Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 331 · 2017

Joanna Siwek

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Zarządzania
Katedra Inwestycji i Nieruchomości
joanna.siwek@ue.poznan.pl

PORTFEL N-SKŁADNIKOWY Z WARTOŚCIĄ BIEŻĄCĄ DANĄ DYSKRETNĄ LICZBĄ ROZMYTĄ

Streszczenie: W artykule zaprezentowano analizę portfela n instrumentów finansowych pod kątem kumulacji ryzyka nieprecyzyjności. Ryzyko to ujęte zostało poprzez reprezentowanie wartości bieżącej składników portfela przy pomocy dyskretnych liczb rozmytych. Badany model uwzględnia zarówno przesłanki racjonalne, jak i behawioralne aspekty zachowania inwestora, ponadto obejmuje ograniczenia techniczne i technologiczne systemów wsparcia decyzyjnego. Praca zawiera opis metody konstrukcji portfela, analizę parametrów ryzyka nieprecyzyjności oraz przykład numeryczny ukazujący sposób działania modelu. Wnioski z przeprowadzonej analizy dotyczą w dużej mierze reakcji ryzyka nieprecyzyjności na zmianę ilości i charakteru instrumentów składowych portfela.

Słowa kluczowe: wartość bieżąca, zbiory rozmyte, nieprecyzyjność.

JEL Classification: C44, C02, G10.

Wprowadzenie

Nieprecyzyjność informacji jest rozumiana jako wieloznaczność i nieostrość, czyli niemożność rozpoznania pomiędzy kilkoma możliwościami oraz niemożność rozpoznania pomiędzy informacją a jej zaprzeczeniem. Decyzje inwestorskie są obarczone zarówno niepewnością przyszłych wyników, jak i nieprecyzyjnością informacji, którymi inwestor kieruje się, podejmując decyzje inwestycyjne. Prócz racjonalnych przesłanek inwestor wykorzystuje wiedzę i doświadczenie, różne systemy eksperckie, własne przekonania i otrzymane informacje o rynku. Wszystkie te czynniki mają odbicie w określonej przez niego wartości bieżącej instrumentów.

Pojęcie rozważanej w pracy wartości bieżącej, definiowanej jako rozmyte zdyskontowane przyszłe przepływy pieniężne, zostało po raz pierwszy w tej formie wprowadzone przez Warda [1985]. Z czasem definicja została rozszerzona [Buckley, 1987] i uogólniona [Calzi, 1990]. Rozmytą arytmetyką finansową, opartą na tak wprowadzonym pojęciu, zajmowali się m.in. Kuchta [2000, 2011] i Lesage [2001].

Ze względu na charakter działania sprzętu komputerowego, operującego na zasadzie dyskretnych obliczeń (co ma szczególne znaczenie w przypadku High Frequency Trading), jak również ze względu na charakter notowań giełdowych oraz psychologicznej tendencji człowieka do dyskretyzacji i przybliżania wartości, celowym zdaje się rozważenie nieprecyzyjności w świecie dyskretnym.

Liczby rozmyte, rozpowszechnione przez Dubois i Prade'a [1980] stały się popularnym narzędziem matematycznym w wielu dziedzinach wiedzy, w tym również w finansach. Szczególny ich przypadek, czyli zaproponowane przez Voxmana [2001] dyskretne liczby rozmyte znajdują zastosowanie m.in. w modelowaniu informacji niepełnej [Vicente Riera, Torrens, 2014, 2015]. Ze względu na fakt, że zgodnie z przyjętymi działaniami na liczbach rozmytych suma dwóch dyskretnych liczb rozmytych nie musi być dyskretną liczbą rozmytą, arytmetyka dyskretnych liczb rozmytych nadal się rozwija i stanowi pewne trudności interpretacyjne [Casasnovas, Vicente Riera, 2006; Wang, Wen, 2007; Wang, Zhang, Cui, 2008].

Wraz z rozwojem teorii zbiorów rozmytych oraz rozmytej matematyki finansowej wielu autorów skupiło swoją uwagę na problemie rozmytego portfela aktywów finansowych. Szczególną uwagę należy zwrócić na prace takich autorów jak: Huang [2007a, 2007b, 2007c] oraz Wang, Zhu [2002] i Yan [2009].

