Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 331 · 2017

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Zarządzania
k.piasecki@ue.poznan.pl

RODZINA EFEKTYWNYCH INSTRUMENTÓW FINANSOWYCH DANA JAKO INTUICYJNY ZBIÓR ROZMYTY[1]

Streszczenie: Efektywnym nazywamy taki instrument finansowy, który spośród wszystkich instrumentów finansowych o identycznej ocenie ryzyka wyróżnia się maksymalną oczekiwaną stopą zwrotu. Zbiór efektywnych instrumentów finansowych można też określić za pomocy aparatu formalnego porównań wielokryterialnych. Stosując to podejście, określamy dwa preporządki na zbiorze wszystkich instrumentów finansowych. Preporządki te to kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu i kryterium minimalizacji wariancji. Zbiorem efektywnych instrumentów nazywamy optimum Pareto określone dla porównania wielokryterialnego zdefiniowanego przez wymienione powyżej preporządki. W pracy jest rozważany przypadek, kiedy oczekiwana stopa zwrotu jest dana jako intuicyjny zbiór rozmyty. Wyznaczony w ten sposób intuicyjny zbiór rozmyty efektywnych instrumentów finansowych jest uogólnieniem pojęcia krzywej efektywnych instrumentów zdefiniowanej na gruncie klasycznej teorii Markowitza.

Słowa kluczowe: nieprecyzyjna stopa zwrotu, efektywność finansowa, intuicyjny zbiór rozmyty.

JEL Classification: G19.

Wprowadzenie

Podstawowym przedmiotem rozważań analizy kapitałowej jest stopa zwrotu. Stopa ta jest wyznaczona za pomocą wartości bieżącej (PV) i przewidywanej wartości przyszłej (FV). W zgodzie z tezą o niepewności [Mises, 1962; Kaplan,

[1] Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/HS4/03543.

Barish, 1967] każdy przyszły przepływ finansowy jest niepewny. Z tego powodu FV przedstawiana jest jako zmienna losowa. PV jest identyfikowana z teraźniejszym ekwiwalentem płatności dostępnej w nie wcześniej ustalonym momencie. Z tego powodu PV zaczęła być szacowana jako wartość nieprecyzyjna.

Propozycja przedstawienia PV nieprecyzyjnie oszacowanej jako liczby rozmytej jest już dobrze ugruntowaną ideą. Przekrojowy przegląd literatury poświęconej tej tematyce znaleźć można na przykład w pracy Piaseckiego [2011a]. Tam też wykazano, że dla dowolnych rozmytej PV i losowej FV stopa zwrotu jest opisana za pomocą rozmytego zbioru probabilistycznego. Możliwości zastosowania tak oszacowanych stóp zwrotu do podejmowania decyzji inwestycyjnych opisano w pracach Piaseckiego [2011a, 2011b, 2014].

W artykule [Piasecki, 2013] uzasadniono na gruncie ekonomii przykład PV oszacowanej nieprecyzyjnie jako intuicyjny zbiór rozmyty (IFS[2]). Konsekwencją tego jest przedstawienie [Piasecki, 2015a, 2015b] stopy zwrotu, która jest wyznaczana z zastosowaniem intuicyjnej rozmytej PV i losowej FV. Wykazano tam między innymi, że tak wyznaczona stopa zwrotu jest probabilistycznym IFS opisanym w pracy [Zhang, Jia, Jiang, 2009]. Każdą stopę zwrotu daną jako probabilistyczny IFS nazywać będziemy intuicyjnie rozmytą stopą zwrotu (IFRR[3]). Obszerny numeryczny przykład takiego modelu wraz z merytorycznym uzasadnieniem znajdujemy w pracy Piaseckiego [2016]. Kolejny przykład IFRR przedstawiono w artykule Echausta i Piaseckiego [2016]. Uzasadniono tam sugestię, że w modelu Blacka-Littermana [Black, Litterman, 1991] stopa zwrotu *a posteriori* może być wyznaczona jako IFRR.

Prace Piaseckiego [2015a, 2015b] pokazują, że oczekiwana IFRR jest IFS. Tamże analizowano ryzyko obarczające IFRR i przedstawiono czterowymiarowy ilościowy obraz tego ryzyka. Pozwala to na sformułowanie zadania minimalizacji ryzyka za pomocą czterokryterialnego porównania. To zadanie minimalizacji ryzyka jest uogólnieniem znanego z klasycznej teorii Markowitza [1952] zadania minimalizacji wariancji. Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie zbioru efektywnych instrumentów finansowych jako optimum Pareto określonego dla porównania dwukryterialnego zdefiniowanego przez kryterium maksymalizacji oczekiwanej IFRR i kryterium minimalizacji ryzyka.

---

[2] Od ang. Intuitionistic Fuzzy Set.
[3] Od ang. Intuitionistic Fuzzy Return Rate.

1. Wybrane elementy teorii IFS

W celu nadania powyższym rozważaniom jednoznacznego charakteru zostaną przedstawione tutaj wybrane podstawowe pojęcia teorii IFS.

