omega_\tau$. Prawdopodobieństwo otrzymania trajektorii ω' otrzymuje się w wyniku podzielenia wyjściowego prawdopodobieństwa ω tego, że proces S_k pozostanie w miejscu w kroku *m*:

$$P(\omega') = \frac{P(\omega)}{P(X_{m_0}=0)}$$

Niezmienniczość względem opuszczenia trywialnego kroku

Funkcję $f(\tau, \omega)$, określoną na parze (τ, ω) dla dowolnego przedziału [0,*N*] nazywa się niezmienniczą względem opuszczenia trywialnego kroku, jeśli $f(\tau, \omega) = f(\tau', \omega')$.

3.2. Moment zatrzymania inwestycji dwu akcyjnej

Przechodząc do określenia momentu zatrzymania inwestycji dla celów zamiany akcji, wprowadzono jeszcze dodatkowe założenia.

Niech $S_k = X_1 + \cdots + X_k, S'_k = X'_1 + \cdots + X'_k,$
gdzie:

$$X_j = \begin{cases} a, p \\ -a, q = 1 - p \end{cases}$$

$$X'_j = \begin{cases} a,\ p' \\ 0, 1 - p' \\ -a\ q' \end{cases}$$

przy czym:

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$$

Zadanie optymalnego zatrzymania ma postać:

$$V = sup_{0 \leq \tau \leq T\ p.n.} Ef(\tau, (S_k)_{k=1\ldots N}, \quad (5)$$

przy czym wiadomo, że *f* funkcja niezmiennicza względem opuszczenia trywialnego kroku i wiadomo, że jednym z optymalnych momentów (jedynym optymalnym momentem) jest albo moment $\tau^* = 0, \text{p. n.}$ dla każdego *N*, albo $\tau^* = N, \text{p. n.}$ dla każdego N.

Wykazuje się [Worobiew, 2013], że przy przyjętych założeniach zadanie (5) jednym z optymalnych momentów zakończenia procesu inwestycji (lub jedynym optymalnym momentem) jest proces S'_k z dokładnością do stałej, co nie zmienia momentu zatrzymania.

Strategia inwestycyjna *buy and hold* okazuje się właściwa (w dłuższej perspektywie przyjmowana jako dająca pozytywną stopę zwrotu) w przeciwieństwie do strategii „kupuj i sprzedawaj” odpowiednio do koncepcji wejścia na rynek w momencie upadku i wyjścia, czyli zamiany lub całkowitej sprzedaży w momencie wzrostów. Wyczucie rynku często zawodzi, dlatego korzystniej stosować strategię „kup i trzymaj”.

Podsumowanie

Wyniki analizy przeprowadzonej w artykule, szczególnie na podstawie modelu C-R-R wskazują, że dla $\tau = 0$ lub $\tau = N_0$ prawie na pewno (z prawdopodobieństwem 1), znane dla zadań z jedną akcją dla losowego błądzenia w postaci

S_k (krok w górę lub w dół) i dla funkcji niezmienniczych względem opuszczenia kroku trywialnego [Yam, Yung i Zhou, 2012] mogą być przeniesione na przypadek procesu S'_k (krok w górę, w dół lub pozostanie w miejscu, co odpowiada regule *buy and hold*. Zatem strategia ta może być przeniesiona na przypadek dwóch typów akcji, kiedy losowe błądzenie tych akcji mają jednakowy krok.

Przeprowadzone analizy mogą być relatywnie łatwo zweryfikowane empirycznie. Wymaga to przeprowadzenia symulacji dla danych wygenerowanych przy spełnieniu przyjmowanych w rozważaniach założeń lub sprawdzone na przykładzie empirycznych notowań wybranych akcji z zachowaniem wymogów stawianych w modelu C-R-R.

Literatura

Gahungu J., Smeers Y. (2011), *Optimal Time to Invest When the Price Processes Are Geometric Brownian Motion. A Tentative Based on Smooth Fit*, CORE Discussion Paper, No. 34.

Hu Y., Oksendal B. (1998), *Optimal Time to Invest When the Price Processes Are Geometric Brownian Motion*, "Finance and Stochastics", No. 2, s. 295-310.

Shiryaev A.N., Xy Z., Zhou X.Y. (2008), *Thou Shalt Buy and Hold*, "Quantitative Finance", No. 8, s. 765-776.

Szkutnik W. (2012), *Modele sekurytyzacji na rynkach finansowych i hedging jako opcja w warunkach nieokreśloności* [w:] *Sekurytyzacja modelowa ryzyka i hedging inwestycji kapitałowych. Wybrane modele dynamiczne w aspekcie ekonomicznym i demograficznym*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.

Worobiew A.L. (2013), *Optymalny moment dla sprzedaży jednej akcji i zakupu drugiej* [w:] A.N. Sziriajew, A.W. Lebedew (red.), *Współczesne problemy matematyki i mechaniki. Tom VIII. Matematyka*, wyd. 3, MSU Press, Moscow, s. 36-41.

Yam S.C.P., Yung S.P., Zhou W. (2012), *Optimal Selling Time in Stock Market over a Finite Time Horizon*, "Acta Mathematicae Applicatae Sinica. English Series", Vol. 28, Iss. 3, s. 557-570.

THE OPTIMAL TIME FOR EXCHANGE OF SHARES DURING SALE AND PURCHASE OF SHARES

Summary: It will be considered task of determining the optimal timing of sales per share (such as shares) and purchase another share. In the Black-Merton-Schoels (in continuous time), as well as in the particular case of the model of Cox-Ross-Rubinstein (discrete time), the task is reduced to determine the optimal timing for the sale of shares).

Keywords: optimal stopping moment, the optimal time for stopping, trader.