Głównym celem niniejszego artykułu jest charakterystyka i analiza portfela wieloskładnikowego uwzględniającego nieprecyzyjność informacji, którymi kieruje się inwestor, oraz ograniczeniami technicznymi i technologicznymi narzędzi, którymi się posługuje dla przypadku, kiedy wartość bieżąca instrumentów jest modelowana dyskretną liczbą rozmytą.

1. Założenia i budowa modelu portfela

Uogólniona liczba rozmyta $\mathcal{R}$ to rozmyty podzbiór $\mathbb{S}(\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}$, określony przez funkcję przynależności $\mu_{\mathcal{R}}: \mathbb{S}(\mathcal{R}) \to [0,1]$, taką, że:

$$\exists_{x \in \mathbb{S}(\mathcal{R})}: \quad \mu_{\mathcal{R}}(x) = 1 \tag{1}$$

$$\forall_{(x,y,z)\in\mathbb{S}(\mathcal{R})^3}: x \le y \le z \Longrightarrow \mu_{\mathcal{R}}(y) \ge \min\{\mu_{\mathcal{R}}(x), \mu_{\mathcal{R}}(z)\} \tag{2}$$

Zbiór $\mathbb{S}(\mathcal{R})$ nazywamy nośnikiem uogólnionej liczby rozmytej $\mathcal{R}$.

Rozważmy parę uogólnionych liczb rozmytych $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ z funkcjami przynależności $\mu_{\mathcal{Q}}: \mathbb{S}(\mathcal{Q}) \to [0,1]$ i $\mu_{\mathcal{R}}: \mathbb{S}(\mathcal{R}) \to [0,1]$ odpowiednio. Zgodnie z zasadą rozszerzenia [Zadeh, 1965], suma $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R}$ jest również uogólnioną liczbą rozmytą z funkcją przynależności $\mu_{\mathcal{Q}+\mathcal{R}}: \mathbb{S}(\mathcal{Q}+\mathcal{R}) \to [0,1]$, gdzie:

$$\mathbb{S}(\mathcal{Q}+\mathcal{R}) = \left\{z \in \mathbb{R}: \exists_{(x,y)\in\mathbb{S}(\mathcal{Q})\times\mathbb{S}(\mathcal{R})}: \ z = x + y\right\} \tag{3}$$

$$\mu_{\mathcal{Q}+\mathcal{R}}(z) = \max\left\{\min\left\{\mu_{\mathcal{Q}}(x), \mu_{\mathcal{R}}(y)\right\}\right\}, (x,y) \in \mathbb{S}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{S}(\mathcal{R}), z = x + y \tag{4}$$

Analogicznie, mnożenie uogólnionej liczby rozmytej $\mathcal{R}$ przez skalar $r \in \mathbb{R}^+$ definiujemy jako iloczyn $r\otimes\mathcal{R}$ z $\mu_{r\otimes\mathcal{R}}: \mathbb{S}(r \cdot \mathcal{R}) \to [0,1]$, gdzie:

$$\mathbb{S}(r \cdot \mathcal{R}) = \left\{z \in \mathbb{R}: \exists_{y\in\mathbb{S}(\mathcal{R})}: \ z = r \cdot y\right\} \tag{5}$$

$$\mu_{r\cdot\mathcal{R}}(z) = \mu_{\mathcal{R}}\left(\frac{z}{r}\right). \tag{6}$$

Dyskretne liczby rozmyte zostały wprowadzone przez Voxmana [2001]. Stanowią one przypadek uogólnionych liczb rozmytych $\mathcal{R}$, dla których nośnik jest zbiorem skończonym $\mathbb{S}(\mathcal{R}) = \left\{x_1^{\mathcal{R}}, x_2^{\mathcal{R}}, \dots, x_{n_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}\right\}$.