Punktem odniesienia do tego opisu jest rodzina $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ wszystkich rozmytych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}$. Każdy podzbiór rozmyty $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ jest opisany za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_A \in [0,1]^{\mathbb{X}}$. W ujęciu logik wielowartościowych wartość $\mu_A(x)$ funkcji przynależności jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \in A$.

Atanassov [Atanassov, Stoeva, 1985] zdefiniował pojęcie IFS A jako zbiór trójek uporządkowanych

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)): x \in \mathbb{X}\}, \tag{1.1}$$

gdzie funkcja wykluczenia $\nu_A \epsilon [0,1]^{\mathbb{X}}$ spełnia tożsamościowo warunek

$$\nu_A(x) \leq 1 - \mu_A(x). \tag{1.2}$$

W ujęciu logik wielowartościowych wartość $\nu_A(x)$ funkcji wykluczenia jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \notin A$. Za pomocą symbolu $\mathcal{I}(\mathbb{X})$ oznaczamy rodzinę wszystkich IFS przestrzeni $\mathbb{R}$.

Korzystając z określonych powyżej funkcji przynależności i wykluczenia możemy teraz za pomocą tożsamości

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \tag{1.3}$$

określić funkcję nierozstrzygnięcia $\pi_A \in [0,1]^{\mathbb{X}}$. Wartość $\pi_A(x)$ określa stopień naszego niezdecydowania co do oceny wzajemnych relacji pomiędzy elementem $x \in \mathbb{X}$ a $A \in \mathcal{I}(\mathbb{X})$. Z tej przyczyny funkcja nierozstrzygnięcia π_A może być interpretowana jako obraz niepewności w ujęciu Knighta [1921].

Za Atanassovem [1993], dla dowolnego IFS $A \epsilon \mathcal{I}(\mathbb{X})$ określamy największy zbiór rozmyty $\Box A \subset A$ i najmniejszy zbiór rozmyty $\Diamond A \supset A$. Mamy tutaj

$$\Box A = \{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)): x \in \mathbb{X}\}, \tag{1.4}$$

$$\Diamond A = \{(x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x)): x \in \mathbb{X}\}. \tag{1.5}$$

Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ działania teoriomnogościowe są zdefiniowane w następujący sposób:[4]

$$A^C = \{(x, \nu_A(x), \mu_A(x)): x \in \mathbb{X}\}, \tag{1.6}$$

$$A \cup B = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)): x \in \mathbb{X}\}, \tag{1.7}$$

$$A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)): x \in \mathbb{X}\}. \tag{1.8}$$

[4] Dla dowolnej pary $a, b \in \mathbb{R}$ przyjmujemy oznaczenia $a \wedge b = \min\{a, b\}$ i $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Ze względu na zakres prowadzonych rozważań opis miar wybranych właściwości IFS ograniczymy do przypadku podzbiorów przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Dowolny IFS $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ nazywać będziemy intuicyjnym oszacowaniem. W przeprowadzonych rozważaniach podstawowym narzędziem pomiaru wszelkiego rodzaju ryzyka będzie unormowana miara IFS określona dla $A \epsilon \mathcal{I}(\mathbb{R})$ przez zależność

$$m(A) = \lim_{y \to +\infty} \frac{\int_{-y}^{y} \mu_A(x) dx}{1 + \int_{-y}^{y} \mu_A(x) dx}. \tag{1.9}$$

Na dowolnym zbiorze $\mathbb{K} \subset \mathcal{I}(\mathbb{R})$ intuicyjnych oszacowań definiujemy relację $X \succcurlyeq Y$, co czytamy:

Intuicyjne oszacowanie X jest większe
lub równe intuicyjnemu oszacowaniu Y. (1.10)

Relacja ta jest intuicyjnie rozmytym preporządkiem określonym przez swe funkcję przynależności $\mu_{\succcurlyeq} \in [0,1]^{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}$ i funkcję wykluczenia $\nu_{\succcurlyeq} \in [0,1]^{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}$ wyznaczone za pomocą tożsamości

$$\mu_{\succcurlyeq}(X,Y) = \sup\{\mu_X(u) \wedge \mu_Y(v): u \geq v\}. \tag{1.11}$$

$$\nu_{\succcurlyeq}(X,Y) = \inf\{\nu_X(u) \vee \nu_Y(v): u \geq v\}. \tag{1.12}$$

Relację tę zestawiamy z dowolnym nierozmytym preporządkiem[5] $Q \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ opisanym przez swą funkcję charakterystyczną $\chi_Q \in 2^{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}$.

Wyznaczmy teraz optimum Pareto zdeterminowane przez porównanie wielokryterialne złożone z preporządków $\succcurlyeq$ i Q.