W literaturze przedmiotu, ze względu na intuicyjność i łatwość zastosowania, stosuje się głównie trapezoidalne liczby rozmyte. Trapezoidalna uogólniona liczba rozmyta to czwórka $T(a,b,c,d)$, z funkcją przynależności daną wzorem $\mu: \mathbb{S}(T(a,b,c,d)) \to [0,1]$:

$$\mu_T(x|a,b,c,d) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & dla \quad a \le x \le b \\ 1, & dla \quad b < x < c \\ \dfrac{x-d}{c-d}, & dla \quad c \le x \le d \end{cases} \tag{7}$$

Trapezoidalną dyskretną liczbę rozmytą definiujemy za Voxmanem jako czwórkę $DT(a,b,c,d)$ z nośnikiem $S(DT(a,b,c,d)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, i funkcją przynależności $\mu: \mathbb{S}(\mathcal{R}) \to [0,1]$, taką, że:

$$\forall_{x_{k\in\{x_1,x_2,\dots,x_n\}}} \mu_{DT}(x_k|a,b,c,d) = \begin{cases} \dfrac{x_k-a}{b-a}, & dla \quad a \le x_k \le b \\ 1, & dla \quad b < x_k < c \\ \dfrac{x_k-d}{c-d}, & dla \quad c \le x_k \le d. \end{cases} \tag{8}$$

Rozważmy dowolny instrument finansowy A z wartością bieżącą PV daną dyskretną liczbą rozmytą z nośnikiem $\mathbb{S}(PV) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, reprezentowaną przez swoją funkcję przynależności $\mu: \mathbb{R} \to [0,1]$. Wartość przyszła tego instrumentu opisana jest zmienną losową $\tilde{V}: \Omega \to \mathbb{R}$.

Dla danego $t \in T$, przy założeniu prostych stóp zwrotu $r \in \mathbb{R}$ funkcja przynależności $\rho: \mathbb{R} \to [0,1]$ rozmytego zwrotu z instrumentu (R) wynosi:

$$\rho(r, \omega) = \max\left(\mu(x_i): r = \frac{V_t(\omega) - x_i}{x_i}\right) = \mu(\frac{V_t(\omega)}{1 + r}) \tag{9}$$

gdzie $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Nośnik stopy zwrotu z portfela (R) to:

$$\mathbb{S}(R) = \left\{r \in \mathbb{R}: \exists x_i \in \mathbb{S}(PV): r = \frac{V_t(\omega) - x_i}{x_i}\right\} \tag{10}$$

Tak określony zwrot z instrumentu o wartości bieżącej danej dyskretną liczbą rozmytą jest również dyskretną liczbą rozmytą, jednakże zwrot z instrumentu o wartości bieżącej danej konkretnie trapezoidalną liczbą rozmytą nie zachowuje kształtu tej liczby.

Założenia badanego modelu, nawiązujące do teorii Markowitza [1952] oraz modeli zaprezentowanych w pracach Piaseckiego i Siwek [2015] oraz Siwek [2015, 2016] są następujące:

– przyjmujemy proste stopy zwrotu o rozkładzie normalnym $N(\bar{r}, \sigma)$,
– wartość przyszła jest zmienną losową $\tilde{V}_t(\omega) = V_0 \cdot \left(1 + \tilde{r}_t(\omega)\right)$,
– wartość bieżąca jest reprezentowana przez dyskretną liczbę rozmytą.

Rozważmy teraz przypadek n-składnikowego portfela π, złożonego z instrumentów finansowych $A_i, i = 1, \dots, n$ o wartościach bieżących PV_i, danych dyskretnymi liczbami rozmytymi reprezentowanymi przez funkcję przynależności $\mu_i: \mathbb{R} \to [0,1]$. Wtedy, zgodnie z zasadą rozszerzania Zadeha, funkcja przynależności $\mu: \mathbb{R} \to [0,1]$ do zbioru rozmytego odpowiadającego wartości bieżącej portfela złożonego z tych instrumentów ma postać:

$$\mu(x) = \max_{\substack{x=\sum x_i \\ x_i \in \mathbb{S}(PV_i), i=1,\dots,n}} \min(\mu_i(x_i)) \tag{11}$$

gdzie $x \in \mathbb{S}(PV)$ i nośnik PV dany jest zbiorem:

$$\mathbb{S}(PV) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \mathbb{S}(R) = \left\{r \in \mathbb{R}: \exists x_{i \in \mathbb{S}(PV)} r = \frac{V_t(\omega) - x_i}{x_i}\right\}. \tag{12}$$