Twierdzenie: Zbiór optimum Pareto wyznaczone przez zdefiniowane preporządki $\succcurlyeq$ i Q jest IFS $M \in \mathcal{I}(\mathbb{K})$ określonym przez swą funkcję przynależności $\mu_M \in [0,1]^{\mathbb{K}}$ i funkcję wykluczenia $\nu_M \in [0,1]^{\mathbb{K}}$ wyznaczone za pomocą tożsamości

$$\mu_M(X) = \inf\left\{ \left(\mu_{\succcurlyeq}(X,Y) \wedge \chi_Q(X,Y)\right) \vee \nu_{\succcurlyeq}(Y,X): Y \epsilon \mathbb{K}\right\}. \tag{1.13}$$

$$\nu_M(X) = \sup\left\{ \left(\nu_{\succcurlyeq}(X,Y) \vee \left(1 - \chi_Q(X,Y)\right)\right) \wedge \mu_{\succcurlyeq}(Y,X): Y \epsilon \mathbb{K}\right\}. \tag{1.14}$$

Dowód: Rozważamy porównanie wielokryterialne $(\succcurlyeq \cap\, Q)$ określone na zbiorze $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Porównanie to wyznacza ostry porządek

$$\succ = (\succcurlyeq \cap\, Q) \cap ((\succcurlyeq \cap\, Q)^{-1})^C.$$

[5] W rozumieniu podanym w pracy Piaseckiego [2013].

Optimum Pareto jest zbiorem elementów maksymalnych porównania $(\succcurlyeq \cap Q)$. Zatem zgodnie z definicją elementu maksymalnego optimum Pareto zapisujemy, jako zbiór

$M = \{X \in \mathbb{K}: \forall_{Y\in\mathbb{K}}: \neg Y \succ X\} = \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\{X \in \mathbb{K}: \neg Y \succ X\}$=$\bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\{X \in \mathbb{K}: Y \succ X\}^C$=

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\left\{X \in \mathbb{K}: Y\left((\succcurlyeq \cap Q) \cap ((\succcurlyeq \cap Q)^{-1})^C\right)X\right\}^C =$

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\{X \in \mathbb{K}: Y(\succcurlyeq \cap Q)X \wedge Y(((\succcurlyeq \cap Q)^{-1})^C)X\}^C =$

$$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X \wedge YQX \wedge \neg Y((\succcurlyeq \cap Q)^{-1})X\}^C =$$

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X \wedge YQX \wedge \neg(X(\succcurlyeq \cap Q)Y)\}^C =$

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X \wedge YQX \wedge \neg(X \succcurlyeq Y \wedge XQY)\}^C =$

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}(\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X\}^C \cup \{X \in \mathbb{K}: YQX \wedge\}^C \cup \{X \in \mathbb{K}: \neg(X \succcurlyeq Y \wedge XQY)\}^C) =$

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}(\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X\}^C \cup \{X \in \mathbb{K}: YQX\}^C \cup \{X \in \mathbb{K}: X \succcurlyeq Y \wedge XQY\}) =$

$= \bigcap_{Y\in\mathbb{K}}\left(\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X\}^C \cup \{X \in \mathbb{K}: YQX\}^C \cup (\{X \in \mathbb{K}: X \succcurlyeq Y\} \cap \{X \in \mathbb{K}: XQY\})\right)$.

Zbiory $\{X \in \mathbb{K}: Y \succcurlyeq X\}$ i $\{X \in \mathbb{K}: X \succcurlyeq Y\}$ są IFS. Zatem i optimum Pareto M jest IFS.

Ponadto z zależności (1.6) - (1.8) mamy

$\mu_M(X) = \inf\left\{\nu_{\succcurlyeq}(Y,X) \vee \left(1 - \chi_Q(Y,X)\right) \vee \left(\mu_{\succcurlyeq}(X,Y) \wedge \chi_Q(X,Y)\right): Y\epsilon\mathbb{K}\right\} =$

$= \inf\left\{\left(\mu_{\succcurlyeq}(X,Y) \wedge \chi_Q(X,Y)\right) \vee \nu_{\succcurlyeq}(Y,X): Y\epsilon\mathbb{K}\right\}$

$\nu_M(X) = \sup\left\{\mu_{\succcurlyeq}(Y,X) \wedge \chi_Q(Y,X) \wedge \left(\nu_{\succcurlyeq}(X,Y) \vee \left(1 - \chi_Q(X,Y)\right)\right): Y\epsilon\mathbb{K}\right\} =$

$\nu_M(X) = \sup\left\{\left(\nu_{\succcurlyeq}(X,Y) \vee \left(1 - \chi_Q(X,Y)\right)\right) \wedge \mu_{\succcurlyeq}(Y,X): Y\epsilon\mathbb{K}\right\}$,

co ostatecznie kończy dowód twierdzenia.

2. Oszacowanie stopy zwrotu

Dla ustalonego horyzontu czasowego $t > 0$ inwestycji podstawową charakterystyką korzyści płynących z posiadania wybranego instrumentu finansowego jest stopa zwrotu r_t dana za pomocą tożsamości

$$r_t = r(V_0, V_t), \tag{2.1}$$

gdzie funkcja $r\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją malejącą oszacowanej PV $V_0 \in \mathbb{R}^+$ i funkcją rosnącą przewidywanej FV $V_t \in \mathbb{R}^+$. W klasycznym podejściu do problemu wyznaczenia stopy zwrotu wartość początkowa inwestycji jest identyfikowana z obserwowaną ceną rynkową $\check{C}$, co zapisujemy

$$V_0 = \check{C}\ . \tag{2.2}$$

Wartość przyszła inwestycji V_t jest obarczona ryzykiem niepewności co do przyszłego stanu rzeczy. Modelem formalnym tej niepewności jest przedstawianie FV jako zmiennej losowej $\tilde{V}_t\colon \Omega = \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Zbiór Ω jest zbiorem elementarnych stanów rynku finansowego. Jeżeli przy wyznaczaniu stopy zwrotu skorzystano z warunku (2.2), to wtedy także stopa zwrotu $\tilde{r}_t\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest zmienną losową wyznaczoną za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}_t(\omega) = r\left(\check{C}, \tilde{V}_t(\omega)\right). \tag{2.3}$$

W praktyce analizy rynków finansowych przyjęto opisywanie ryzyka niepewności za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu (2.3) danego jak dystrybuanta $F_r\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$. Przyjmujemy tutaj, że wskazany nieujemny parametr ς tego rozkładu jest stymulantą ryzyka niepewności obarczającej stopę zwrotu (2.3). Jeśli istnieje wariancja σ^2 tego rozkładu, to jest ona szczególnym przypadkiem takiej stymulanty. Z drugiej strony, dystrybuanta F_r w jednoznaczny sposób określa rozkład prawdopodobieństwa $P\colon 2^\Omega \supset \tilde{r}_t^{-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow [0; 1]$, gdzie symbol $\mathcal{B}$ oznacza najmniejsze σ-ciało borelowskie zawierające wszystkie przedziały na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Rozważanemu instrumentowi finansowemu przypisujemy oczekiwaną IFRR $\mathcal{R}$ określoną za pomocą swych funkcji przynależności $\rho_{\mathcal{R}} \in [0; 1]^{\mathbb{R}\times\Omega}$ i funkcji wykluczenia $\varphi_{\mathcal{R}} \in [0; 1]^{\mathbb{R}\times\Omega}$. Oczekiwana IFRR jest IFS

$$R = \{(x, \rho_R(x), \varphi_R(x))\colon x \in \mathbb{R}\}, \tag{2.4}$$

gdzie funkcje przynależności i wykluczenia są określone przez tożsamości

$$\rho_R(x) = \int_\Omega \rho_{\mathcal{R}}(x, \omega) dP\ , \tag{2.5}$$

$$\varphi_R(x) = \int_\Omega \varphi_{\mathcal{R}}(x, \omega) dP\ . \tag{2.6}$$

3. Czterowymiarowy obraz ryzyka

Inwestor część odpowiedzialności za podejmowane przez siebie inwestycje przerzuca na doradców lub na stosowane narzędzia analityczne. Z tego powodu inwestor w znakomitej części ogranicza swoje wybory decyzji inwestycyjnych do alternatyw rekomendowanych przez doradców lub stosowane instrumentarium analityczne. W ten sposób inwestor minimalizuje ryzyko osobistej odpowiedzialności za podjętą decyzję finansową[6]. W pracach Piaseckiego [2015a, 2015b] wskazano, że IFRR jest obarczona ryzykiem niepewności, ryzykiem nieprecyzji i ryzykiem nierozstrzygalności.

Ryzyko niepewności wynika z braku wiedzy inwestora o przyszłych stanach rynku finansowego. Brak tej wiedzy powoduje brak pewności u inwestora co do przyszłych zysków lub strat. W naszym modelu ryzyko niepewności obarczające oczekiwaną IFRR $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą nieujemnego parametru $\varsigma(R)$ rozkładu stopy zwrotu (2.3) danego za pomocą dystrybuanty $F_r: \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$.

Ryzyko nieprecyzji związane jest z nieprecyzyjnością informacji stanowiącej przesłankę do podjęcia decyzji. Na nieprecyzyjność informacji składają się jej wieloznaczność i nieostrość [Klir, 1993]. Wieloznaczność informacji to brak możliwości jednoznacznego wyróżnienia rekomendowanej alternatywy spomiędzy ogółu rozważanych. Nieostrość informacji to brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją i jej zaprzeczeniem. Zatem na ryzyko nieprecyzji składają się ryzyka niejednoznaczności i ryzyko nieostrości.

Wzrost ryzyka wieloznaczności oznacza, że wzrastać będzie ilość alternatywnych rekomendacji inwestycyjnych. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych alternatyw takiej decyzji, która *ex post* zostanie obarczona stratą utraconych szans. Właściwym narzędziem do pomiaru ryzyka wieloznaczności jest miara energii [De Luca, Termini,1979]. Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwaną IFRR $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą miary energii $d(R)$ zdefiniowanej w pracach Piaseckiego [2015a, 2015b] następująco:

$$d(R) = \mathcal{m}(R), \tag{3.1}$$

gdzie znormalizowana miara $\mathcal{m}(\cdot)$ jest dana przez tożsamość (1.9).