Zakładamy, że dla każdego instrumentu A_i $(i = 1,2, \dots, n)$ znamy rozkład prawdopodobieństwa prostej stopy zwrotu $\tilde{r}_t^i: \Omega \to \mathbb{R}$ dla PV równej cenie rynkowej $\check{C}_i$. Identycznie jak Markowitz zakładamy, że n-wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1, \tilde{r}_t^2, \dots, \tilde{r}_t^n)^T$ ma łączny rozkład normalny $N\left((\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)^{\mathrm{T}}, \mathbf{\Sigma}\right)$. Oczekiwany zwrot R_i wyznaczony dla tak oszacowanej PV jest rozmytym zbiorem probabilistycznym reprezentowanym funkcją przynależności $\rho_i \in [0;1]^{\mathbb{R}\times\Omega}$ $i = 1,2,\dots,n$:

$$\rho_i(r,\omega) = \max\left\{\mu_i(x): r = \frac{V_t(\omega)-x}{x}\right\} = \mu_i\left(\frac{V_t(\omega)}{1+r}\right) = \mu_i(v\cdot V_t(\omega)) \tag{13}$$

PV portfela π, z funkcją przynależności daną wzorem (11), jest opisana, jako:

$$PV = \bigcup PV_i. \tag{14}$$

2. Czynnik dyskontujący

Funkcja $\eta_i \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ określona za pomocą tożsamości:

$$\eta_i(v,\omega) = \rho_i(r,\omega) = \max\left\{\mu_i(x): r = \frac{V_{i,t}(\omega)-x}{x}\right\} = \mu_i\left(\frac{V_t(\omega)}{1+r}\right) \tag{15}$$

jest funkcją przynależności czynnika dyskonta $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest również dyskretną liczbą rozmytą. Zachowuje on charakter rozmycia stopy zwrotu z instrumentu, co znacznie ułatwia obliczenia, szczególnie miar ryzyka nieprecyzyjności.

Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwany czynnik dyskonta $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ oceniamy za pomocą energii [De Luca, Termini, 1972] w postaci podanej przez Czogałę, Gottwalda i Pedrycza [1982]. Miara ta jest równa:

$$d(D_i) = \sum_{r\in\mathbb{S}(R_i)} \rho_i(r) \tag{16}$$

Ryzyko nieostrości obarczające oczekiwany czynnik dyskonta $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą entropii [De Luca, Termini, 1972]:

$$e(D_i) = \sum_{r\in\mathbb{S}(R_i)} \min(\rho_i(r), 1-\rho_i(r)) \tag{17}$$

Czynnik dyskonta portfela$D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ wyznaczony za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest określony funkcją przynależności:

$$\eta(v,\omega) = \rho(r,\omega) = \max\left\{\mu(x): r = \frac{V_t(\omega)-x}{x}\right\} = \mu\left(\frac{V_t(\omega)}{1+r}\right) \tag{18}$$

Wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta jest również dyskretną liczbą rozmytą.

Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwany czynnik dyskonta portfela $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ i mierzone energią wyraża się wzorem:

$$d(D) = \sum_{r \in \mathbb{S}(R)} \rho(r) \tag{19}$$

Ryzyko nieostrości obarczające oczekiwany czynnik dyskonta z portfela $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ mierzone entropią w postaci danej przez Kosko [1990] wynosi:

$$e(D) = \sum_{r \in \mathbb{S}(R)} \min(\rho(r), 1 - \rho(r)) \tag{20}$$

Celowym jest więc zastąpienie obliczeń na rozmytej stopie zwrotu obliczeniami na oczekiwanym czynniku dyskontującym. Otrzymujemy, że pomiędzy miarami portfela występują następujące zależności:

$$\begin{gathered} d(D) \geq \min\big(d(D_1), d(D_2), \dots, d(D_n)\big) \\ e(D) \geq \min\big(e(D_1), e(D_2), \dots, e(D_n)\big) \end{gathered} \tag{21}$$

3. Zadanie maksymalizacji

Ze względu na różne reakcje poziomu ryzyka nieostrości mierzonego energią i entropią względem ryzyka niepewności mierzonego wariancją podczas konstrukcji portfela wskazuje się na celowość modyfikacji zadania maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka dla portfela n-składnikowego z wartością bieżącą daną liczbą rozmytą o skończonym nośniku. W przypadku danych precyzyjnych [Markowitz, 1952] zadanie takie ma postać:

- $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,
- $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ – stopy zwrotu z instrumentów składowych portfela,
- $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}^+$ – ryzyko mierzone odchyleniem standardowym,
- d – zadany poziom ryzyka.

$$\begin{gathered} E(p_1 r_1 + p_2 r_2 + \dots + p_n r_n) \longrightarrow max \\ p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + \dots + p_n \sigma_n \leq d \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{gathered} \tag{22}$$

W przypadku uwzględnienia nieprecyzyjności wartości bieżącej, a tym samym nieprecyzyjności wyznaczenia zwrotu z portfela, zadanie to ulega pewnej modyfikacji. Ze względu na definicję działań na dyskretnych liczbach rozmytych możemy sprawdzić, że maksymalizacja wartości oczekiwanej zwrotu z portfela jest równoważna maksymalizacji średniej prostych stóp zwrotu przynależących do nośnika stopy zwrotu z portfela:

$$E(p_1 R_1 \oplus p_2 R_2 \oplus \dots \oplus p_n R_n) \longrightarrow \max \Leftrightarrow \sum_{r \in \mathbb{S}(R)} r \longrightarrow max \tag{23}$$

Rozważmy wartość oczekiwaną stopy zwrotu z portfela $E(p_1R_1 \oplus p_2R_2 \oplus \dots \oplus p_nR_n)$. Łatwo zauważyć, że jest ona liczbą rozmytą. Jako maksimum dyskretnej liczby rozmytej będziemy traktować wielkość:

$$Max\{R_1, R_2, \dots, R_n\} = \{z: z = \max_j r_{ij,} r_{ij} \in R_i\} \quad (24)$$

Tym samym, zadanie optymalizacji zysku przyjmuje ostatecznie postać:
- $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,
- $R_1, R_2, \dots, R_n \in \mathbb{R}$ – stopy zwrotu z instrumentów składowych,
- $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}^+$ – ryzyko mierzone odchyleniem standardowym,
- $d(D_i) \in \mathbb{R}^+, i = 1,2, \dots, n$ – ryzyko mierzone energią czynnika dyskonta,
- $e(D_i) \in \mathbb{R}^+, i = 1,2, \dots, n$ – ryzyko mierzone entropią czynnika dyskonta,
- q_1, q_2, q_3 – zadany poziom ryzyka niepewności, wieloznaczności i nieostrości.

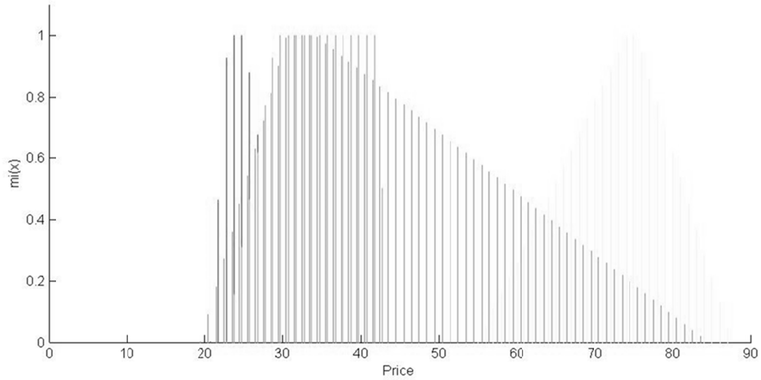
$$\sum_{r \epsilon \mathbb{S}(R)} r = \sum_{r_{ij} \epsilon \mathbb{S}(R_i)} p_1r_{1j} + p_2r_{2j} + \dots + p_nr_{nj} \longrightarrow max$$

$$\begin{gathered} p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + \dots + p_n\sigma_n \le q_1 \\ p_1d(D_1) + p_2d(D_2) + \dots + p_nd(D_n) \le q_2 \\ p_1e(D_1) + p_2e(D_2) + \dots + p_ne(D_n) \le q_3 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{gathered} \quad (25)$$