Wzrost ryzyka nieostrości oznacza zacieranie się granic wyróżniających rekomendowane alternatywy inwestycyjne. Powoduje to, że rosną szanse wyboru alternatywy nierekomendowanej. W ten sposób wzrost ryzyka niewyrazistości wpływa na wzrost ryzyka odpowiedzialności inwestora. Właściwym narzędziem do pomiaru nieostrości informacji jest miara entropii [De Luca, Termini, 1972]. Ryzyko nieostrości obarczające oczekiwaną IFRR $R \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą miary entropii $e(R)$ zdefiniowanej w pracy Kosko [1986] następująco:

---

[6] Szerzej ten problem został opisany w pracy Piaseckiego [1990].

$$e(A) = \frac{\mathcal{m}(A \cap A^C)}{\mathcal{m}(A \cup A^C)} . \tag{3.2}$$

Nierozstrzygalność informacji interpretujemy jako brak pełnej wiedzy o możliwości zarekomendowaniu lub odrzuceniu poszczególnych alternatyw. Z tej przyczyny nierozstrzygalność jest identyfikowana z niepewnością w ujęciu Knighta [1921]. Wzrost ryzyka nierozstrzygalności powoduje spadek tej części odpowiedzialności, którą inwestor może przenieść na doradcę lub stosowany aparat analityczny. W ten sposób automatycznie wzrasta osobista odpowiedzialność inwestora za podjętą decyzję. Właściwym narzędziem do pomiaru nierozstrzygalności informacji jest miara entropii zdefiniowana przez Burillo i Bustince'a [1996]. W pracy Piaseckiego [2015a] dla podkreślenia faktu, że ta charakterystyka służy do pomiaru zjawiska odmiennego od zjawiska mierzonego przez miarę entropii De Luki i Termini [1972], dla funkcjonału spełniającego warunki narzucone przez Burillo i Bustince'a [1996] zaproponowano odmienną nazwę miary ignorancji. Ryzyko nierozstrzygalności obarczające oczekiwaną IFRR $R \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą miary ignorancji $k(R)$ zdefiniowanej w pracach Piaseckiego [2015a, 2015b] za pomocą tożsamości

$$k(R) = \mathcal{m}(\Diamond R) - \mathcal{m}(\Box R) , \tag{3.3}$$

gdzie zbiory rozmyte $\Box R$ i $\Diamond R$ zostały zdefiniowane przez tożsamości (1.4) i (1.5).

Naszkicowana w tym rozdziale dyskusja dowodzi, że wzrost ryzyka nieprecyzji lub ryzyka nierozstrzygnięcia istotnie pogarsza warunki inwestowania. Posługiwanie się czterowymiarowym obrazem ryzyka

$$\Xi(R) = \big(\varsigma(R), d(R), e(R), k(R)\big) \tag{3.4}$$

ułatwia równoczesne zarządzanie ryzykiem niepewności, nieprecyzji i nierozstrzygalności. Pożądana tutaj jest minimalizacja każdej z czterech ocen ryzyka.

Powstaje natychmiast kolejne pytanie, czy takie poszerzenie oceny ryzyka jest celowym. W pracy Piaseckiego [2011a] pokazano, że ryzyka niepewności i nieprecyzji są skorelowane ujemnie. W pracy [Piaseckiego [2017] pokazano, że także ryzyka nieostrości i nierozstrzygalności mogą być skorelowane ujemnie. Oznacza to, że zawsze istnieje możliwość ograniczenia ryzyka niepewności prognozy poprzez odpowiednie obniżenie jakości informacji zawartej w tej prognozie. Jedynie kontrola wszystkich ocen jakości informacji zawartej w prognozie pozwoli na uniknięcie zaniżonych ocen ryzyka niepewności.

4. Efektywność finansowa

Efektywnym nazywamy taki instrument finansowy, który spośród wszystkich instrumentów finansowych o identycznej ocenie ryzyka wyróżnia się maksymalną oczekiwaną stopą zwrotu. W przypadku klasycznej teorii portfelowej Markowitza [1952] zbiór efektywnych instrumentów finansowych jest dany jako górna gałąź krzywej Markowitza, nazywanej krzywą efektywnych instrumentów finansowych.

Zbiór efektywnych instrumentów finansowych można też określić przy pomocy aparatu formalnego porównań wielokryterialnych. Stosując to podejście, określamy dwa preporządki na zbiorze wszystkich instrumentów finansowych. Preporządki te to kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu i kryterium minimalizacji ryzyka. Zbiorem efektywnych instrumentów nazywamy optimum Pareto określone dla porównania wielokryterialnego zdefiniowanego przez wymienione powyżej preporządki.

Inwestowanie w efektywny instrument finansowy oznacza inwestowanie w instrument finansowy gwarantujący maksymalne zyski przy minimalnym zagrożeniu utraty zainwestowanego kapitału lub jego części. Jest to standardowy cel inwestorski w normatywnych teoriach rynków finansowych. Rodzi to pewne trudności aplikacyjne, gdyż inwestorzy inwestują na ogół w instrumenty finansowe leżące poza zbiorem instrumentów efektywnych, a więc z punktu widzenia tych teorii inwestują w nieefektywne instrumenty finansowe. Pierwsze potwierdzone empirycznie informacje o nieefektywnym zachowaniu się inwestorów przedstawił Fama [1970]. Równocześnie jako swój normatywny cel inwestorzy ci deklarują inwestowanie w efektywne instrumenty finansowe. W ten sposób ujawnia się jeden z realnych paradoksów rynków finansowych. Zainicjowane przez Famę badania dały impuls do budowy teorii słabo efektywnych rynków finansowych oraz w opozycji do tej teorii rozwoju finansów behawioralnych.

Wyjaśnieniem masowości występowania tego paradoksu nie może być brak wystarczającej wiedzy o zachodzących rzeczywistych procesach na rynkach finansowych i w otoczeniu gospodarczym. Postępująca profesjonalizacja działalności inwestorskiej i szybki rozwój informatyki sprawiają, że pełnym dostępem do informacji rynkowej i umiejętnością jej właściwego przetworzenia dysponują inwestorzy zarządzający zdecydowaną większością wolumenu obrotów na tym rynku.

W tej sytuacji wytłumaczeniem tego paradoksu może być przypuszczenie, że inwestorzy – deklarujący normatywny zamiar inwestowania w efektywne instrumenty finansowe – równocześnie inwestują w instrumenty finansowe podobne jedynie w pewnym sensie do efektywnych instrumentów finansowych. Możemy tutaj mówić o stopniu efektywności poszczególnych instrumentów finansowych równym stopniowi ich podobieństwa do efektywnego instrumentu finansowego. W praktyce oznacza to, że prawie każdy dostępny na rynku instrument finansowy jest w pewnym stopniu efektywnym instrumentem finansowym. Z drugiej strony nieefektywny instrument finansowy w naturalny sposób przestaje być przedmiotem obrotu na giełdzie. Wszystko to razem wyjaśnia paradoks rozbieżności pomiędzy normatywnym celem inwestorskim a rzeczywistym celem strategii inwestycyjnej. Inwestorzy zawsze działają w mniej lub bardziej efektywny sposób.

W dalszej części tego rozdziału zostanie przedstawiony model normatywny takiego sposobu działania inwestorów. Symbolem $\mathbb{Y}$ oznaczamy zbiór instrumentów finansowych. Instrument finansowy $\check{Y} \epsilon \mathbb{Y}$ jest reprezentowany przez parę $\left(R_Y, \Xi(R_Y)\right) \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^4$, gdzie poszczególne symbole oznaczają:

- R_Y jest oczekiwaną IFRR z instrumentu finansowego $\check{Y}$ określoną za pomocą swych funkcji przynależności $\rho_Y \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i funkcji wykluczenia $\varphi_Y \in [0;1]^{\mathbb{R}}$;
- $\Xi(R_Y)$ jest określonym za pomocą (3.4) obrazem ryzyka obarczającego R_Y.

Podstawą do dalszych rozważań jest porównanie wielokryterialne określone za pomocą iloczynu kryterium maksymalizacji oczekiwanej IFRR i kryterium minimalizacji ryzyka.

Na zbiorze $\mathbb{Y}$ instrumentów finansowych relację $\check{Y} \sqsupseteq \check{Z}$ maksymalizacji oczekiwanej IFRR wyznaczamy za pomocą funkcji zdaniowej:

Oczekiwane IFRR R_Y jest większe równe od oczekiwanej IFRR R_Z. (4.1)

Zgodnie z (1.11) i (1.12) relacja ta jest intuicyjnie rozmytym preporządkiem określonym przez swe funkcję przynależności $\mu_{\sqsupseteq} \in [0,1]^{\mathbb{Y}\times\mathbb{Y}}$ i funkcję wykluczenia $\nu_{\sqsupseteq} \in [0,1]^{\mathbb{Y}\times\mathbb{Y}}$ wyznaczone za pomocą tożsamości

$$\mu_{\sqsupseteq}\left(\check{Y}, \check{Z}\right) = \sup\{\, \rho_Y(u) \wedge \ \rho_Z(v) : u \geq v\}. \tag{4.2}$$

$$\nu_{\sqsupseteq}\left(\check{Y}, \check{Z}\right) = \inf\{\varphi_Y(u) \vee \varphi_Z(v) : u \geq v\}. \tag{4.3}$$

Na zbiorze $\mathbb{Y}$ instrumentów finansowych relację $\check{Y} \trianglelefteq \check{Z}$ minimalizacji ryzyka wyznaczamy za pomocą funkcji zdaniowej:

Instrument finansowy $\check{Y}$ jest nie bardziej ryzykowny
niż instrument finansowy $\check{Z}$. (4.4)

Funkcja ta jest równoważna nierówności

$$\Xi(R_Y) \leq \Xi(R_Z). \tag{4.5}$$

Relacja ta jest nierozmytym preporządkiem opisanym przez swą funkcję charakterystyczną $\chi_Q \in 2^{\mathbb{Y}\times\mathbb{Y}}$ wyznaczoną za pomocą tożsamości

$$\chi_{\trianglelefteq}(\check{Y},\check{Z}) = \begin{cases} 1 & \Xi(R_Y) \leq \Xi(R_Z) \\ 0 & \neg\, \Xi(R_Y) \leq \Xi(R_Z) \end{cases}. \tag{4.6}$$