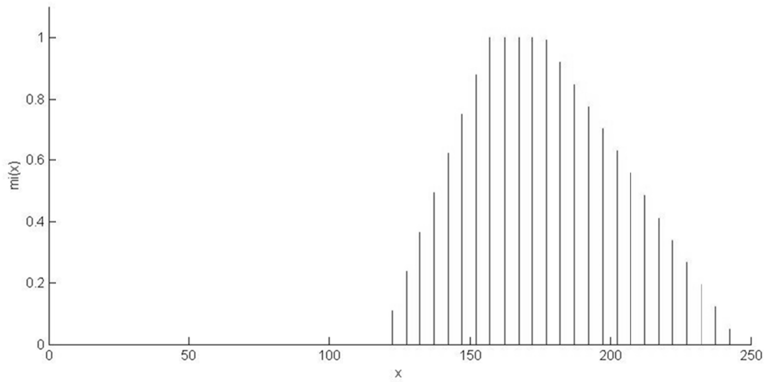
4. Studium przypadku

W programie Matlab przeprowadzono symulacje zachowania portfela w przypadku $n = 4$ instrumentów składowych. Przy jednostce dyskretyzacji 0,001 przyjęto następujące założenia o wartościach bieżących. PV dla:
- A_1 dana jest dyskretną przez $DT(55{,}02; 74{,}14; 75{,}30; 87{,}59)$,
- A_2 dana jest przez $DT(20{,}77; 22{,}93; 25{,}18; 30{,}12)$,
- A_3 dana jest przez $DT(19{,}48; 30{,}56; 34{,}15; 84{,}43)$,
- A_4 dana jest przez $DT(22{,}77; 29{,}23; 41{,}98; 43{,}57)$.

Funkcje przynależności do rozmytych wartości bieżącej i zwrotów z instrumentów A_i oraz portfela przedstawione są na rysunkach poniżej.



Rys. 1. Funkcje przynależności dla proponowanych wartości bieżących instrumentów A_i



Rys. 2. Funkcja przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_i

Załóżmy, że dana jest dwuwymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1, \tilde{r}_t^2, \tilde{r}_t^3, \tilde{r}_t^4)$ o rozkładzie łącznym $\mathrm{N}\big((0{,}7447; 0{,}1890; 0{,}6868; 0{,}1835)^{\mathrm{T}}, \Sigma\big)$. Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać:

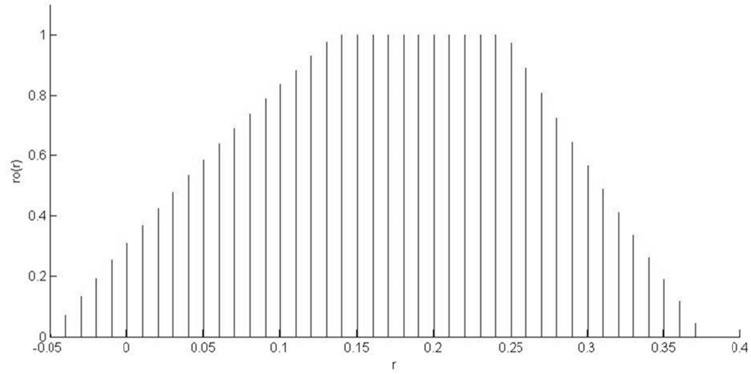
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}3685 & 0{,}8153 & 1{,}1861 & 0{,}8927 \\ 0{,}8153 & 0{,}6256 & 1{,}4205 & 0{,}6140 \\ 1{,}1861 & 1{,}4205 & 0{,}7802 & 0{,}4319 \\ 0{,}8927 & 0{,}6140 & 0{,}4319 & 0{,}0811 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Wariancja instrumentów składowych i portfela wynosi:

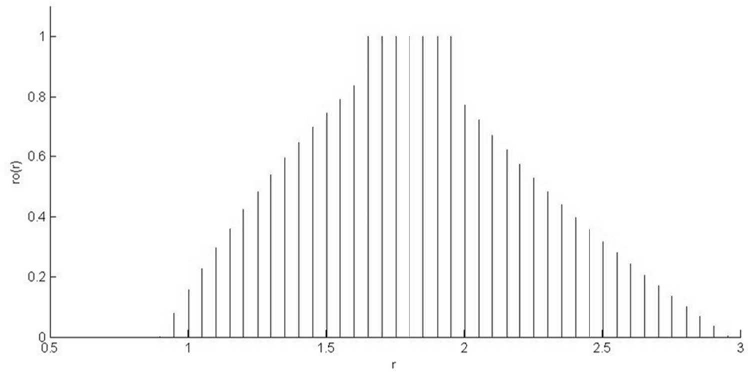
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ
0,3685	0,6256	0,7802	0,0811	0,7558

(27)

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela wyznaczamy oczekiwane stopy zwrotu. Są one dyskretnymi liczbami rozmytymi.