Zbiór efektywnych instrumentów finansowych definiujemy jako zbiór optimum Pareto wyznaczony przez porównanie wielokryterialne $\mathcal{W}\epsilon\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ składające się z kryterium maksymalizacji oczekiwanej IFRR i kryterium minimalizacji ryzyka. Zgodnie z (1.13) i (1.14) zbiór efektywnych instrumentów finansowych jest IFS $M \in \mathcal{I}(\mathbb{Y})$ określonym przez swą funkcję przynależności $\mu_M \in [0,1]^{\mathbb{Y}}$ i funkcję wykluczenia $\nu_M \in [0,1]^{\mathbb{Y}}$ wyznaczone za pomocą tożsamości

$$\mu_M(\check{Y}) = \inf\left\{\left(\mu_{\succcurlyeq}(\check{Y},\check{Z}) \wedge \chi_{\trianglelefteq}(\check{Y},\check{Z})\right) \vee \nu_{\succcurlyeq}(\check{Z},\check{Y}) \colon \check{Z}\epsilon\mathbb{Y}\right\}. \tag{4.7}$$

$$\nu_M(\check{Y}) = \sup\left\{\left(\nu_{\succcurlyeq}(\check{Y},\check{Z}) \vee \left(1 - \chi_{\trianglelefteq}(\check{Y},\check{Z})\right) \wedge \mu_{\succcurlyeq}(\check{Z},\check{Y})\right) :\ \check{Z}\epsilon\mathbb{Y}\right\}. \tag{4.8}$$

W ujęciu logik wielowartościowych wartość $\mu_M(\check{Y})$ jest interpretowana, jako wartość logiczna zdania:

Instrument finansowy $\check{Y}$ jest efektywny. (4.9)

Podobnie, wartość $\nu_M(\check{Y})$ jest interpretowana, jako wartość logiczna zdania:

Instrument finansowy $\check{Y}$ nie jest efektywny. (4.10)

W pracach Piaseckiego [2015b], Piaseckiego i Siwek [2015] oraz Echausta i Piaseckiego [2016] pokazano, że stosowanie IFPV jest dobrze uzasadnione poprzez behawioralne aspekty postrzegania rynku finansowego. Dzięki temu powyżej zaprezentowana teoria normatywna wyjaśnia, że ujawnianie się paradoksu rozbieżności pomiędzy normatywnym celem inwestorskim a rzeczywistym celem strategii inwestycyjnej może być wywołane poprzez oddziaływanie behawioralnych czynników. Każdy paradoks wyjaśniony staje się paradoksem pozornym.

Możliwość oszacowanie logicznej wartość zdań (4.9) i (4.10) pozwala na pewną kontrolę nad wyborem instrumentów finansowych podobnych do efektywnych. Wysoka wartość logiczna zdania (4.9) stanowi przesłankę do rekomendowania zakupu instrumentu finansowego $\check{Y}$. Zadeklarowanie zamiaru inwestowania jedynie w takie instrumenty finansowe może zostać uznane za normatywny cel inwestorski. Stosowanie tej strategii prowadzi do odrzucania takich alternatyw inwestycyjnych, które co prawda są atrakcyjne z punktu widzenia klasycznej teorii Markowitza, ale niestety zebrane na ich temat informacje są niskiej jakości.

Wysoka logiczna wartość zdania (4.10) stanowi przesłankę do rekomendowania sprzedaży instrumentu finansowego $\breve{Y}$. Warunek (1.2) wyklucza możliwość równoczesnego pojawienia się rekomendacji kupna i rekomendacji sprzedaży. Jest dopuszczalnym to, że instrumentowi finansowemu $\breve{Y}$ nie zostanie przypisana żadna z powyższych rekomendacji.

Każdy inwestor powinien ograniczyć obszar swoich inwestycji do instrumentów finansowych $\breve{Y} \epsilon \mathbb{Y}$ charakteryzujących się dużą wartością wskaźnika $\mu_M(\breve{Y})$. Każdy inwestor powinien też ograniczyć sprzedaż własnych aktywów finansowych do tych instrumentów finansowych $\breve{Y} \epsilon \mathbb{Y}$, które osiągają niskie wartości wskaźnika $\nu_M(\breve{Y})$. Prezentowane w pracy Piaseckiego i Siwek [2015] rozważania pozwalają przypuszczać, że poszczególni inwestorzy w danym momencie będą posługiwali się różnymi wartościami tych wskaźników. Zróżnicowanie to wynika ze zróżnicowań subiektywnych, behawioralnych przesłanek podejmowania decyzji inwestycyjnych. Istnienie takich przesłanek jest nieuniknione, gdyż na silnie efektywnym rynku finansowym zróżnicowania takie są warunkiem koniecznym dla zaistnienia transakcji kupna-sprzedaży. Na pozostałych finansowych rynkach zróżnicowanie wskaźników wynika też ze zróżnicowania dostępu do istotnych informacji finansowo-gospodarczych.

Podsumowanie

Stosowanie powyżej przedstawionego normatywnego modelu niesie duże utrudnienia. Głównym utrudnieniem jest wysoka złożoność formalna i obliczeniowa zadania wyznaczania stosowanych funkcji przynależności i wykluczenia. Złożoność obliczeniowa modelu normatywnego jest ceną, jaką płacimy za brak szczegółowych założeń specyfikujących model stopy zwrotu, to jest za niską złożoność logiczną, stanowiącą istotną zaletę formalnego modelu prezentowanego w tej pracy. Kluczem do stworzenia możliwości efektywnego zastosowania opisanego powyżej modelu formalnego jest podjęcie intensywnych badań nad poszczególnymi przypadkami IFPV.