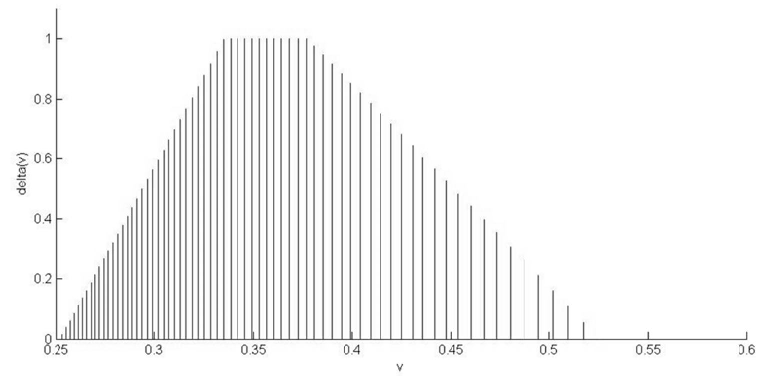


Rys. 3. Funkcje przynależności dla oczekiwanych zwrotów z instrumentów A_i



Rys. 4. Funkcje przynależności dla zwrotu z portfela

W kolejnym kroku dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela wyznaczamy oczekiwane czynniki dyskontujące. Są one trapezoidalnymi dyskretnymi liczbami rozmytymi.



Rys. 5. Funkcja przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Korzystając z (16) i (19), wyznaczmy miary energii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego każdego z instrumentów osobno oraz portfela:

$d(D_1)$	$d(D_2)$	$d(D_3)$	$d(D_4)$	$d(D)$
0,1294	0,2028	0,6279	0,3980	0,2883

(28)

Miary entropii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego każdego z instrumentów oraz dla portfela według (17) i (20) kształtują się następująco:

$e(D_1)$	$e(D_2)$	$e(D_3)$	$e(D_4)$	$e(D)$
0,333	0,333	0,333	0,333	0,333

(29)

Tym samym, otrzymujemy, że dla przypadku czynnika dyskontującego:

$$\begin{gathered} \sigma_4^2 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma^2 < \sigma_3^2 \\ d_1 < d_2 < d < d_4 < d_3 \\ e = e_1 = e_2 = e_3 = e_4 \end{gathered} \tag{30}$$

Z otrzymanych zależności wynika, że miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla instrumentów. Entropia jest wielkością stałą dla rozważanego czynnika dyskontującego.

Podsumowanie

W przypadku portfela *n*-składnikowego z wartością bieżącą składników daną dyskretną liczbą rozmytą otrzymaliśmy następujące wnioski:

- dywersyfikacja portfela zmniejsza ryzyko niepewności wyrażone wariancją,
- ryzyko wieloznaczności wyrażone energią czynnika dyskontującego jest wartością pośrednią względem wartości dla poszczególnych składników,
- ryzyko nieostrości wyrażone energią czynnika dyskontującego jest niewrażliwe na dywersyfikację portfelową.

W związku z tym niewłaściwe jest traktowanie ryzyka portfela jako własności jednorodnej, celowe jest natomiast jego rozważanie w kategoriach trojakiego ryzyka. Argumentem potwierdzającym tę sugestię są odmienne zachowania ryzyk na konstrukcję portfela rozważone w przykładzie. Powodem nieusuwalności nawet części ryzyka nieostrości i wieloznaczności w portfelu *n*-składnikowym z podanymi wartościami bieżącymi jest niezależność wyznaczania miar energii i entropii zwrotu z portfela od ilości instrumentów w portfelu. Z tego powodu, nawet jeżeli przejdziemy do granicy $n \to \infty$, ryzyka nie ulegną zmniejszeniu.

Wartym zauważanie jest również fakt, że miary energii i entropii dla czynnika dyskontującego stanowią wdzięczne narzędzie pomiaru ryzyka wieloznaczności i nieostrości w portfelu. Dużą zaletą czynnika dyskontującego jest fakt, że ma on taką samą formę jak wartość bieżąca instrumentów składowych portfela. Tym samym miary jego energii i entropii są znacznie łatwiejsze do obliczenia.