Uzyskane tutaj wyniki stanowią podstawę do uogólnienia normatywnej teorii decyzji finansowych opisanej w pracach Piaseckiego [2011a, 2011b]. Pożądaną jest tutaj dalsza kontynuacja badań formalnych zmierzających do uogólnienia wyników przedstawionych w pracy Piaseckiego [2014].

Literatura

Atanassov K. (1993), *New variant of modal operators in intuitionistic fuzzy modal logic*, „BUSEFAL", Vol. 54.

Atanassov K. (1999), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Atanassov K., Stoeva S. (1985), *Intuitionistic fuzzy sets* [w:] J. Albrycht, H. Wiśniewski (red.), *Proceedings of Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań.

Black F., Litterman R. (1991), *Asset allocation: combining investor views with market equilibrium*, „The Journal of Fixed Income", Vol. 1, DOI: 10.3905/jfi.1991. 408013.

Burillo P., Bustince H. (1996), *Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems" , Vol. 78.

De Luca A., Termini S. (1972), *A definition of a non-probabilistic entropy in the settings of fuzzy set theory*, „Information and Control", Vol. 20, Issue 4.

De Luca A., Termini S. (1979), *Entropy and energy measures of fuzzy sets* [w:] M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yagar (red.), *Advances in fuzzy set theory and applications*, North-Holland, Amsterdam.

Echaust K., Piasecki K. (2016), *Black-Litterman model with intuitionistic fuzzy posterior return*, „SSRN Electronic Journal", DOI: 10.2139/ssrn.2010280.

Fama E.F. (1970), *Efficient capital markets: a review of theory and empirical work*, „Journal of Finance", Vol. 25, No. 2.

Kaplan S., Barish N.N. (1967), *Decision-making allowing uncertainty of future investment opportunities*, „Management Science", Vol. 13, No. 10.

Klir G.J. (1993), *Developments in uncertainty-based information* [w:] M. Yovits (red.), *Advances in computers 36*, Academic Press, San Diego.

Knight F.H. (1921), *Risk, uncertainty, and profit*, Hart, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Company, Boston, MA.

Kosko B. (1986), *Fuzzy entropy and conditioning*, „Information Sciences", No. 40.

Markowitz H. (1952), *Portfolio Selection*, „Journal of Finance", Vol. 7, No. 1, s. 77-91.

Mises L. von (1962), *The ultimate foundation of economic science: an essay on method*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton.

Piasecki K. (1990), *Decyzje i wiarygodne prognozy*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Piasecki K. (2011a), *Effectiveness of securities with fuzzy probabilistic return*, „Operations Research and Decisions", Vol. 21, No. 2.

Piasecki K. (2011b), *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań. DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K. (2013), *Intuitionistic assessment of behavioural present value*, „Folia Oeconomica Stetinensia", Vol. 13, Issue 2, DOI: 10.2478/foli-2013-0021.

Piasecki K. (2014), *On imprecise investment recommendations*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", Vol. 37(50), DOI: 10.2478/slrg-2014-0024.

Piasecki K. (2015a), *O stopie zwrotu oszacowanej przez intuicyjny rozmyty zbiór probabilistyczny*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 248.

Piasecki K. (2015b), *On return rate estimated by intuitionistic fuzzy probabilistic set* [w:] D. Martincik, J. Ircingova, P. Janecek (red.), *Mathematical methods in economics MME 2015*, Publishing House of Faculty of Economics, University of West Bohemian, Plzen.

Piasecki K. (2016), *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, edu-Libri, Kraków-Warszawa.

Piasecki K. (2017), *Some remarks on axiomatic definition of entropy measure*, „Journal of Intelligent and Fuzzy System", Vol. 33, Issue 3, DOI: 10.3233/JIFS-15364.

Piasecki K., Anholcer M., Echaust K. (2013), *e-Matematyka wspomagająca ekonomię*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.

Piasecki K., Siwek J. (2015), *Behavioural present value defined as fuzzy number – a new approach*, „Folia Oeconomica Stetinensia", Vol. 15, Issue 2, DOI: 10.1515/foli-2015-0033.

Zhang Q., Jia B., Jiang S. (2009), *Interval-valued intuitionistic fuzzy probabilistic set and some of its important properties*, Proceedings of the 1st International Conference on Information Science and Engineering ICISE2009, Guangzhou.

THE FAMILY OF EFFECTIVE SECURITIES GIVEN AS INTUITIONISTIC FUZZY SET

Summary: Any financial instrument is called effective then if it stands out among all the securities with the same risk assessment by maximum expected return. The family of effective financial instruments can also be determined on the basis of multi-criteria comparison theory. Using this approach we define two preorders on the set of all financial instruments. As these preorders we are using the criterion of maximizing the expected return rate and the criterion of minimizing the variance. Then the family of effective instruments is defined as a Pareto optimum set for comparisons of multiple-criteria defined by the above-mentioned preorders. In this work is considered the case where the expected return rate is given as intuitionistic fuzzy set. Determined in this way intuitionistic fuzzy set of effective financial instruments is a generalization of the concept of the effective instruments' curve defined on the basis of the classical Markowitz's theory.

Keywords: imprecise return rate, financial effectivity, intuitionistic fuzzy set.