Literatura

Buckley I.J. (1987), *The fuzzy mathematics of finance*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 21, Issue 3.

Calzi M.L. (1990), *Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 35, Issue 3.

Casasnovas J., Vicente Riera J. (2006), *On the addition of discrete fuzzy numbers*, Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics, May 27-29, Istanbul, Turkey.

Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W. (1982), *Contribution to application of energy measure of fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 8, Issue 2.

De Luca A., Termini S. (1972), *A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory*, „Information and Control", Vol. 20.

Dubois D., Prade H. (1980), *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, „Mathematics in Science and Engineering", Vol. 144.

Huang X. (2007a), *Risk curve and fuzzy portfolio selection*, „International Journal of Production Economics", Vol. 106.

Huang X. (2007b), *Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information*, „European Journal of Operational Research", Vol. 180, Issue 1.

Huang X. (2007c), *Portfolio selection with fuzzy returns*, „Journal of Intelligent & Fuzzy Systems", Vol. 18, Issue 4.

Kosko B. (1990), *Fuzziness vs. probability*, „International Journal of General Systems", Vol. 17.

Kuchta D. (2000), *Fuzzy capital budgeting*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 111, Issue 3.

Kuchta D. (2011), *Project scheduling to maximize fuzzy net present value*, Proceedings of the World Congress on engineering, Vol. II, WCE 2011, July 6-8, London.

Lesage C. (2001), *Discounted cash-flows analysis. An interactive fuzzy arithmetic approach*, „European Journal of Economic and Social Systems", Vol. 15, Issue 2.

Markowitz H.S.M. (1952), *Portfolio selection*, „Journal of Finance", Vol. 7, No. 1.

Piasecki K., Siwek J. (2015), *Behavioural present value defined as a fuzzy number – a new approach*, „Folia Oeconomica Stetinensia", DOI: 10.1515/foli-2015-0033.

Siwek J. (2016), *Portfel dwuskładnikowy – przypadek wartości bieżącej danej trapezoidalną liczbą rozmytą* (w druku).

Siwek J. (2015), *Portfel dwuskładnikowy – studium przypadku dla wartości bieżącej danej jako trójkątna liczba rozmyta*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 141.

Vicente Riera J., Torrens J. (2014), *Aggregation functions on the set of discrete fuzzy numbers defined from a pair of discrete aggregations*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 241.

Vicente Riera J., Torrens J. (2015), *Using discrete fuzzy numbers in the aggregation of incomplete qualitative information*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 264.

Voxman W. (2001), *Canonical representation of discrete fuzzy numbers*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 118.

Wang G., Wen C.L. (2007), *A new fuzzy arithmetic for discrete fuzzy numbers*, Proceedings of the Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Vol. 1, Haikou, China.

Wang G., Zhang Q., Cui X. (2008), *The discrete fuzzy numbers on a fixed set with finite support set*, Proceedings of IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems, Chengdu.

Wang S., Zhu S. (2002), *On fuzzy portfolio selection problems*, „Fuzzy Optimization and Decision Making", Vol. 1, Issue 4.

Ward T.L. (1985), *Discounted fuzzy cash flow analysis*, 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, Berkeley.

Yan L. (2009), *Optimal portfolio selection models with uncertain returns*, „Modern applied science", Vol. 3, No. 8.

Zadeh L.A. (1965), *Fuzzy sets*, „Information and Control", Vol. 8.

MULTIPLE ASSET PORTFOLIO WITH PRESENT VALUE GIVEN AS A DISCRETE FUZZY NUMBER

Summary: In the paper we present a vast analysis of a n-asset portfolio of financial instruments regarding the imprecision risk accumulation. The mentioned risk is modelled by present values of the assets being given as discrete fuzzy numbers. The researched model encompasses both rational and behavioural aspects of investor's decision process as well as technical and technological limits of expert systems. Presented work include methods of portfolio construction, imprecision risk parameters' characteristics, risk minimization problem and academic example illustrating model's mechanics. Conclusions from performed analysis are connected mostly with the imprecision risk response to a change in the number and character of portfolio assets.

Keywords: present value, fuzzy sets, imprecision.